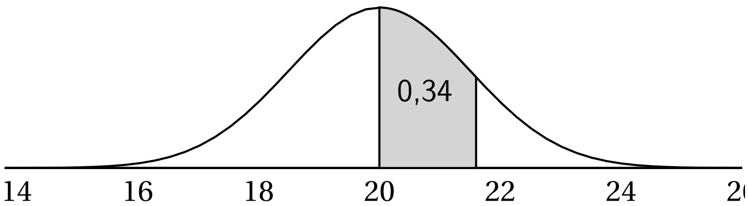
Annales 2016 - QCM

I Sujet : Bac S – Liban – 31 mai 2016

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à $0,34$.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2\ ;\ +\infty[$ vaut environ 0,046.

2. Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z = \dfrac{iz}{z-2}$.

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A$(1\,;\,0)$.

Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4+6e^{-2x}}$.

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 5 : L' algorithme suivant affiche en sortie la valeur $0,54$.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0 Y prend la valeur $\dfrac{3}{10}$

Traitement :	Tant que $Y < 0,5$
	    X prend la valeur $X + 0,01$
	    Y prend la valeur $\dfrac{3}{4+6e^{-2X}}$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher X

II Sujet : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

our chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production.

   On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

   Affirmation 1

   La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à 0,9.

2. **Affirmation 2**

   L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

   Dans les questions 3. et 4., l'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = -5t'+3 \\ y = 2t' \\ z = t'+4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. **Affirmation 3**

   Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

4. **Affirmation 4**

   La droite $\mathcal{D}_1$ est parallèle au plan d'équation $x+2y+z-3=0$.

III Sujet : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

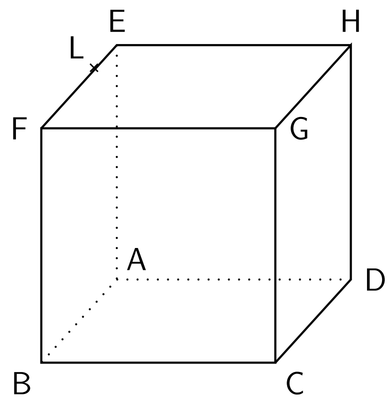
1. **Proposition 1** :

   Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_\text{A} = \sqrt{2} + 3\text{i}$, $z_\text{B} = 1 + \text{i}$ et $z_\text{C} = -4\text{i}$ ne sont pas alignés.

2. **Proposition 2** :

   Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[\text{i}(1+\text{i})]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{\text{EL}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{EF}}$.



   Proposition 3

   La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

   Proposition 4

   Le triangle DBL est rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,5]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

   Proposition 5 :

   L'intégrale $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre 1,5 et 6.

IV Sujet : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :

$$A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1), D(2 ; 1 ; -1), E(-1 ; -2 ; 3) \text{ et } F(-2 ; -3 ; 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

V Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – septembre 2016

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z

   $(\mathrm{E}) : \quad z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$, où a désigne un nombre réel quelconque.

   - Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   - Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.
   - Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.
   - Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ et z le nombre complexe $z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

   Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$:

   - Le nombre z est un réel positif.
   - Le nombre z est égal à 1.
   - Un argument de z est θ.
   - Un argument de z est $\dfrac{\theta}{2}$.

3. Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$.

   - La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{4}\ ;\ +\infty\right[$.
   - Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.
   - La fonction f est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. La fonction F est une primitive de la fonction f.

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $0,02$.

   $0,45$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de :

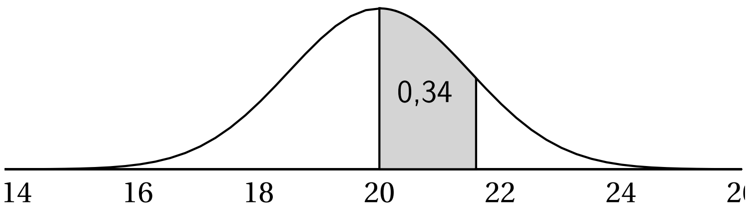
   - $P(X = 30)$
   - $P(X \leqslant 60)$
   - $P(X \leqslant 30)$
   - $P(30 \leqslant X \leqslant 40)$

Correction : Bac S – Liban – 31 mai 2016

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et $21,6$ est égale à $0,34$.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2\ ;\ +\infty[$ vaut environ 0,046.

Réponse : **FAUX**

Comme $p[20\ ;\ 21,6] = 0,34$, $p[20-1,6\ ;\ 21,6] = 2\times 0,34$, c'est à dire $p[18,4\ ;\ 21,6] = 0,68$.

On en déduit qu'il s'agit d'un intervalle à un-σ. Donc $\sigma \approx 1,6$.

On sait alors que pour l'intervalle deux-σ, on a :

$p[20-2\times 1,6; 20+2\times 1,6] \approx 0,95$ et par conséquent $p[23,2; +\infty[= 0,5\times 0,05 \approx 0,025$.

2. Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose : $Z = \dfrac{\mathrm{i}z}{z-2}$.

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1\ ;\ 0)$.

Réponse : **VRAI**

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, on a : $|Z| = 1 \iff \dfrac{|\mathrm{i}z|}{|z-2|} = 1 \iff \dfrac{|z|}{|z-2|} = 1 \iff |z| = |z-2|$.

Le point O a pour affixe 0 ; soit I le point d'affixe 2, et M le point d'affixe z : $|z| = |z-2| \iff OM = IM$.

Autrement dit $|Z| = 1$ si seulement si M appartient à la médiatrice de $[OI]$ dont A est le milieu.

Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

Réponse : **VRAI**

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, on a :

Z est un imaginaire pur $\iff Z + \overline{Z} = 0 \iff \dfrac{\mathrm{i}z}{z-2} + \overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}z}{z-2}\right)} = 0$

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, d'après les propriétés des conjugués, on a :

$\overline{\left(\dfrac{\mathrm{i}z}{z-2}\right)} = \dfrac{\overline{\mathrm{i}z}}{\overline{z-2}} = \dfrac{-\mathrm{i}\overline{z}}{\overline{z}-2}$.

Pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$,

Z est un imaginaire pur $\iff \dfrac{\mathrm{i}z}{z-2} + \dfrac{-\mathrm{i}\overline{z}}{\overline{z}-2} = 0 \iff \dfrac{\mathrm{i}z(\overline{z}-2) - \mathrm{i}\overline{z}(z-2)}{|z-2|^2} = 0 \iff$

$-2\mathrm{i}z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 0 \iff -2\mathrm{i}(z-\overline{z}) = 0$

Et finalement, pour tout nombre complexe z, $z \neq 2$, on a : Z est un imaginaire pur $\iff z - \overline{z} = 0 \iff z$réel.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2x}}$.

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Réponse : **VRAI**

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{36e^{-2x}}{\left(4+6\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}$.

On a pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$, et que $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0$, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{4}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$, et que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Sur $\mathbb{R}$, f est continue strictement croissante et $f(x)$ décrit $\left]0\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[$. De plus $0,5 \in \left]0\ ;\ \dfrac{3}{4}\right[$.

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues strictement monotones sur un intervalle, on peut affirmer que l'équation $f(x) = 0,5$ n'a qu'une seule solution réelle.

On peut aussi résoudre dans $[0;1]$ l'équation $f(x) = 0$ et on trouve une solution unique $x = \dfrac{\ln 3}{2}$.

Affirmation 5 : L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur $0,54$.

Variables :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0 Y prend la valeur $\dfrac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $\mathrm{Y} < 0,5$ X prend la valeur $\mathrm{X} + 0,01$ Y prend la valeur $\dfrac{3}{4+6\mathrm{e}^{-2\mathrm{X}}}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

Réponse : **FAUX**

Si on demande à la calculatrice de donner les valeurs de $f(x)$ avec x qui varie à partir de 0 et avec un pas de 0,01, on constate que $f(0,54) \approx 0,4969 < 0,5$ mais $f(0,55) \approx 0,5002 > 0,5$.

On sort de la boucle dès que Y donc $f(x)$ est strictement plus grand que $0,5$.

Alors la valeur de sortie est $0,55$.

Correction : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

1. **Affirmation 1** Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production.

   Soit M la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme. M suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

   On a $p(\mathrm{M} \geqslant 187) = p(187 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200) + p(\mathrm{M} > 200) = p(187 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200) + 0,5$.

   À la calculatrice, on a $p(187 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200) > 0,4$ et par conséquent $p(\mathrm{M} \geqslant 187) > 0,9$.

   La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à 0,9.

   Affirmation 1 : VRAIE

2. **Affirmation 2**

   Considérons la fonction f définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \cos(x)$.

   f est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = 1 + \sin(x)$.

   Pour tout $x \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $1 + \sin(x) > 0$.

   On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Comme f est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, f est continue sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   On a de plus $f(0) = -1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

   On a $0 \in \left[-1\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   On applique à f le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle et on peut affirmer que l'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   Affirmation 2 : VRAIE

   Dans les questions 3. et 4., l'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = \quad 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = -5t' + 3 \\ y = \quad 2t' \\ z = \quad t' + 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. **Affirmation 3**

   Déterminons un vecteur directeur de chacune des ces deux droites.

   Soit $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}_\infty$ et Soit $\overrightarrow{u_2}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}_\in$

   On a $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires. Les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

On a : $\begin{cases} 1+2t=-5t'+3 \\ 2-3t=2t' \\ 4t=t'+4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t=-20t+20+3 \\ 2-3t=8t-8 \\ t'=4t-4 \end{cases} \begin{cases} t=1 \\ t=10/11 \\ 4t=t'+4 \end{cases}$

Le système n'a pas de solution. les droites ne sont pas sécantes.

Affirmation 3 : FAUSSE

4. **Affirmation 4**

Le plan P, d'équation $x+2y+z-3=0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

On a d'une part $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_1}=0$.

D'après la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_\infty$, le point A de coordonnées A$(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$ est un point de $\mathscr{D}_\infty$.

Ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de P.

On en déduit que $\mathscr{D}_\infty$ est parallèle à P

Affirmation 4 : VRAIE

Correction : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

1. **Proposition 1** : **VRAI**

   Soit $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{\sqrt{2}+7i}{1+5i} = \dfrac{1}{16}\left(\sqrt{2}+7i\right)(1-5i) = \dfrac{1}{16}\left((\sqrt{2}+35)+(7-5\sqrt{2})i\right)$

   $Z \notin \mathbb{R}$ donc $arg(Z) \neq 0(\pi)$ or $arg(Z) = arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)(2\pi)$

   On en déduit que $\left(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right) \neq 0(\pi)$ donc A , B et C ne sont pas alignés.

2. **Proposition 2** : **FAUX**

   $i(1+i) = -1+i = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

   on a alors $[i(1+i)]^{2n} = 2^n e^{3in\frac{\pi}{2}} = 2^n\left(e^{3i\frac{\pi}{2}}\right)^n = 2^n(-i)^n$

   Si n est un multiple de 4 alors $n = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

   et on a $[i(1+i)]^{2n} = 2^n(-i)^{4k} = 2^n\left((-i)^4\right)^k = 2^n \in \mathbb{R}^{+*}$ car $(-i)^4 = 1$

3. **Proposition 3** **FAUX**

   Il s'agit du trapèze $BLMD$

   $(BL) \in (BAE)$ et (BL) n'est pas parallèle à (AE) donc elles sont sécantes en P.

   $P \in (EAD)$ et $P \in (BL) \subset (BDL)$ donc $P \in (BDL)$

   $(DP) \subset (EAD)$ et (DP) n'est pas parallèle à (EH) donc elles sont sécantes en M

   Proposition 4 **FAUX**

   On se place dans le repère orthonormé $\left(B\ ;\ \overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BF}\right)$

   alors $B(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $D(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $L\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$

   on a donc $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BL} = \dfrac{2}{3} \neq 0$ donc BDL n'est pas rectangle en B

4. **Proposition 5** : **FAUX**

   Un contre-exemple : on prend la fonction affine par morceaux décroissante sur $[2\,;\,3]$ et croissante sur $[3\,;\,5]$ définie par :

   $f(2) = 3$; $f(2{,}001) = 0.001$; $f(3) = 0$;

   $f(3{,}999) = 0{,}001$; $f(4) = 1$; $f(4{,}999 = 1{,}001$ et $f(5) = 2$, on montre que lintégrale est légèrement supérieure à 1. Laffirmation est donc fausse.

Correction : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Affirmation 1

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(2\,;-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;-2\,;-2)$. Puisque $\dfrac{-2}{2} \neq \dfrac{-2}{-2}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles. Les points A,B et C ne sont donc pas alignés :

L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{AC}$:

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) :

L'affirmation 2 est vraie.

Affirmation 3

Première méthode :

• Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :

La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$ et $\overrightarrow{EF}(-1\,;-1\,;1)$ ne sont pas orthogonaux. Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{EF}$:

$\vec{n}.\overrightarrow{EF} = 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$

Puisque $\vec{n}.\overrightarrow{EF} \neq 0$, alors La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants

• Puisque le milieu I du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :

Le milieu I du segment $[\mathrm{BC}]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_\mathrm{B}+x_\mathrm{C}}{2}, \dfrac{y_\mathrm{B}+y_\mathrm{C}}{2}, \dfrac{z_\mathrm{B}+z_\mathrm{C}}{2}\right) = (1,0,1)$ Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI}$ ont pour coordonnées respectives $(-1\,;-1\,;1)$ et $(2\,;2\,;-2)$

Puisque $\overrightarrow{EI} = -2\overrightarrow{EF}$, les points E, I et F sont alignés : $\mathrm{I} \in (\mathrm{EF})$ On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] :

L'affirmation 3 est vraie.

Seconde méthode :

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par $\mathrm{E}(-1,-2,3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{EF}}(-1;-1;1)$.

Une représentation paramétrique de la droite (EF) est alors $\begin{cases} x & = -1-t \\ y & = -2-t \\ z = 3+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

• Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté $\mathscr{P}$:

Puisque $\vec{n}(0;1;-1)$ est normal au plan $\mathscr{P}$, ce dernier a une équation de la forme $y-z+d=0$ où $d \in \mathbb{R}$

Puisque $\mathrm{A}(1,2,3)$ est un point de $\mathscr{P}$, alors $y_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{A}}+d=0$, soit $d=-y_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{A}}=1$

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $y-z+1=0$

• Déterminons $(\mathrm{EF}) \cap \mathscr{P}$:

Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que $\begin{cases} x\mathrm{M} = -1-t \\ y\mathrm{M} = -2-t \\ z\mathrm{M} = 3\ +\ t \end{cases}$

M appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $y_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{M}}+1=0$, i.e : $-2-t-(3+t)+1=0$ soit $t=-2$

La droite (EF) et le plan $\mathscr{P}$ sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1-(-2),-2-(-2),3+(-2)) = (1,0,1)$

Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :

Le milieu du segment $[\mathrm{BC}]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{C}}}{2},\frac{y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{C}}}{2},\frac{z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}}{2}\right) = (1,0,1)$$

On en déduit que I est le milieu de [BC]

L'affirmation 3 est vraie.

Affirmation 4

Première méthode :

• Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ont pour coordonnées respectives $(2;-2;-2)$ et $(3;1;-2)$. N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ne sont pas colinéaires :

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

• Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

- Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}(1\,;-1\,;-4)$ et $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$ sont orthogonaux. Puisque $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -1+4 = 3 \neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

- Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

  Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD}(1\,;-1\,;-4)$ s'écrit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, autrement dit si et seulement si il existe deux nombres réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

  L'égalité ci-dessus est équivalente au système : $\begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = -2\alpha - 2\beta \\ 4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$

  Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires :

L'affirmation 4 est fausse.

Seconde méthode :

• Déterminons des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

La droite (AB) passe par A(1,2,3) et est dirigée par $\overrightarrow{AB}(2\,;-2\,;-2)$.

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

La droite (CD) passe par C(-1,0,1) et est dirigée par $\overrightarrow{CD}(3\,;1\,;-2)$.

Une représentation paramétrique de la droite (D) est donc : $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

• Déterminons $(AB) \cap (CD)$: Résolvons pour cela le système $\begin{cases} 2t+1 = -1+3t' \\ -2t+2 = t' \\ -2t+3 = t' \end{cases}$

Le système n'ayant pas de solution, on en déduit que les droites ne sont pas sécantes :

L'affirmation 4 est fausse.

Correction : Bac S – Antilles-Guyane – septembre 2016

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On a $z^2+2az+a^2+1=0 \iff (z+a)^2+1=0 \iff (z+a)^2-\mathrm{i}^2=0 \iff$
   $(z+a+\mathrm{i})(z+a-\mathrm{i})=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z+a & = & -\mathrm{i} \\ z+a & = & \mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & -a-\mathrm{i} \\ z & = & -a+\mathrm{i} \end{array}\right.$
   a est réel donc les deux solutions sont complexes conjuguées de même module.
2. $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ qui est l'écriture exponentielle de z.
   Le module de z est donc $2\cos\frac{\theta}{2}$ et un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.
3. On a pour tout réel x, $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\sin x+\mathrm{e}^{-x}\cos x=\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x)$.
   Donc $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$.
4. On a $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leqslant 30)=\int_0^{30} 0,02\mathrm{e}^{-0,02x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-0,02x}\right]_0^{30}=-\mathrm{e}^{-0,02\times 30}+1\approx 0,451\approx 0,45$.