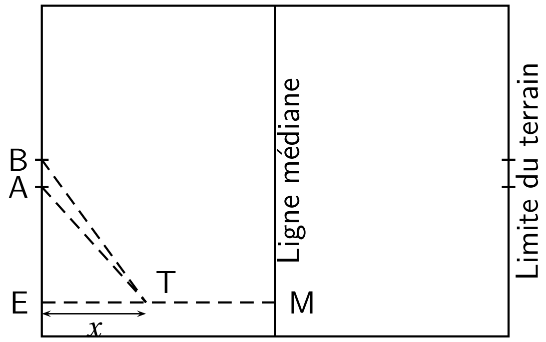
Annales 2016 - Trigonométrie

I Sujet : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.
   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.
   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.
   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}$.

4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ à $0,01$ radian près.

Correction : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

1.

$$\tan\alpha = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x} \qquad \tan\beta = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque la fonction cosinus ne s'annule pas sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit, par quotient, que la fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

   Pour tout nombre réel x appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

   Puisque $\tan' > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, alors

   La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

3. On a $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$, soit $\gamma = \beta - \alpha$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\tan\gamma &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}} \\
&= \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2+765}{x^2}} = \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2+765} \\
&= \frac{5,6x}{x^2+765}
\end{aligned}$$

$$\tan\gamma = \frac{5,6x}{x^2+765}$$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ l'est. Puisque γ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ on en déduit, la fonction tangente étant strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, que γ est maximal si et seulement si $\tan\gamma$ est maximal.

   S'il existe, le maximum de $\tan\gamma$ est ainsi le maximum, sur $]0, 50]$, de la fonction g définie par $g(x) = \frac{5,6x}{x^2+765}$.

   Remarque :

> Pour démontrer que g admet, sur $]0,50]$, un maximum atteint pour une unique valeur de x, il suffit d'étudier les variations de g, ce qui ne pose aucun problème...

On peut aussi procéder de la manière suivante :

Puisque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]0,50]$, on peut définir, sur $]0,50]$, la fonction $\frac{1}{g}$.

La fonction g est strictement positive sur $]0,50]$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$: les fonctions g et $\frac{1}{g}$ ont donc des sens de variation contraires.

Puisque $f = 5,6 \times \frac{1}{g}$, les fonctions f et $\frac{1}{g}$ ont les mêmes variations : les fonctions f et g ont donc des variations contraires.

Le maximum de g [1]sur $]0,50]$ est obtenu en une valeur de x pour laquelle f admet un minimum

La fonction f est dérivable sur $]0,50]$ et, pour tout nombre réel x appartenant à $]0,50]$:

$$f'(x) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{x+\sqrt{765}}{x}(x-\sqrt{765})$$

Puisque $x \in]0,50]$, alors $x + \sqrt{765} > 0$:

le signe de f'(x) est donc celui de $x - \sqrt{765}$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0,\sqrt{765}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{765},50]$:

f admet donc, sur $]0,50]$, un minimum atteint pour $x = \sqrt{765}$.

L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximal pour une unique valeur de x, égale à $\sqrt{765}\,\text{m}$

Une valeur approchée de x, au mètre prés, est $28\,m$

Une valeur approchée de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$, à 0,01 radian près est $0,1$, soit environ 5,78ř

1. Sous réserve d'existence