Fiche de révision des élèves entrant en spé maths en terminale : Eléments d'autocorrection

Attention : Ce document ne constitue pas un corrigé de la fiche de révision. Il y est indiqué les résultats finaux de chaque question ainsi que des indications pour certaines d'entre elles.
Le résultat final d'une question n'est pas la réponse attendue mais n'en est qu'une partie. La démonstration que le résultat donné est correct est l'objet même du travail mathématique et c'est sur elle que doivent porter vos efforts.
Comment utiliser ce document ?
La fiche de révision a pour but de vous rappeler les notions vues en mathématiques en première et non de les enseigner. Vous pouvez répondre aux questions posées à l'aide de votre cours de l'année passée et ce document vous permet de

- détecter d'inévitables erreurs que vous corrigerez par vous-même
- débloquer un exercice à l'aide des indications données ou même du résultat qui donne un objectif à atteindre

En d'autre termes, l'essentiel reste à faire et ce travail vous revient, bon courage !

I. Suites

1. a. $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 7$ et $u_3 = 17$ pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 1$
   b. $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = 1$, $u_3 = \dfrac{5}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$
   c. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = -1$ et $u_3 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin\left((x+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$

2. a. $u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 1$ $u_{2n} = 8n^2 - 1$
   $u_{n-1} = 2n^2 - 4n + 1$ $u_n + 1 = 2n^2$
   b. $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+2}$ $u_{2n} = \dfrac{4n-1}{2n+1}$
   $u_{n-1} = \dfrac{2n-3}{n}$ $u_n + 1 = \dfrac{3n}{n+1}$

3. a. $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, $u_2 = -5$, $u_3 = 11$, $u_4 = -21$ pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$
   b. $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_4 = 25$ pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2$

4. a.
   - FAUX *utiliser la formule $u_{n+1} = u_n + n^2$ avec $n = 0$*
   - VRAI *étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$*

   b.
   - FAUX *remplacer n par $n+1$ et simplifier*
   - VRAI *étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$*

5. a. α) arithmétique *reconnaître le terme général d'une suite arithmétique*
   b. γ) ni arithmétique, ni géométrique *calculer les premiers termes pour obtenir des contre-exemples*
   c. β) géométrique *reconnaitre la définition d'une suite géométrique*
   d. β) géométrique *reconnaitre le terme général d'une suite géométrique*

6. a. *Montrer que $v_{n+1} - v_n$ est constant en l'exprimant en fonction de u_n uniquement*
   b. pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = n+1$ *utiliser le terme général d'une suite arithmétique en fonction de sa raison et de son premier terme*
   pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{n+1}$ *exprimer u_n en fonction de v_n*

7. a. *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et utiliser la définition d'une suite géométrique*
   b. pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 7 \times 2^n$ *utiliser le terme général d'une suite géométrique en fonction de sa raison et de son premier terme*
   pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 2^n - 5$ *exprimer u_n en fonction de v_n*

II. Fonctions

1. a. $t(h) = -\dfrac{4+h}{5+4h+h^2}$

   b. $f'(2) = -\dfrac{4}{5}$ *utiliser la définition du nombre dérivé*

   c. $y = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{13}{5}$ *appliquer la formule du cours de l'équation de la tangente*

2. a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -6x^2 + 10x - 5$

   b. g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$
   pour tout $x \in]0;+\infty[, g'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x^2}$

   c. h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   pour tout $x \in \mathbb{R}, h'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 10x - 15$

   d. i est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
   pour tout $x \in \mathbb{R}, i'(x) = (-x^2 - 2x + 8)\mathrm{e}^x$

3. a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

   b. *appliquer la formule de la dérivée d'un quotient et simplifier*

   c. *étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation*

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

   d. La courbe de f admet deux tangentes horizontales en -4 et en 0 *résoudre $f'(x) = 0$*

   e. La courbe de f admet deux tangentes de coefficient directeur -1 :
   en $-2-\sqrt{2}$ d'équation $y = -x - 6 - 4\sqrt{2}$
   en $-2+\sqrt{2}$ d'équation $y = -x - 6 + 4\sqrt{2}$
   Résoudre $f'(x) = -1$ puis appliquer la formule de l'équation de la tangente

4. a. *développer le premier terme de l'égalité et simplifier à l'aide des propriétés de l'exponentielle*

   b. l'équation admet deux solutions : $1+\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{5}$
   utiliser la propriété $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$

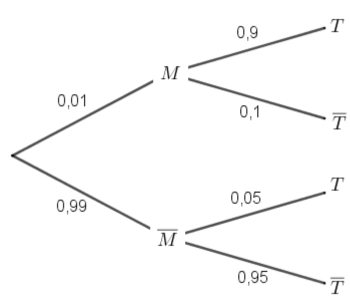
   c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-3x^2}$		$-$	0	$+$	

   Déterminer le signe de $(1-\mathrm{e}^{-x})$ en résolvant l'inéquation $1-\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ et le signe de e^{-3x^2} à l'aide des propriétés de la fonction exponentielle

III. Probabilités

1. a.



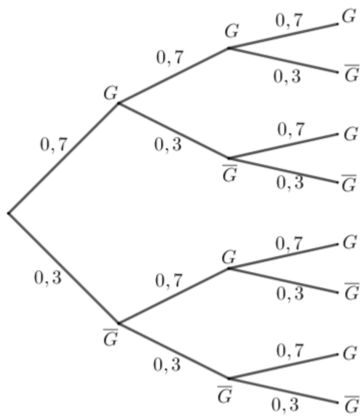
   b. $P(T) = 0{,}0585$ *appliquer la formule des probabilités totales*

   c. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} \approx 0{,}1538$ à 10^{-4} près
   Bien identifier la probabilité conditionnelle à calculer puis appliquer la définition de $P_A(B)$

2. a. A et B sont indépendants si et seulement si $P(B) = 0{,}8$
Raisonner par équivalence en commençant par écrire la définition de deux événements indépendants :
A et B sont indépendants $\iff P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$
Puis exprimer $P(A \cap B)$ en fonction de $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$ pour finalement trouver une équation en $P(B)$

b. A et B sont incompatibles si et seulement si $P(B) = 0{,}52$
utiliser la même démarche en partant de la définition de deux événements incompatibles

3. a.



b. $P(V) = 0{,}441$
D'après la formule des probabilités totales, $P(V)$ est la somme des probabilités de tous les chemins dans l'arbre qui réalisent V, c'est à dire des chemins composés de deux fois G et une fois $\overline{G}$ sans tenir compte de l'ordre.

c.

k	6	7	8	9
$P(X = k)$	0,027	0,189	0,441	0,343

On identifie les valeurs possibles de X (3 beignets : $X = 6$, 2 beignets et une glace : $X = 7$,...). Pour chaque valeur possible k on calcule la probabilité $P(X = k)$ de la même manière qu'à la question précédente. Et enfin, on résume toutes ces informations par un tableau, ce qui donne la loi de X.

d. Si W est l'événement "au moins deux glaces sont vendues" alors $P(W) = 0{,}774$
Interpréter l'événement W pour utiliser le tableau précédent.

IV. Géométrie dans le plan

1. a. $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$
partir de l'égalité $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{DN}$ et introduire le point A dans le vecteur $\overrightarrow{DN}$ à l'aide de la relation de Chasles

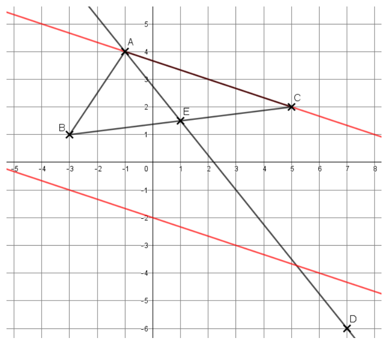
b. *Utiliser la définition d'un repère du plan*

c. $\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
utiliser la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BI}$ selon des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

d. (MN) et (BI) sont parallèles
montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires en utilisant la question précédente

e. *exprimer $\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et en déduire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires*

2. a.



   b. $E\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ *appliquer la formule des coordonnées d'un milieu*

   c. $(AE) : 5x+4y-11=0$
   appliquer la méthode du cours pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite dont on connait les coordonnées de deux points. Attention, si on multiplie ou si on divise cette équation par un réel non nul on obtient une autre équation cartésienne de (AE) donc d'autres réponses sont possibles

   d. *Montrer que la médiane du triangle ABC issue de A est la droite (AE) puis utiliser l'équation cartésienne de (AE) obtenue dans la question précédente pour justifier que D appartient à (AE)*

   e. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)
   utiliser le cours qui donne un lien entre équation cartésienne et coordonnées d'un vecteur directeur d'un droite

   f. *calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires*

V. Produit scalaire et applications

1. a.
   - $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=8$ *formule avec* cos *ou projeté orthogonal*
   - $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=-16$ *vecteurs colinéaires*
   - $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=16$ *projeté orthogonal*
   - $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ *vecteurs orthogonaux*

   b. $EF=2\sqrt{3}$ *théorème de Pythagore dans le triangle EBC*

   c. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=12$ *projeté orthogonal*

2. a. $\widehat{FEG}\approx 53°$ au degré prés
   calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}$ à l'aide des coordonnées des vecteurs, puis exprimer le même produit scalaire par la formule avec $\cos(\widehat{FEG})$. En déduire $\cos(\widehat{FEG})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{FEG}$ avec la calculatrice

   b. $GH\approx 2{,}4$ à 0,1 près
   La question précédente invite à utiliser l'angle $\widehat{FEG}$ et la trigonométrie dans le triangle HEG rectangle en H
   On aurait aussi pu calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}$ d'une troisième manière en fonction de EH par le projeté orthogonal. Puis utiliser la valeur exacte du produit scalaire obtenu avec les coordonnées pour obtenir une valeur exacte de EG

3. a. $C_1 : (x-1)^2+(y+1)^2=25$ *appliquer le cours sur les équations de cercle*

   b. C_2 est un cercle de centre $K(2;-2)$ et de rayon 3
   Modifier l'équation de C_2 pour obtenir une équation de cercle : $x^2+y^2-4x+4y-1 \iff (x-2)^2+(y+2)^2=9$ Donc

   c. C_1 et C_2 n'ont pas de point d'intersection
   Poser le système formé par les équations de C_1 et C_2 puis montrer que ce système n'a pas de solution