Lycée Camille Claudel. **PALAISEAU.**

EXERCICES DE REVISION

POUR LES ELEVES ENTRANT EN TERMINALE SPE MATHEMATIQUES

I. SUITES.

1. Pour chacune des suites données ci-dessous, définies pour n entier naturel, calculez les quatre premiers termes puis trouvez la fonction f telle que $u_n = f(n)$:

a. $u_n = 2n^2 - 1$

b. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

c. $u_n = \sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Pour les suites définies au **a** et **b** de la question précédente, exprimer en fonction de n les termes u_{n+1} , u_{n-1} u_{2n} et $u_n + 1$

3. Pour chacune des suites récurrentes ci-dessous, donnez les cinq premiers termes, puis trouvez la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$:

a. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -2u_n + 1$

b. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$

4. Répondre par VRAI ou FAUX et justifiez votre réponse.

a. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$, alors :

- $u_1 = -1$
- (u_n) est une suite croissante.

b. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = -2n^2 + n + 1$ alors :

- $v_{n+1} = -2n^2 + 3n + 3$
- (v_n) est une suite décroissante.

5. QCM

a. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par, $u_n = 5 - 2n$ est :
α) arithmétique β) géométrique γ) ni arithmétique, ni géométrique

b. La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = v_n + n$
α) arithmétique β) géométrique γ) ni arithmétique, ni géométrique

c. La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_0 = -2$ et $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{3}$ est :
α) arithmétique β) géométrique γ) ni arithmétique, ni géométrique

d. La suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{5}{2}(-3)^n$ est :
α) arithmétique β) géométrique γ) ni arithmétique, ni géométrique

6. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$

a. On suppose que pour tout entier naturel n on a $u_n \neq 0$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.

b. En déduire l'expression du terme général de la suite (v_n) puis celui de la suite (u_n) en fonction de n.

7. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$. On pose $v_n = u_n + 5$.

a. Prouver que la suite (v_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression du terme général de (v_n) puis celui de (u_n) en fonction de n.

II. FONCTIONS

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$
   - **a.** On pose $t(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$. Calculer $t(h)$.
   - **b.** En déduire que est dérivable en 2 et préciser son nombre dérivé.
   - **c.** Donner l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 2.
2. Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir déterminé l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de chacune d'elles :
   - **a.** $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 5x + 9$
   - **b.** $g(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{2x}$
   - **c.** $h(x) = (x^2 - 3x)(x^2 + 5)$
   - **d.** $\boldsymbol{i(x) = (-x^2 + 8) \times e^x}$
3. On considère la fonction f telle que $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$
   - **a.** Sur quel ensemble est-elle définie ? dérivable ?
   - **b.** Montrer que sa fonction dérivée est telle que : $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$
   - **c.** Etudier les variations de f sur son ensemble de définition.
   - **d.** La courbe représentative de la fonction f admet-elle des tangentes horizontales ?
   - **e.** La courbe représentative de la fonction f admet-elle des tangentes de coefficient directeur *−1 ?* Si oui, donner les équations réduites de ces tangentes.
4. *Propriétés de la fonction exponentielle :*
   - **a.** Montrer pour tout réel x que $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$
   - **b.** Résoudre l'équation $e^{x^2} - e^{2x+4} = 0$
   - **c.** Déterminer le signe de $(1 - e^{-x})\, e^{-3x^2}$ en fonction du réel x

III. PROBABILITES.

1. On sait que 1% d'une population est atteint d'une certaine maladie orpheline.
   On dispose de tests de dépistage de cette maladie ainsi que des données suivantes :
   ▫ si la personne est atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 90% des cas;
   ▫ si la personne n'est pas atteinte de cette maladie, alors le test est positif dans 5% des cas.
   On considère les événements M : « la personne est atteinte par la maladie » et T : « le test est positif ».
   - **a.** Représenter la situation par un arbre pondéré.
   - **b.** Quelle est la probabilité que le test soit positif ?
   - **c.** Quelle est la probabilité qu'une personne soit atteinte de la maladie sachant que son test est positif ?
2. A et B sont deux événements de l'univers tel que P(A) = 0,35 et P(A∪B) = 0,87.
   - **a.** Quelle doit être la valeur de P(B) pour que A et B soient indépendants ?
   - **b.** Quelle doit être la valeur de P(B) pour que A et B soient incompatibles ?
3. Sur la plage, un marchand ambulant vend des beignets à 2 € et des glaces à 3 €.
   Le marchand sert trois clients qui achètent chacun un produit.
   Pour chaque client, la probabilité qu'il achète une glace est indépendante du choix des autres clients et vaut 0,7.
   - **a.** Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   - **b.** Calculer la probabilité de l'événement V : « le marchand vend deux glaces et un beignet ».
   - **c.** On note X la variable aléatoire associée au nombre de glaces vendues. Déterminer la loi de probabilité de X.
   - **d.** Calculer la probabilité qu'au moins deux glaces soient vendues.

IV. GEOMETRIE DANS LE PLAN.

1. Soit un parallélogramme non aplati ABCD et I le milieu de [DC].

On considère les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{DN}$

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AD}$ puis faire une figure.

b. Montrer que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ détermine un repère du plan.

c. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction des vecteurs du repère.

d. Que peut-on dire des droites (MN) et (BI) ? Justifiez.

e. Montrer que les points M, N et C sont alignes.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé *(O ; I , J),* on considère les points :
A(–1 ;4) , B(–3 ;1) , C(5 ;2) et D(7 ;–6)

a. Faire une figure.

b. Déterminer les coordonnées du point E milieu de [BC].

c. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AE).

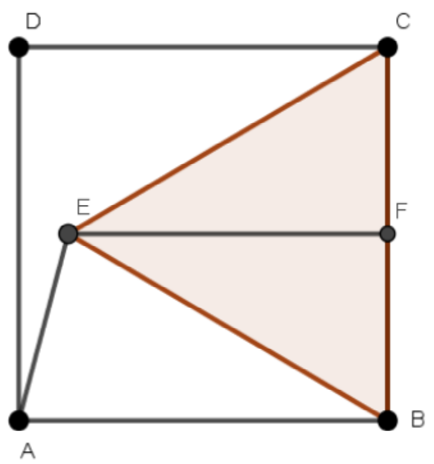
d. Montrer que D appartient à la médiane du triangle ABC issue de A.

e. On considère la droite (Δ) d'équation $x+3y+6=0$.
Donner un vecteur directeur de (Δ) et tracer la droite (Δ)

f. Montrer que (Δ) est parallèle à la droite (AC).

V. PRODUIT SCALAIRE ET APPLICATIONS.

1. Sur la figure, ABCD est un carré de côté 4. BCE est un triangle équilatéral et F est le milieu de [CD].



a. Calculer les produits scalaires :
- $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$
- $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b. Calculer EF dans le triangle EBC.

c. Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB}$

2. Dans un repère orthonormé, on donne les points E (–2 ; –1), F (2 ; 2) et G (–2 ; 3).

a. Calculer l'arrondi au degré de la mesure de l'angle $F\hat{E}G$.

b. Calculer la distance GH où H est le projeté orthogonal de G sur la droite (EF).
Arrondir au dixième.

3. Dans un repère orthonormé, on considère les points I (1 ; –1) et J (–2 ; 3).

a. Déterminer une équation cartésienne du cercle C_1 de centre I et de rayon IJ.

b. On considère l'ensemble C_2 des points M(x ;y) tels que : $x^2+y^2-4x+4y-1=0$.
Reconnaître cet ensemble en précisant ses éléments caractéristiques.

c. Etudier l'intersection de C_1 et de C_2.