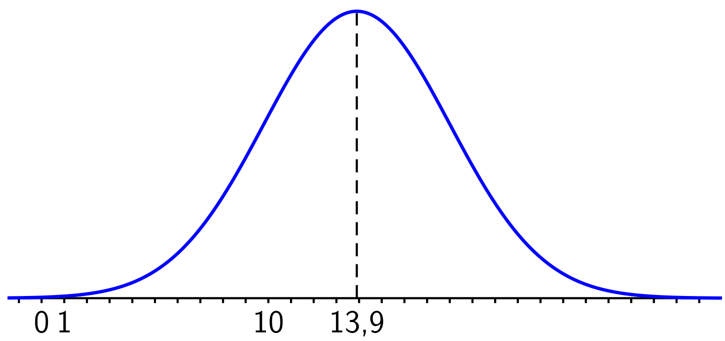
Annales 2016 - Probabilités

I Sujet : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.

   En exploitant cette information :

   (a) hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;

   (b) déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.

2. On choisit un jeune en France au hasard.

   Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.

   Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des uvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole $(\mathscr{P})$ suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.

Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

■ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
■ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
■ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

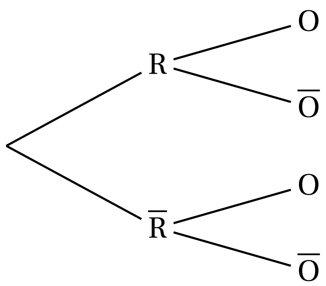
1. *Calculs de probabilités*

   On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole ($\mathscr{P}$).

   On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,

   O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

   Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



   En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

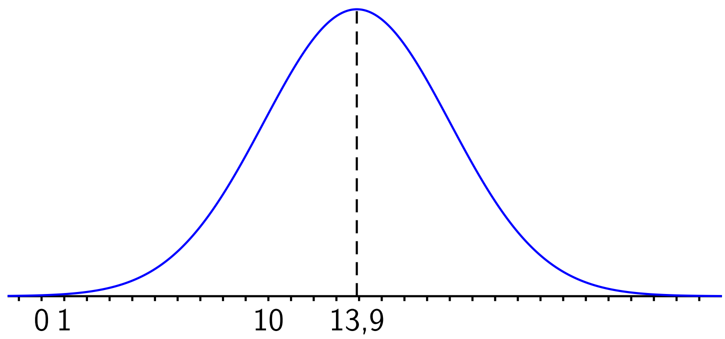
$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2. *Intervalle de confiance*

   (a) À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ($\mathscr{P}$). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

(b) Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?



II Sujet : Bac S – Liban – 31 mai 2016

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.
Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0{,}24$;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0{,}235$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

III Sujet : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.

   A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.

   Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.

   Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   (a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
   (b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

IV Sujet : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.
   (b) Quelle est la meilleure approximation de $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2. Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.
2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{F}}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

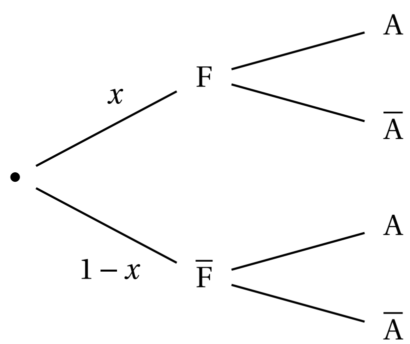
Ainsi, d'après les données, on a $p(\mathrm{A}) = 0,29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{A})$.

   On pose $x = \mathrm{P}(\mathrm{F})$.

2. (a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

   (b) En déduire une égalité vérifiée par x



3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

V Sujet : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.
2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.
3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.
2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits

d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.
L' astronome fait l'hypothèse que $50\,\%$ de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

VI Sujet : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »

B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »

S l'évènement « le composant est sans défaut »

1. Montrer que la probabilité de l'évènement S est $\mathrm{P(S)} = 0,89$.
2. Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de $0,92$.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.
2. Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de $0,02$?

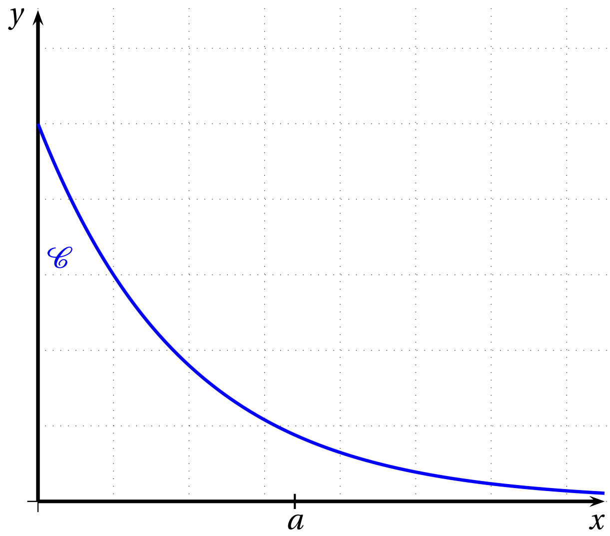
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

- pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $P(T \leqslant a) = \int_0^a f(x)\,dx$.

1. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



   (a) Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

   (b) Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

   (c) En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

   (a) On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.

   Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

   (b) On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.

   Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

   (c) Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.

   Interpréter ce résultat.

VII Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} *près.*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
   (c) L'ampoule tirée est sans défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.
   (b) Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a
   $$\mathrm{P}_{\mathrm{T}\geqslant t}(\mathrm{T} \geqslant t + a) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant a).$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
   (a) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5\,000)$.
   (c) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

VIII Sujet : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.

Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

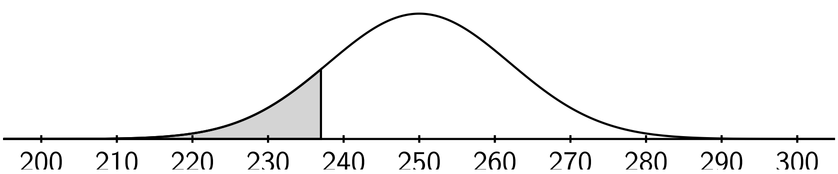
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.

La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».
2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

   (b) Démontrer que $P\left(Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

   (c) En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

   (a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250-n\ ;\ 250+n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

   (b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

IX Sujet : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

Variables : a, b, d, s sont des entiers
i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation : a prend la valeur 0
b prend la valeur 0
Saisir n
Traitement : Pour i allant de 1 à n faire
  d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
  entre 1 et 6
  Si $d \leqslant 2$
    alors a prend la valeur $1-a$
    sinon Si $d \leqslant 4$
      alors b prend la valeur $1-b$
    FinSi
  FinSi
  s prend la valeur $a+b$
FinPour
Sortie : Afficher s

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1^er passage boucle Pour					
2^e passage boucle Pour					
3^e passage boucle Pour					

(b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

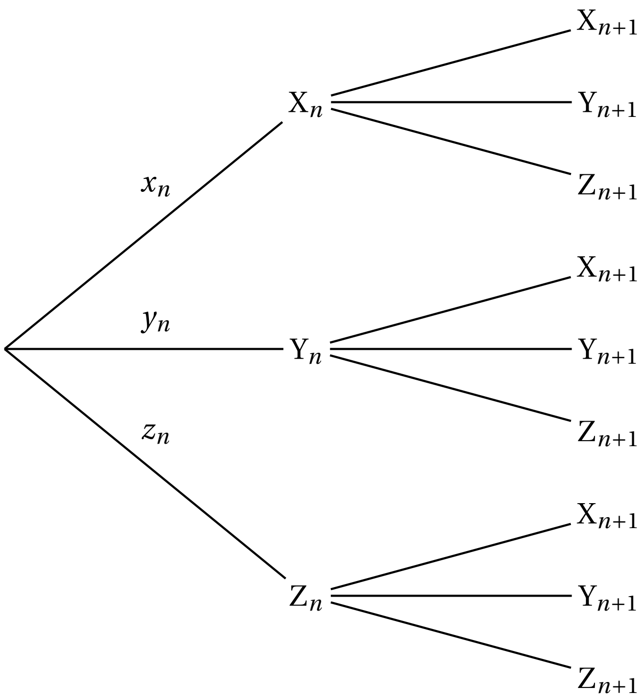
2. Pour tout entier naturel n, on note :
   - X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
   - Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
   - Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

   De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

   (a) Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

   (b) Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

   (c) Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



   (d) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

   (e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$.

   (f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

   Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

   (g) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

   Interpréter le résultat.

X Sujet : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

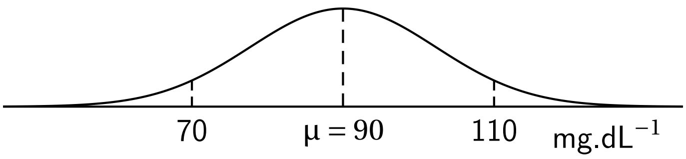
On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

   (b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0{,}052$.
On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.
2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

XI Sujet : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. (a) Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre
   $P(X \leqslant 125 - t)$ et $P(X \geqslant 125 + t)$.

   (b) On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer
   $P(121 \leqslant X \leqslant 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que
   $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

   (a) On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

   (b) On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est 0,988.

   On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

XII Sujet : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

Dans cet exercice, toutes les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ :

1. Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendre $\sigma = 2{,}4$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.
3. Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0,03$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2. Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.
3. (a) Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a :

   $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = P(T \geqslant h)$, c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

   (b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.

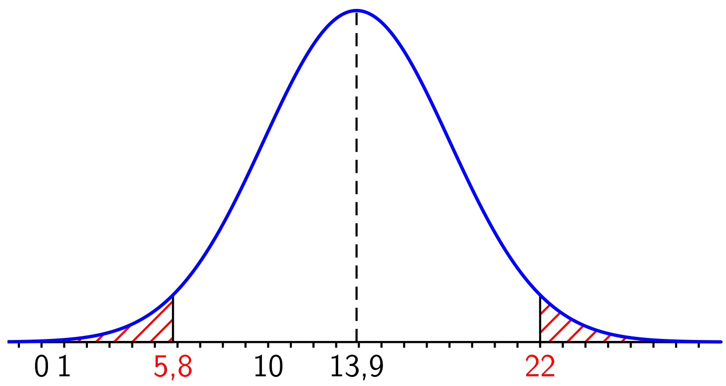
Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.
Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $\mathrm{P}(\mathrm{D} \geqslant 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.

Correction : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

Partie A



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.

   (a) Le premier domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 22$.

   L'autre domaine est le symétrique du premier par rapport à la droite d'équation $x = 13,9$; $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

   Le second domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 5,8$. Voir ci-dessus

   (b) $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 1 - (P(T > 22) + P(T < 5,8)) = 1 - 2 \times 0,023 = 1 - 0,046 = 0,954$

   D'après le cours, $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$, donc on a

   $P(13,9 - 2\sigma \leqslant T \leqslant 13,9 + 2\sigma) = 0,954$.

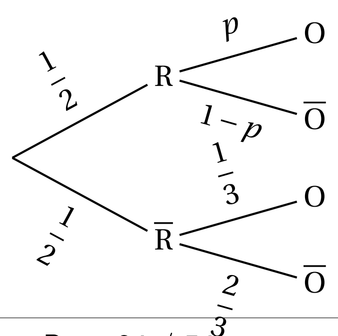
   On en déduit que σ vérifie $13,9 - 2\sigma = 5,8$ et $13,9 + 2\sigma = 22$, ce qui donne $\sigma \approx 4,05$, soit 4,1 au dixième.

2. On cherche la probabilité qu'un jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine, c'est-à-dire $P(T > 18)$.

   On trouve à la calculatrice, en prenant $m = 13,9$ et $\sigma = 4,1$: $P(T > 18) \approx 0,16$.

Partie B

1. *Calculs de probabilités*



D'après la loi des probabilités totales :
$p(\mathrm{O}) = p(\mathrm{R} \cap \mathrm{O}) + p\left(\overline{\mathrm{R}} \cap \mathrm{O}\right) = p(\mathrm{R}) \times p_{\mathrm{R}}(\mathrm{O}) + p(\overline{\mathrm{R}}) \times p_{\overline{\mathrm{R}}}(\mathrm{O}) = \dfrac{1}{2} \times p + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6}.$

Donc la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est : $q = \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

   (a) La fréquence de Oui est $f = \dfrac{625}{1500} = \dfrac{5}{12}$.
   L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage est donc
   $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}}\ ;\ \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}}\right] \approx [0,390\ ;\ 0,443]$.

   (b) Si le protocole est correct on a donc :
   $0,390 \leqslant \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6} \leqslant 0,443 \iff 2,340 \leqslant 3p + 1 \leqslant 2,658 \iff 1,340 \leqslant 3p \leqslant 1,658$
   $\iff \dfrac{1,340}{3} \leqslant p \leqslant \dfrac{1,658}{3}$ soit $0,446 \leqslant p \leqslant 0,553$
   Le nombre de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est entre 44,6 % et 55,3 %.

Correction : Bac S – Liban – 31 mai 2016

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
Soit X le nombre de balles envoyées à droite. Comme le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité p, on a $p = \dfrac{1}{2}$. Comme d'autre part les lancers sont indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculons la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite.

   C'est : $p(\mathrm{X} = 10) = \dbinom{20}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{10} = 0,176.$ $\boxed{p(\mathrm{X} = 10) \approx 0,176}$

2. Calculons la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite.

   C'est : $p(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10) = p(\mathrm{X} \leqslant 10) - p(\mathrm{X} \leqslant 4)$.

   À la calculatrice, on obtient : $\boxed{p(5 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 10) = 0,582}$.

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil.
Comme $n = 100$ et $p = 0,5$, on a : $n > 30$, $np = 50 > 5$ et $n(1-p) = 50 > 5$.
On appelle X_{100} la variable aléatoire donnant le nombre de balles lancées à droite. Avec les mêmes hypothèses qu'au A, X_{100} suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,5$.
On peut alors calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$\mathrm{I}_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \text{ donc } \mathrm{I}_{100} \approx [0,40 ; 0,60]$$

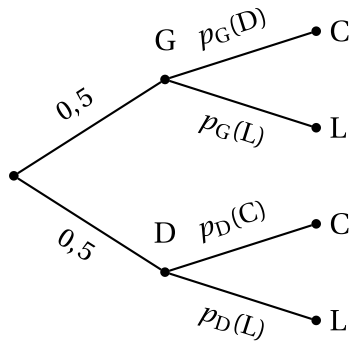
$0,42 \in \mathrm{I}_{100}$ donc l'hypothèse que l'appareil fonctionne correctement est acceptée, au risque de 5 %.

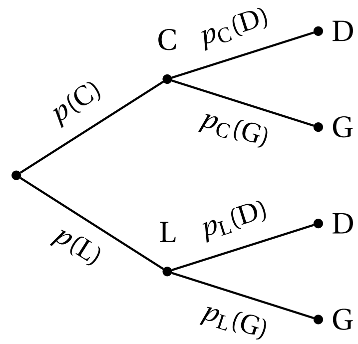
Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » (L) soit « coupées (C) ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$ donc $p(\mathrm{L}\cap\mathrm{D}) = 0,24$
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$donc $p(\mathrm{C}\cap\mathrm{G}) = 0,235$.

On peut construire deux arbres pondérés pour aider au raisonnement :





Si le lance-balle envoie une balle coupée, calculons la probabilité qu'elle soit envoyée à droite , c'est à dire $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D})$.

On a : $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = 1 - p_{\mathrm{D}}(\mathrm{L}) = 1 - \dfrac{p(\mathrm{D}\cap\mathrm{L})}{p(\mathrm{D})} = 1 - \dfrac{0,24}{0,5} = 1 - 0,48 = 0,52$.

On en déduit : $p(\mathrm{C}\cap\mathrm{D}) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\mathrm{C}) = 0,26$

Et : $p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{C}\cap\mathrm{D}) + p(\mathrm{C}\cap\mathrm{G}) = 0,26 + 0,235 = 0,495$.

Finalement : $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D}) = \dfrac{p(\mathrm{C}\cap\mathrm{D})}{p(\mathrm{C})} = \dfrac{0,26}{0,495} = 0,525$ à 10^{-3} près. $\boxed{p_{\mathrm{C}}(\mathrm{D}) = 0,525}$

Correction : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

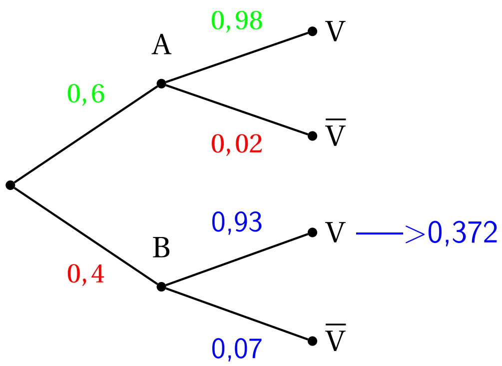
V : « la bille est vendable ».

1. On peut construire un arbre pour illustrer la situation :
   D'après l'énoncé on a $P(V) = 0,96$

   $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$

   Puis on complète une partie de l'arbre

   les données en bleu sont acquises après la question 2

   On cherche $P(A \cap V)$

   $P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,588$

2. A et B forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales

   donc on a $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) = 0,96$

   On en déduit que $P(B \cap V) = 0,96 - P(A \cap V) = 0,372$.

   Puis $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$.

   La probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est égale à 0,93.

3. On cherche $P_{\overline{V}}(B)$

   $P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0,028}{1 - 0,96} = 0,7$. Donc **le technicien a raison**

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. On cherche $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) \approx 0,93$.

   Cette valeur correspond bien à : $P_B(V)$

2. $YN(1;\sigma') \Longrightarrow \dfrac{Y-1}{\sigma'}N(0;1)$

   Soit $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ alors $0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1 \Longleftrightarrow -\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}$

   $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98?P\left(-\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98?P\left(Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99$

   d'après la calculatrice on trouve $\dfrac{0,1}{\sigma'} \approx 2,326$. On en déduit que $\sigma' \approx 0,043$

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

   (a) La probabilité qu'une bille tirée au hasard dans la production journalière est $p = \dfrac{1}{5} = 0,2$ car les 5 couleurs sont équiprobables.

   On répète 40 fois de manières indépendantes une expérience n'ayant que deux issues : bille noire ou non dont la probabilité du succès est $p = 0,2$.

   Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de billes noires dans le sac alors X sui la loi binomiale $XB(40;0,2)$

   On cherche $P(X = 10) = \dbinom{40}{10} \times 0,2^{10} \times 0,8^{30} \approx 0,107$

   (b) On cherche si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

   On se trouve bien dans les conditions d'application puisque $n = 40 \geqslant 30$

   $np = 8 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 32 \geqslant 5$

   L'intervalle de fluctuation asymptotique seuil de 95% est

   $I = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] =$

   $\left[0,2 - 1,96\dfrac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{40}}\ ;\ 0,2 + 1,96\dfrac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0,076\ ;\ 0,324]$

La fréquence observée de lancers à droite est $f = \dfrac{12}{40} = 0,3 \in \mathrm{I}$,

il n'y a donc pas de raison de douter du réglage de la machine qui teinte les billes.

2. Pour un sac contenant n billes, la probabilité qu'au moins une soit noire est

   $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,2^0 \times 0,8^n = 1 - 0,8^n$

   On doit donc résoudre $1 - 0,8^n \geqslant 0,99?0,8^n \leqslant 0,01 \leqslant n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01)?n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)}$

   or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$

   L'entreprise doit donc mettre au minimum 21 billes dans chaque sac pour atteindre l'objectif.

Correction : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
   (a) Pour chaque personne il n'y a que deux issues possibles : répondre/ne pas répondre.
   Si de plus on fait l'hypothèse que les choix des personnes sont indépendants, on peut affirmer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.
   (b) On a : $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 400) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 400) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 399)$.
   La calculatrice donne $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 399) \simeq 0,0573$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 400) \simeq 0,9427$.
   La meilleure valeur approchée parmi les solutions proposées est 0,94.
2. Déterminons combien de personnes l'institut doit interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.
   On peut déjà affirmer que $n \leqslant 700$.
   Une exploration à la calculatrice donne $n = 694$ car si Y désigne la variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p = 0,6$ on a pour $n = 694$: $p(\mathrm{Y} \geqslant 400) \geqslant 0,9$ et pour $n = 693$: $p(\mathrm{Y} \geqslant 400) < 0,9$.
   Il suffit donc d'interroger 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question ,et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale est de la forme :
   $\left[f_{obs} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ; f_{obs} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   Et ici avec $f_{obs} = 0,29$, on a $\left[0,29 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; 0,29 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

2. L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 % a pour amplitude $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \iff \sqrt{n} \geqslant \dfrac{2}{0,04} \iff n \geqslant 2500.$
   Il suffit d'interroger plus de 2 500 personnes pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance au niveau de 95 % soit inférieure à $0,04$.

Partie C : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

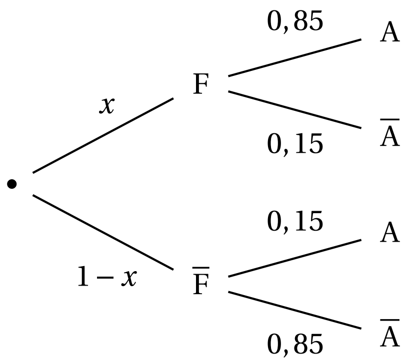
- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{F}}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{\mathrm{A}}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(\mathrm{A}) = 0,29$.

1. L'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
   On en déduit que $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_{\mathrm{F}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 0,15$.
   Et comme $\mathrm{P}_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}_{\mathrm{F}}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1$, on a : $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0,85$.
2. On pose $x = \mathrm{P}(\mathrm{F})$.
   (a) On a l'arbre de probabilité ci-dessous.



(b) D'après la formule des probabilités totales,

$P(A) = P(A \cap F) + P\left(A \cap \overline{F}\right)$.

Mais $P(A) = 0,29$, $P(A \cap F) = 0,85x$ et $P\left(A \cap \overline{F}\right) = 0,15(1-x)$.

On en déduit que x est solution de $0,29 = 0,85x + 0,15(1-x)$.

3. Déterminons, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Il suffit de résoudre $0,29 = 0,85x + 0,15(1-x)$. On trouve $x = \dfrac{14}{70} = 0,2$.

20 % des personnes ayant répondu au sondage sont favorables au projet.

Correction : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

Partie A

1. On cherche $P(X < 3)$.

   La fonction densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = 0,2e^{-0,2t}$$

   $P(X < 3) = \int_0^3 0,2e^{-0,2t}\,dt = \left[-e^{-0,2t}\right]_0^3 = 1 - e^{-0,6} \approx 0,451$

   Donc la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes est bien environ $0,451$

2. On cherche le plus petit réel T tel que $P(X < T) > 0,95$

   $P(X < T) > 0,95 \iff 1 - e^{-0,2T} > 0,95 \iff e^{-0,2T} < 0,05 \iff e^{0,2T} > 20 \iff 0,2T > \ln(20) \iff T > 5\ln(20)$

   or $5\ln(20) \approx 14,98$. Donc **le temps minimum à attendre est de 15 minutes**.

3. On sait que l'espérance de la variable aléatoire T est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5$ (min).

   Donc en deux heures on peut espérer voir en moyenne $\dfrac{120}{5} = 24$ étoiles filantes.

   On peut espérer en moyenne voir 24 étoiles filantes pendant ces deux heures.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

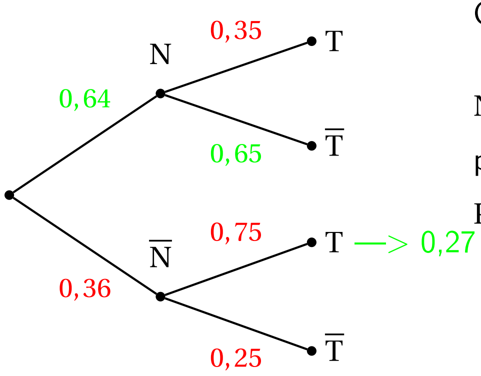
- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On considère les événements :

   - N : « l'adhérent interrogé est un nouvel adhérent »
   - T : « l'adhérent interrogé possède un télescope »

   on peut alors illustrer la situation par un arbre pondéré :

   les données de l'exercice sont en vert et celles déduites sont en rouge



On cherche $P(T)$

N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}P(T) &= P(N\cap T) + P\left(N\cap \overline{T}\right)\\ &= P(N)\times P_N(T) + 0,27\\ &= 0,64\times 0,35 + 0,27\\ &= 0,494\end{aligned}$$

2. On cherche $P_T(N)$

$$P_T(N) = \frac{P(T\cap N}{P(T)} = \frac{0,224}{0,494} \approx 0,453$$

Partie C

On ne connaît pas la proportion p d'habitants du village qui sont favorables à la coupure mais on fait une hypothèse sur sa valeur. Pour valider cette hypothèse on utilise donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%

La taille de l'échantillon est $n = 100 \geqslant 30$ et la probabilité supposée p vérifie $np = 50 \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$ on peut donc appliquer l'intervalle de fluctuation

$\mathrm{I}_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ soit ici $\mathrm{I}_n = [0,402 \ ; \ 0,598]$

or la fréquence observée est $f = \dfrac{54}{100} = 0,54 \in \mathrm{I}_n$

Le résultat conforte donc l'astronome.

Correction : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Partie A

1. Utilisons un arbre pondéré :
   Les hypothèses s'écrivent :

   $\mathrm{P}(A) = 0,4 \quad \mathrm{P}_A(\overline{S}) = 0,2 \quad \mathrm{P}_B(\overline{S}) = 0,05.$

   On en déduit :

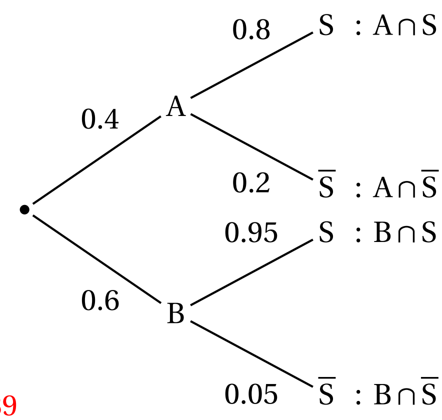
   $\mathrm{P}(B) = 1 - \mathrm{P}(A) = 0,6$

   $\mathrm{P}_A(S) = 1 - \mathrm{P}_A(\overline{S}) = 1 - 0,2 = 0,8$

   $\mathrm{P}_B(S) = 1 - \mathrm{P}_B(\overline{S}) = 1 - 0,05 = 0,95$

   On a ensuite :

   $\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(A \cap S) + \mathrm{P}(B \cap S) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,89$



2. Calculons $\mathrm{P}_S(A)$:

$$\mathrm{P}_S(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap S)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89}$$

Une valeur approchée, à 10^{-2} près, de la probabilité cherchée est $0,36$.

Partie B

1. Notons f la fréquence observée de composants sans défaut .

   On a $f = 0,92 \geq 30$; $n \times f = 400 \times 0,92 = 368 \geq 5$ et $n(1-f) = 400 \times 0,08 = 32 \geq 5$

   Les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance sont réunies.

   Un intervalle de confiance de la proportion p, au niveau de confiance $0,95$ est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,87 ; 0,97]$$

2. Pour un échantillon de taille n, l'intervalle de confiance est

$$\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

   dont l'amplitude est

$$\frac{2}{\sqrt{n}}$$

   L'amplitude est au maximum égale à $0,02$ si et seulement si $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02$ (1)

$$\begin{aligned}(1) \quad &\iff 2 \leqslant 0,02\sqrt{n} \\ &\iff \sqrt{n} \geqslant 100 \\ &\iff n \geqslant 10\,000 \text{ car la fonction racine carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon est $10\,000$

Partie C

1. (a) $P(T \leqslant a)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$

   (b) Soit $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}P(T \leqslant t) &= \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t \\ &= \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right) \\ &= \left(-e^{-\lambda t}\right) - (-1) \\ &= 1 - e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

   (c) De $\lim\limits_{t \to +\infty} -\lambda t \overset{\lambda>0}{=} -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ on déduit, par composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = 0$.
   On a ensuite, par somme : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1 - e^{-\lambda t}) = 1 - 0 = 1$:

$$\lim_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$$

2. L'hypothèse s'écrit : $1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \quad (1)$

$$\begin{aligned}(1) \quad &\iff \quad e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\iff \quad -7\lambda = \ln\frac{1}{2} \\ &\iff \quad -7\lambda = -\ln 2 \\ &\iff \quad \lambda = \frac{\ln 2}{7}\end{aligned}$$

Une valeur approchée de λ, à 10^{-3} près, est $0,099$

3. (a) La question est de déterminer $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 5)$.

   Puisque $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant 5) = 1 - e^{-0,099\times 5}$, alors

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 5) = \mathrm{P}(\mathrm{T} > 5) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant 5) = 1 - (1 - e^{-0,099\times 5}) = e^{-5\times 0,099} = e^{-0,495}$$

   La probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans est environ $0,61$

   (b) Il s'agit de calculer

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geqslant 2)}(\mathrm{T} \geqslant 7)$$

   La loi exponentielle étant une loi de durée de vie sans vieillissement, on a

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geqslant 2)}(\mathrm{T} \geqslant 7) = \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 5)$$

   La probabilité cherchée est environ $0,61$

   (c) $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \dfrac{1}{\lambda}$:

   Une valeur approchée de l'espérance de T est environ 10,10 : la durée de vie moyenne d'un composant est d'environ 10 ans

Correction : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} *près.*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

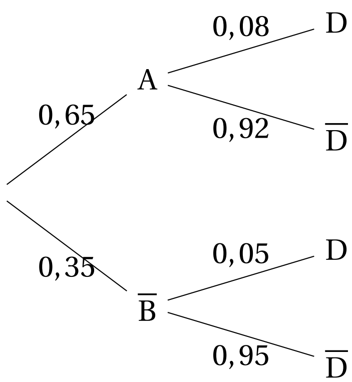
- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

   (a) Arbre pondéré représentant la situation :



   (b) On utilise la formule des probabilités totales :
   $p\left(\overline{\mathrm{D}}\right) = p_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{D}}\right) \times p(\mathrm{A}) + p_{\mathrm{B}}\left(\overline{\mathrm{D}}\right) \times p(\mathrm{B}) = 0,92 \times 0,65 + 0,95 \times 0,35 =$
   $0,598 + 0,3325 = \boxed{0,9305}$.

   (c) $p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{A}) = \dfrac{p\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{D}}\right)}{p\left(\overline{\mathrm{D}}\right)} = \dfrac{0,598}{0,9305} \approx \boxed{0,6427}$.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

   Notons N le nombre d'ampoules sans défaut. On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues ; N suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,92)$.

On sait que $p(\mathrm{X}=k)=\binom{10}{k}0{,}92^{k}\times(1-0{,}92)^{10-k}$.

$p(\mathrm{N}\geqslant 9)=1-p(\mathrm{N}\leqslant 8)\approx\boxed{0{,}8121}$ (calculé à la calculatrice)

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $\mathrm{P}(\mathrm{T}\leqslant a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.

   (a) $\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant a)=1-\mathrm{P}(\mathrm{T}<a)=1-\int_0^a \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=1-\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^a=1-\left(-\mathrm{e}^{-\lambda a}-(-1)\right)=\boxed{\mathrm{e}^{-\lambda a}}$.

   (b) $\mathrm{P}_{\mathrm{T}\geqslant t}(\mathrm{T}\geqslant t+a)=\dfrac{p([\mathrm{T}\geqslant t]\cap(\mathrm{T}\geqslant t+a))}{\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant t)}=\dfrac{p[\mathrm{T}\geqslant t+a]}{\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant t)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+a)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda a}=\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant a)}$ (loi de durée de vie sans vieillissement).

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

   (a) On sait que pour une loi exponentielle, l'espérance E(T) est $\mathrm{E}(\mathrm{T})=\dfrac{1}{\lambda}$.

   On a donc $\dfrac{1}{\lambda}=1000$ d'oÃź $\boxed{\lambda=0{,}0001}$.

   (b) $\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant 5000)=\mathrm{e}^{-0{,}0001\times 5000}=\mathrm{e}^{-0{,}5}\approx\boxed{0{,}6065}$

   (c) $\mathrm{P}_{(\mathrm{T}\geqslant 7000)}(\mathrm{T}\geqslant 12000)=\mathrm{P}(\mathrm{T}\geqslant 5000)\approx 0{,}6065$ (d'après 1. b.)

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. On a $p=0,06$, $n=1000$.

   (a) $n\geqslant 30$

   (b) $np=60\geqslant 5$

   (c) $n(1-p)=9400\geqslant 5$

   Les conditions sont réunies pour qu'on puisse calculer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

   $\mathrm{I}_{95}=\left[p-\dfrac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\dfrac{1,96\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\approx[0,0452\ ;\ 0,0748]$.

2. La fréquence observée d'ampoules défectueuses est $f=\dfrac{0,71}{1000}=0,071$.

   $f\in\mathrm{I}_{95}$. Au risque d'erreur de 5 %, on il n'y a pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

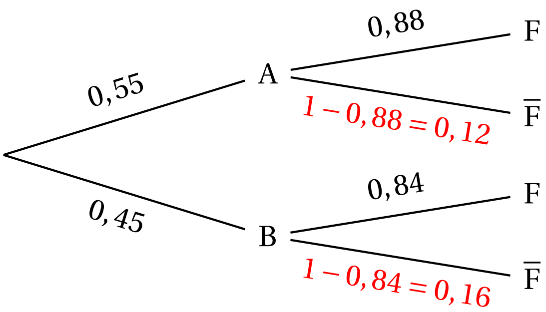
Correction : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Partie A : production de fraises

On appelle :

- A l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre A » ;
- B l'évènement « la fleur de fraisier vient de la serre B » ;
- F l'évènement « la fleur de fraisier donne une fraise » ;
- $\overline{F}$ l'évènement contraire de F.

On résume les données du texte dans un arbre pondéré :



Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

D'après les notations, on cherche la probabilité de l'évènement F ; d'après la formule des probabilités totales :

$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,862$

La proposition 1 est vraie.

Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne une fleur.

La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise :

$P_F(A) = \dfrac{P(A \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,55 \times 0,88}{0,862} \approx 0,561 \neq 0,439$

La proposition 2 est fausse.

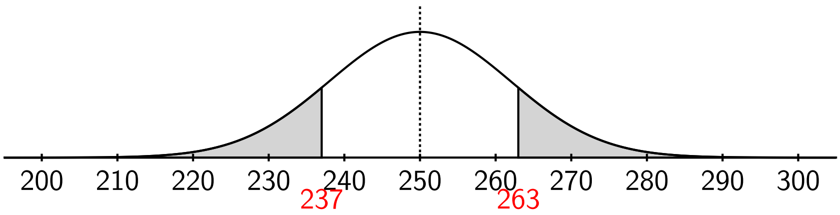
Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$.

   On complète le graphique donné dans l'énoncé.

   On constate que $237 = 250 - 13 = \mu - 13$ et $263 = 250 + 13 = \mu + 13$.



Pour des raisons de symétrie de la fonction de densité autour de la droite d'équation $x = \mu$, on a :

$P(X \leq 237) = P(X \geq 263)$ (parties grisées sur la figure).

$P(237 < X < 263) = 1 - (P(X \leq 237) + P(X \geq 263)) = 1 - 2 \times P(X \leq 237) = 1 - 2 \times 0,14 = 0,72.$

La probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes » est 0,72.

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

   (a) D'après le cours, la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (la loi normale centrée réduite).

   (b) On sait que σ est un nombre strictement positif ; donc :

   $X \leq 237 \iff X - 250 \leq 237 - 250 \iff \dfrac{X - 250}{\sigma} \leq -\dfrac{13}{\sigma} \iff Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}$

   Comme $P(X \leq 237) = 0,14$, on en déduit que $P\left(Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

   (c) Pour Y suivant la loi normale centrée réduite, on cherche β tel que $P(Y \leq \beta) = 0,14$; la calculatrice donne pour résultat environ $-1,08$. On a donc : $-1,08 = -\dfrac{13}{\sigma}$ et donc : $\sigma \approx 12$.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

   (a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n ; 250 + n]$.

   D'après le cours, pour toute loi normale, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$; donc

   $P(250 - 2 \times 12 \leq X \leq 250 + 2 \times 12) \approx 0,95$ ou encore $P(250 - 24 \leq X \leq 250 + 24) \approx 0,95$.

   Si $n' > n$, alors $[250 - n ; 250 + n] \subset [250 - n' ; 250 + n']$ et donc

   $P(X \in [250 - n ; 250 + n]) < P(X \in [250 - n' ; 250 + n'])$.

   Donc $n = 24$ est le plus petit entier tel que $P(250 - n \leq X \leq 250 + n)$.

   (b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme,se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$.

   Cherchons m pour que $P(230 \leq X \leq m)$ soit égal à 0,95.

   D'après le cours, on sait que $P(230 \leq X \leq m) = P(X \leq m) - P(X < 230)$.

   En utilisant la calculatrice, on trouve que $P(X < 230) \approx 0,0478$.

   $P(230 \leq X \leq m) = 0,95 \iff P(X \leq m) - P(X < 230) = 0,95 \iff P(X \leq m) = P(X < 230) + 0,95 \iff P(X \leq m) \approx 0,0478 + 0,95 \iff P(X \leq m) \approx 0,9978$

À la calculatrice, si X suit la loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 12, le nombre m tel que $P(X \leq m) \approx 0,9978$ vaut environ 284,2.

Donc la plus petite valeur de m pour laquelle la probabilité que la masse de la barquette se trouve dans l'intervalle $[230 ; m]$ soit supérieure ou égale à 0,95 est $m = 285$.

Correction : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :        a, b, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                   | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                   | Si d ⩽ 2
                   |     | alors a prend la valeur 1 − a
                   |     | sinon Si d ⩽ 4
                   |     |         | alors b prend la valeur 1 − b
                   |     |       FinSi
                   | FinSi
                   | s prend la valeur a + b
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.

variables	i	d	a	b	s
initialisation			**0**	**0**	
1^{er} passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2^e passage boucle Pour	**2**	**6**	**1**	**0**	**1**
3^e passage boucle Pour	**3**	**4**	**1**	**1**	**2**

(b) Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

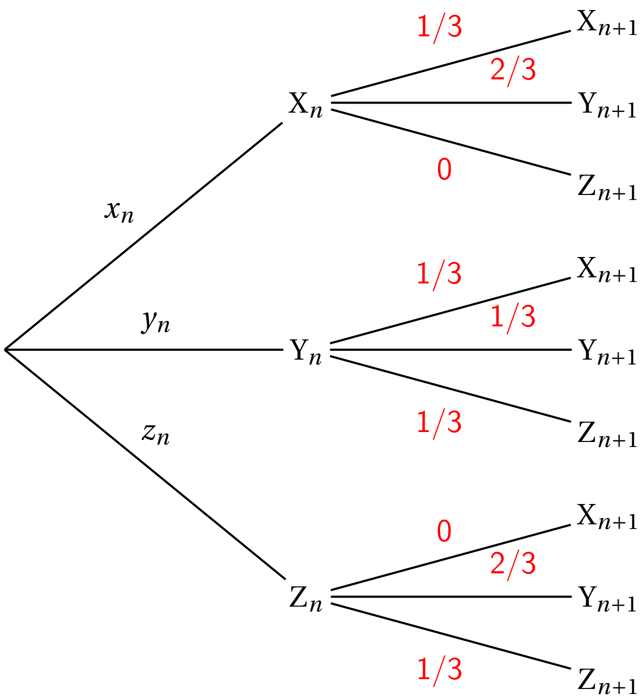
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

(a) Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

(b) X_{n+1} est l'événement « À l'issue de $n+1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » ; on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de n lancers elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n+1$-ième lancer, c'est-à-dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6 ; la probabilité de l'événement $\{5\ ;\ 6\}$ est $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

(c) On complète l'arbre proposé :



(d) Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) D'après la formule des probabilités totales :

$$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$
$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$$

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n$

$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(g) La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

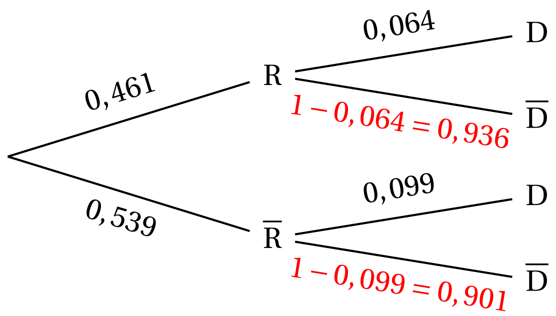
Donc à long terme, la probabilité d'avoir une piède côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.

Correction : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. On traduit cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité :



2. (a) La probabilité que la personne interrogée soit diabétique est $P(D)$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $$P(D)=P(R\cap D)+P\left(\overline{R}\cap D\right)=P(R)\times P_R(D)+P\left(\overline{R}\right)\times P_{\overline{R}}(D)$$
   $$=0,461\times 0,064+0,539\times 0,099=0{,}029\,304+0{,}053\,361=0{,}082\,865$$
   $$\approx 0,083$$

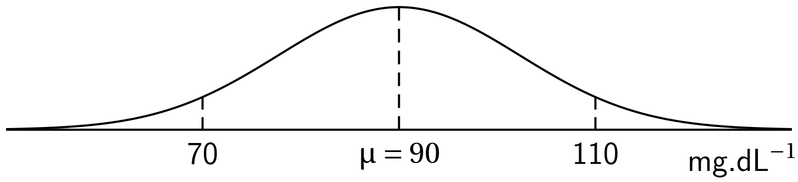
   (b) La personne choisie est diabétique. La probabilité qu'elle habite en zone rurale est $P_D(R)$:
   $$P_D(R)=\frac{P(D\cap R)}{P(D)}=\frac{0{,}029\,504}{0{,}082\,865}\approx 0,356$$

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



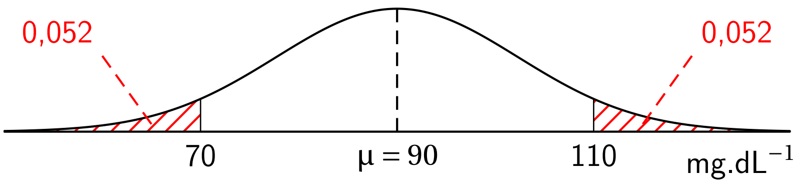
1. La glycémie « normale » est entre 70 et 110 mg.dL^{-1} ; la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » est donc $P(70 \leq X \leq 110)$.

   La probabilité qu'un adulte soit en hyperglycémie est 0,052 donc $P(X > 110) = 0,052$.

   D'après la courbe donnée dans le texte, la moyenne μ est de 90 donc, pour des raisons de symétrie, comme $70 = 90 - 20$ et que $110 = 90 + 20$, $P(X < 70) = P(X > 110)$ et donc, $P(X < 70) = P(X > 110) = 0,052$.

   $P(70 \leq X \leq 110) = 1 - P(X < 70) - P(X > 110) = 1 - 2 \times 0,052 = 0,896$

   La probabilité qu'un adulte ait une glycémie « normale » est 0,896.



2. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type σ.

   D'après le cours, on peut dire que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 90}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

   On a vu que $P(X < 70) = 0,052$.

   Comme $\sigma > 0$, $X < 70 \iff X - 90 < -20 \iff \dfrac{X-90}{\sigma} < -\dfrac{20}{\sigma} \iff Z < -\dfrac{20}{\sigma}$

   $P(X < 70) = 0,052 \iff P\left(Z < -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,052.$

   On sait que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite ; si $P(Z < \beta) = 0,052$, on trouve à la calculatrice $\beta \approx -1,626$.

   On a donc $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -1,626$ ce qui donne $\sigma \approx \dfrac{20}{1,626}$ soit $\sigma \approx 12,3$.

   La valeur de σ arrondie au dixième est 12,3.

3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$.

   La probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie est $P(X < 60)$.

   À la calculatrice, pour la variable aléatoire X qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 90$ et $\sigma = 12$, on trouve $P(X < 60) \approx 0,006$.

   La probabilité, arrondie au millième, que la personne choisie soit en hypoglycémie est 0,006.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.
Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % d'une fréquence f dans un échantillon de taille n est :
$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
La fréquence de personnes diagnostiquées diabétiques dans l'échantillon proposé de taille $n=10000$ est $f=\frac{716}{10000}=0{,}0716$.
On obtient l'intervalle $\left[0,0716-\frac{1}{\sqrt{10000}}\ ;\ 0,0716+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=[0{,}0616\ ;\ 0{,}0816]$.
On peut donc dire que la probabilité que l'intervalle $[0{,}0616\ ;\ 0{,}0816]$ contienne la proportion d'adultes diabétiques dans la population totale est supérieure à 0,95.
2. L'amplitude de l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
Pour que cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,01, il faut trouver n pour que $\frac{2}{\sqrt{n}}\leq 0{,}01$ ce qui équivaut à $200\leq\sqrt{n}$ ou encore $n\geq 40000$.
Il faut donc avoir un échantillon de taille supérieure ou égale à 40 000 pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude inférieure ou égale à 0,01.

Correction : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaaône des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.
Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. (a) La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ c'est-à-dire $x = 125$.
   On a donc, pour tout réel t positif, $P(X \leqslant 125 - t) = P(X \geqslant 125 + t)$.

   (b) On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture, donc $P(X < 121) = 0,023$.

   $$\begin{aligned} P(121 \leqslant X \leqslant 129) &= P\left(\overline{(X < 121) \cup (X > 129)}\right) \\ &= 1 - P(X < 121) - P(X > 129) \\ &= 1 - P(X \leqslant 121) - P(X \geqslant 129) \end{aligned}$$

   les évènements $(X \leqslant 121)$ et $(X \geqslant 129)$ étant incompatibles.

   D'après la question précédente, $P(X \leqslant 121) = P(X \leqslant 125 - 4) = P(X \geqslant 125 + 4) = P(X \geqslant 129)$; on en déduit : $P(121 \leqslant X \leqslant 129) = 1 - 2P(X \leqslant 125 - 4) = 1 - 2P(X \leqslant 121) = 1 - 0,046 = 0,954$.

2. On cherche une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.
   On se ramène à la loi normale centrée réduite de X en posant $Z = \dfrac{X - 125}{\sigma}$.
   $123 \leqslant X \leqslant 127 \iff 123 - 125 \leqslant X - 125 \leqslant 127 - 125 \iff \dfrac{-2}{\sigma} \leqslant \dfrac{X - 125}{\sigma} \leqslant \dfrac{2}{\sigma}$
   On a alors : $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68 \iff P\left(-\dfrac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,68$.
   à la calculatrice, on trouve l'intervalle centré en 0 correspondant soit $\dfrac{2}{\sigma} \approx 0,994$. à l'unité près, on prendra donc $\sigma \approx \dfrac{2}{0,994} \approx 2$ (ce qui est la valeur de σ supposée juste après dans l'énoncé !).

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

   (a) À la calculatrice, la probabilité qu'un pot soit conforme correspond à $P(120 \leqslant X \leqslant 130) \approx 0,9876$.

   (b) La probabilité qu'un pot ne soit pas conforme parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes correspond à

   $$\begin{aligned} P_{(X \leqslant 130)}\left(\overline{120 \leqslant X \leqslant 130}\right) &= \frac{P\left(\overline{(120 \leqslant X \leqslant 130)} \cap (X \leqslant 130)\right)}{P(X \leqslant 130)} \\ &= \frac{P(X \leqslant 120)}{P(X \leqslant 130)} \approx \frac{0,00621}{0,992379} \\ &\approx 6,1 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

4. Comme $900 \geqslant 30$, $900 \times 0,988 \geqslant 5$ et $900 \times (1-0,988) \geqslant 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et un intervalle de fluctuation au seuil de $95\,\%$ est :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{95\%} &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0,988 - 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}}\,;\, 0,988 + 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}}\right] \\ &\approx [0,980\,;\,0,996]\,. \end{aligned}$$

Comme $f_{\text{obs}} = \dfrac{871}{900} \approx 0,968 \notin \mathrm{I}_{95\%}$, on rejette l'hypothèse « La machine est bien réglée » au seuil des 95%.

Correction : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A : Étude des pannes du module mécanique

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

1. Le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}7977$ ce qui veut dire que $P(D < 48) = 1 - 0{,}7977 = 0{,}2023$.
   $D < 48 \iff D - 50 < -2 \iff \dfrac{D-50}{\sigma} < -\dfrac{2}{\sigma}$
   D'après le cours, si D suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{D-\mu}{\sigma}$ suit la loi nromale centrée réduite.
   On cherche donc le réel β tel que $P(Z < \beta) = 0{,}2023$ sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.
   À la calculatrice, on trouve $\beta \approx -0{,}8334340$ donc $\sigma \approx -\dfrac{2}{-0{,}8334340} \approx 2{,}3997$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2. La probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois est $P(45 \leq D \leq 52)$.
   On trouve à la calculatrice 0,7791 comme valeur arrondie à 10^{-4} de la probabilité cherchée.
3. La probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est $P_{(D\geq 48)}(D \geq 48+6)$:
   $P_{(D\geq 48)}(D \geq 54) = \dfrac{P\left((D\geq 54)\cap(D\geq 48)\right)}{P(D \geq 48)}$
   $P\left((D\geq 54)\cap(D\geq 48)\right) = P(D\geq 54) \approx 0{,}04779$ et $P(D \geq 48) \approx 0{,}79767$
   $P_{(D\geq 48)}(D \geq 54) \approx \dfrac{0{,}04779}{0{,}79767} \approx 0{,}0599$
   La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois est 0,0599.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tous réels a et b strictement positifs : $P(a \leq T \leq b) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda t} t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

1. Le service statistique indique que $\mathrm{P}(0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 24) = 0,03$ donc λ vérifie l'égalité $\displaystyle\int_0^{24} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 0,03$ ou encore $1 - e^{-24\lambda} = 0,03$. On résout cette équation d'inconnue λ :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-24\lambda} = 0,03 &\Longleftrightarrow 0,97 = e^{-24\lambda} \\ &\Longleftrightarrow \ln(0,97) = -24\lambda \\ &\Longleftrightarrow -\frac{\ln(0,97)}{24} = \lambda \end{aligned}$$

La valeur de λ telle que $\mathrm{P}(0 \leqslant \mathrm{T} \leqslant 24) = 0,03$ est $\lambda = -\dfrac{\ln(0,97)}{24}$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\boldsymbol{\lambda = 0,00127}$.

2. $\mathrm{P}(24 \leq \mathrm{T} \leq 48) = e^{-24\lambda} - e^{-48\lambda} \approx 0,0291$

   La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois est 0,0291.

3. (a)
   - $\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq b) = 1 - e^{-b\lambda} \Longrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq b) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \leq b) = 1 - \left(1 - e^{-b\lambda}\right) = e^{-b\lambda}$
   - $h > 0 \Longrightarrow (\mathrm{T} \geqslant t + h) \cap (\mathrm{T} \geqslant t) = (\mathrm{T} \geqslant t + h)$

   $$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathrm{T}\geqslant t}(\mathrm{T} \geqslant t+h) &= \frac{\mathrm{P}\left((\mathrm{T} \geqslant t+h) \cap (\mathrm{T} \geqslant t)\right)}{\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant t)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant t+h)}{\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant t)} = \frac{e^{-(t+h)\lambda}}{e^{-t\lambda}} = \frac{e^{-t\lambda} \times e^{-h\lambda}}{e^{-t\lambda}} = e^{-h\lambda} \\ &= \mathrm{P}(\mathrm{T} \geq h) \end{aligned}$$

   Donc la variable aléatoire T est sans vieillissement.

   (b) Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois. La probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants est $\mathrm{P}_{\mathrm{T}\geq 36}(\mathrm{T} \geq 36 + 12)$ qui est égal à $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 12)$ d'après la question précédente.

   $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geq 12) = e^{-12\lambda} \approx 0,9849$

   La valeur approchée à 10^{-4} de la probabilité que le module électronique fonctionne encore 12 mois, sachant qu'il a déjà fonctionné 36 mois, est égale à 0,9849.

Partie C : Pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les évènements $(\mathrm{D} \geqslant 48)$ et $(\mathrm{T} \geqslant 48)$ sont indépendants donc

$$\mathrm{P}\left((\mathrm{D} \geqslant 48) \cap (\mathrm{T} \geqslant 48)\right) = \mathrm{P}(\mathrm{D} \geqslant 48) \times \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 48).$$

La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois est

$$\mathrm{P}\left((\mathrm{D} \geqslant 48) \cap (\mathrm{T} \geqslant 48)\right) = \mathrm{P}(\mathrm{D} \geqslant 48) \times \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant 48) = 0,7977 \times e^{-48\lambda} \approx 0,7505$$

Partie D : Cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

$\mathrm{P}(\mathrm{D} \geqslant 48) = 0,7977$ donc $p = 0,7977$

$n = 300 \geq 30$; $np = 239,31 \geq 5$ et $n(1-p) = 60,69 \geq 5$ donc on peut déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[0,7977 - 1,96\frac{\sqrt{0,7977(1-0,7977)}}{\sqrt{300}}\ ;\ 0,7977 + 1,96\frac{\sqrt{0,7977(1-0,7977)}}{\sqrt{300}}\right] \\
&\approx [0,7522\ ;\ 0,8432]
\end{aligned}$$

La fréquence de climatiseurs ayant encore leur module mécanique en fonctionnement après 4 ans (ou 48 mois) est $f = \dfrac{246}{300} = 0,82$.

Or $f \in \mathrm{I}$ donc il n'y a pas lieu de remettre en cause le résultat donné par le service statistique.