Annales 2016 - Suites

I Sujet : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

On souhaite stériliser une boîte de conserve.

Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°C$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°$ C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85°C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

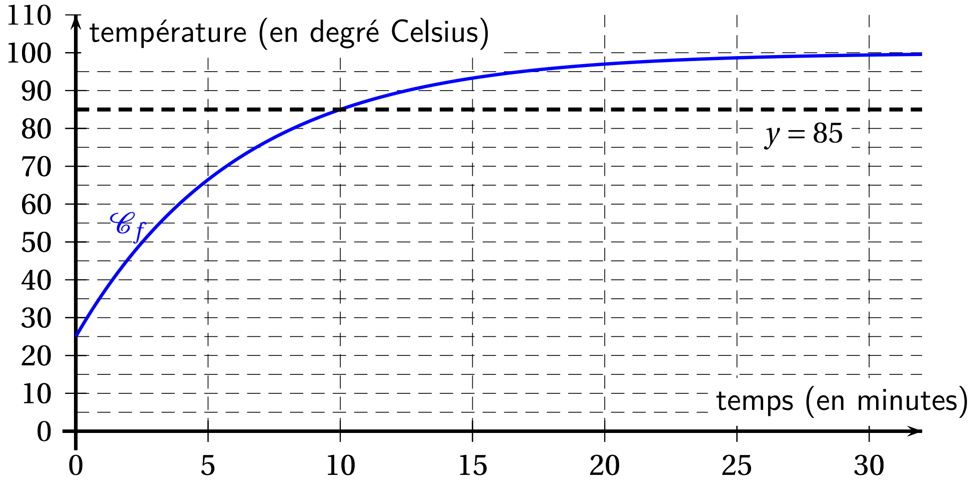
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. (a) Étudier le sens de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

   (b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



(a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.

(b) Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

(c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

II Sujet : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

III Sujet : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100.$$

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

   On précisera en particulier ce que représente u_n.

   (b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   (c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

   Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

(b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1+49e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.
   (c) Étudier le sens de variation de la fonction f.
   (d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.

   En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.

L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.

L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

IV Sujet : Bac S — Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\,(u_{n+1} - u_n)$.

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathrm{V}_{n+1} = \mathrm{AV}_n$.

   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{V}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{V}_0$.

   (b) On pose $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.

   À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.

   En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

   $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$.

   Pour tout entier naturel n, on admet que

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

   (d) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.
3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10e jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.
4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.

V Sujet : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. (a) À l'aide du calcul des premiers termes de la suite (u_n), conjecturer la forme explicite de u_n en fonction de n. Démontrer cette conjecture.

   (b) En déduire la valeur de la limite ℓ de la suite (u_n).

2. Compléter, dans l'annexe 2, l'algorithme permettant de déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leqslant 10^{-3}$.

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur $0,5$.
Traitement :	Tant que $\vert b - a\vert$ ....
	n prend la valeur ....
	a prend la valeur ....
	b prend la valeur ....
	Fin Tant que.
Sortie :	Afficher ....

Correction : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $\mathrm{T}_0 = 25$.

Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times \mathrm{T} + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. On cherche T_3 :

   $\mathrm{T}_1 = 0,85 \times \mathrm{T}_0 + 15 = 36,25$; $\mathrm{T}_2 = 0,85 \times \mathrm{T}_1 + 15 = 45,8125$; $\mathrm{T}_3 = 0,85 \times \mathrm{T}_2 + 15 = 53,940625$

   La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54° C.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $\mathrm{T}_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

   - Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = \mathrm{T}_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{T}_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.

     D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{T}_{n+1} = 0,85 \times \mathrm{T}_n + 15$.

     Donc $\mathrm{T}_{p+1} = 0,85\left(100 - 75 \times 0,85^p\right) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$

     La propriété est donc vraie au rang $p+1$.
   - La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geq 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

   Pour tout entier naturel n, $\mathrm{T}_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85ř C, donc on cherche n tel que $\mathrm{T}_n > 85$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_n > 85 &\iff 100 - 75 \times 0,85^n > 85 \\
&\iff 15 > 75 \times 0,85^n \\
&\iff 0,2 > 0,85^n \\
&\iff \ln 0,2 > \ln\left(0,85^n\right) && \text{croissance de la fonction ln} \\
&\iff \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 && \text{propriété de la fonction ln} \\
&\iff \frac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n && \text{car } \ln 0,85 < 0
\end{aligned}
$$

   Or $\dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.

On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

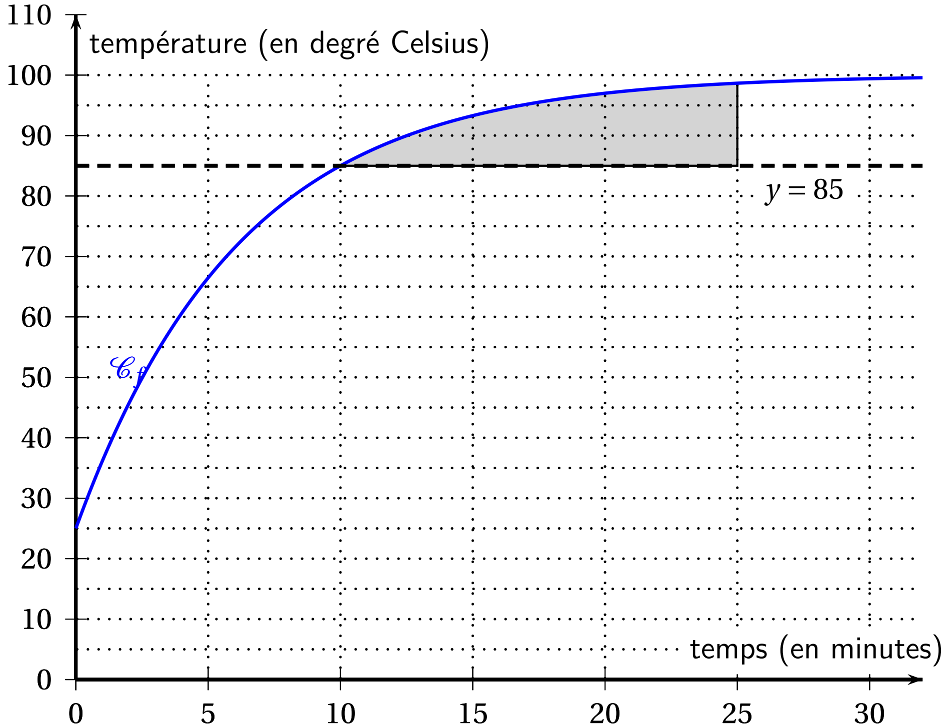
1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(t) = -75 \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\right) e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7{,}5 \times \ln 5 e^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ car $e^x > 0$ pour tout réel x.
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.

   (b) $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - \dfrac{75}{e^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 85$
   Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geq 10$, alors $f(x) \geq f(10)$ ce qui veut dire qque $f(x) \geq 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.

   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.

   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



   (a) A(25) est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3{,}5 \times 25 = 87{,}5$ unités d'aire. Donc $\mathscr{A}(25) > 80$.

   (b) $\mathrm{A}(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,\text{ṭ} = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) - 85\right]\text{ṭ} = \int_{10}^{\theta}\left(15 - 75 \times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)\text{ṭ}$
   $= \displaystyle\int_{10}^{\theta} 15\text{ṭ} - \int_{10}^{\theta} 75 \times e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\text{ṭ} = 15\left[t\right]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\text{ṭ} = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\text{ṭ}$

(c) La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathscr{A}(20) > 80$.

$$\mathscr{A}(20) = 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20} = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[e^{-2\ln 5} - e^{-\ln 5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(e^{-\ln 5}\right)^2 - e^{-\ln 5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= 150 + \frac{750}{\ln 5} \times \frac{-4}{25} = 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.

Correction : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

1. **en C2 on entre « =B2+2*A2×A2+3*A2+5 »** et **en B3 on entre « =2*B2+2*A2×A2-A2 »**
2. Il semblerait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 7 \times 2^n$

   on aurait alors $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ car $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$

   Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

   Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $7 \times 2^0 - 2 \times 0^2 - 3 \times 0 - 5 = 7 - 5 = 2$

   donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$

   Hérédité : Supposons que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on ait $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$

   alors $u_{k+1} = 2\left(7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5\right) + 2k^2 - k = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$

   or $7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 4k - 2 - 3k - 3 - 5 = 7 \times 2^{k+1} - 2k^2 - 7k - 10$

   donc si $u_k = 7 \times 2^k - 2k^2 - 3k - 5$, cela entraîne que $u_{k+1} = 7 \times 2^{k+1} - 2(k+1)^2 - 3(k+1) - 5$

   La propriété est donc héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée au rang 0, donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5 = 7 \times 2^n$

Correction : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. (a) On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1000$ puisqu'initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

   D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.
   Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100$ avec $u_0 = 1000$.

   (b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000 g.

   On cherche le plus petit entier n tel que $u_n > 30000$.

   À la calculatrice, on trouve $u_{22} \approx 28103$ et $u_{23} \approx 33624$; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

   (c) On complète l'algorithme :

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \leq 30000$ faire
	    u prend la valeur $1,2 \times u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n \geq 1000$.

   - $u_0 = 1000 \geq 1000$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 0$, c'est-à-dire $u_p \geq 1000$.
     $u_{p+1} = 1,2\,u_p - 100$; $u_p \geq 1000$ donc $1,2\,u_p \geq 1200$ donc $1,2\,u_p - 100 \geq 1100$.
     Donc $1,2\,u_p - 100 \geq 1000$ et on a démontré que la propriété était vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Pour tout n, $u_n \geq 1000$.

(b) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1{,}2\,u_n - 100 - u_n = 0{,}2\,u_n - 100$

Or, pour tout n, $u_n \geq 1000$ donc $0{,}2\,u_n \geq 200$ et donc $0{,}2\,u_n - 100 \geq 100$

On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$ donc, $u_n = v_n + 500$.

(a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2\,u_n - 100 - 500 = 1{,}2(v_n + 500) - 600 = 1{,}2\,v_n + 600 - 600 = 1{,}2\,v_n$

$v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$ et de premier terme $v_0 = 500$.

(b) On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 1{,}2^n$.

Comme, pour tout n, $u_n = v_n + 500$, on en déduit que $u_n = 500 + 500 \times 1{,}2^n$.

(c) La suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme positif ; or $1{,}2 > 1$ donc, d'après le cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Pour tout n, $u_n = v_n + 500$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Partie B : second modèle – avec une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{50}{1 + 49e^{-0{,}2t}}$.

1. (a) $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49e^0} = \dfrac{50}{1 + 49} = 1$

(b) Pour tout t, $e^{-0{,}2t} > 0$ donc $1 + 49e^{-0{,}2t} > 1$ et donc $\dfrac{1}{1 + 49e^{-0{,}2t}} < 1$

On en déduit que $\dfrac{50}{1 + 49e^{-0{,}2t}} < 50$ et donc que, pour tout t, $f(t) < 50$.

(c) La fonction $t \longmapsto -0{,}2t$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto e^{-0{,}2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la fonction $t \longmapsto 1 + 49e^{-0{,}2t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc, par composition, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + 49e^{-0{,}2t}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en conclut que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$.

(d) $\lim\limits_{t \to +\infty} -0{,}2t = -\infty$; on pose $\mathrm{T} = -0{,}2t$. Or $\lim\limits_{\mathrm{T} \to -\infty} e^{\mathrm{T}} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0{,}2t} = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + 49e^{-0{,}2t} = 1$ et donc que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$.

2. On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.

- $f(0) = 1$ signifie que la masse des bactéries à l'instant $t = 0$ est de 1 kg ;
- $f(t) < 50$ pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50 kg ;

- f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps ;
- $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50 kg.

3. On résout l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$:

$$\begin{aligned}
f(t) > 30 &\iff \frac{50}{1+49e^{-0,2t}} > 30 \\
&\iff 50 > 30 + 30\times 49 e^{-0,2t} \quad \text{car } 1+49e^{-0,2t} > 0 \text{ pour tout } t \\
&\iff \frac{50-30}{30\times 49} > e^{-0,2t} \\
&\iff \frac{2}{147} > e^{-0,2t} \\
&\iff \ln\left(\frac{2}{147}\right) > -0,2t \qquad \text{croissance de la fonction ln sur } [0\ ;\ +\infty[\\
&\iff \frac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} < t \qquad \text{division par un nombre négatif}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{2}{147}\right)}{-0,2} \approx 21,5$ donc on en conclut que la masse de bactéries dépassera 30 kg au bout de 22 jours.

Partie C : un contrôle de qualité

On prend un échantillon de taille $n = 200$ et dans lequel l'entreprise affirme que 80 % des bactéries (celles de type A) produiront une protéine ; donc la proportion de bactéries de type A est $p = 0,8$.
$n = 200pg50$; $np = 160 \geq 5$ et $n(1-p) = 40 \geq 5$ donc les conditions sont vérifiées pour qu'on établisse un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,8 - 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,8 + 1,96\frac{\sqrt{0,8\times 0,2}}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,74\ ;\ 0,86]$$

La fréquence de bactéries dans l'échantillon est de $f = \dfrac{146}{200} = 0,73$; cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation calculé.
Donc, au risque de 5 % ; on peut remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

Correction : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$, donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

1. On calcule, à la calculatrice, u_n pour les premières valeurs de n (valeurs de u_n arrondies) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
u_n	1	1,8	2,44	2,95	3,36	3,69	3,95	4,16	4,33	...

n	...	20	21	22	23	24	25	26	27	28
u_n	...	4,95	4,96	4,97	4,976	4,981	4,985	4,988	4,990	4,992

La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers le nombre 5.

2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $5 - 4 \times 0,8^0 = 5 - 4 = 1$. Donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité**

  Soit n un entier naturel quelconque.

  On suppose que la propriété est vraie pour le rang n c'est-à -dire $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$ (c'est l'hypothèse de récurrence), et on veut démontrer qu'elle est encore vraie pour le rang $n + 1$.

  $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$; donc :

  $u_{n+1} = 0,8\left(5 - 4 \times 0,8^n\right) + 1 = 0,8 \times 5 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 4 - 4 \times 0,8^{n+1} + 1 = 5 - 4 \times 0,8^{n+1}$

  Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

  On a démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.

  La propriété $\mathscr{P}_n$ est donc héréditaire pour tout n.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie pour $n = 0$.

  Elle est héréditaire à partir du rang 0.

  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

3. - $u_{n+1} - u_n = \left(5 - 4 \times 0,8^{n+1}\right) - \left(5 - 4 \times 0,8^n\right) = 5 - 4 \times 0,8^{n+1} - 5 + 4 \times 0,8^n = 4 \times 0,8^n (1 - 0,8)$
   $= 4 \times 0,8^n \times 0,2 > 0$

     Pour tout n, on a démontré que $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

   - $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite géométrique $(0,8^n)$ de raison 0,8 converge vers 0.

     $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0,8^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 5 - 4 \times 0,8^n = 5$

     Donc la suite (u_n) est convergente vers 5.

   On peut donc dire que si l'apiculteur rachète chaque année 10 000 abeilles, le nombre d'abeilles va augmenter chaque année et va tendre vers 50 000.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.
On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.
On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5c$; donc, pour tout n, $u_n = v_n + 5c$.

1. - $v_{n+1} = u_{n+1} - 5c = 0,8u_n + c - 5c = 0,8(v_n + 5c) - 4c = 0,8v_n + 4c - 4c = 0,8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 5c = 1 - 5c$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$.

2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = 1 - 5c$ donc, pour tout n,
$$v_n = v_0 \times q^n = (1 - 5c)\,0,8^n.$$

3. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8 ; or $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

   Pour tout n, $u_n = v_n + 5c$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite $5c$.

   L'apiculteur veut que le nombre d'abeilles tende vers 100 000 ; il faut donc que $5c = 10$, autrement dit que $c = 2$.

   Pour que le nombre d'abeilles tende vers 100 000, il faut que l'apiculteur rachète chaque année 20 000 abeilles.

Correction : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1. (a) On calcule les premiers termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$

On peut conjecturer que, pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

- **Initialisation**

  Pour n=0, $u_n = u_0 = 0$ et $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{0}{1} = 0$.

  Donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  Soit n un entier naturel quelconque.

  On suppose que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ (hypothèse de récurrence).

  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$.

  $$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} = \frac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

  On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.

- **Conclusion**

  On a vérifié que la propriété était vraie au rang 0.

  On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout n.

  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

(b) Pour tout n, $u_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

D'après le cours : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$.

On peut donc en déduire que la limite ℓ de la suite (u_n) est égale à 1.

2. On complète l'algorithme pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-3}$:

Variables :	n, a et b sont des nombres.
Initialisation :	n prend la valeur 0
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur $0,5$
Traitement :	Tant que $\|b-a\| > 10^{-3}$
	n prend la valeur $n+1$
	a prend la valeur b
	b prend la valeur $\dfrac{1}{2-b}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Explications

Pour n donné, a joue le rôle de u_n et b celui de u_{n+1}.

Si l'objectif $|u_{n+1}-u_n| \leq 10^{-3}$ n'est pas atteint, on passe au rang $n+1$: on remplace u_n par u_{n+1}, c'est-à-dire a par b, et on remplace u_{n+1} par u_{n+2}, c'est-à-dire b par $\dfrac{1}{2-b}$.