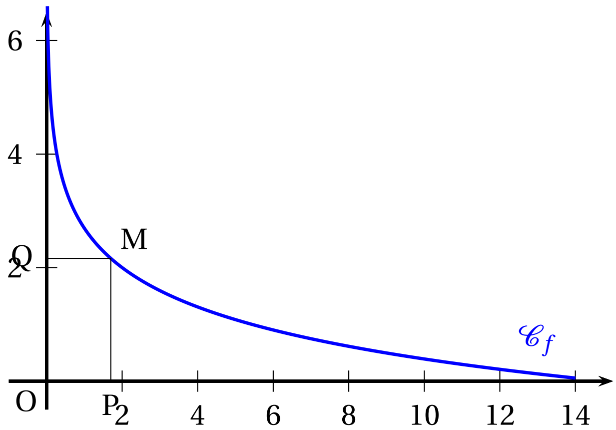
Annales 2016 - Fonctions

I Sujet : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

II Sujet : Bac S – Liban – 31 mai 2016

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

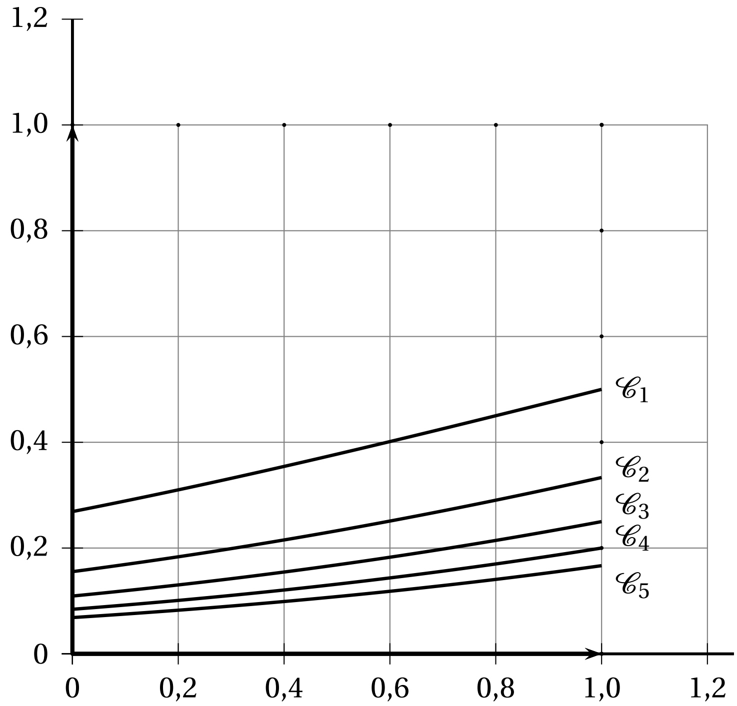
1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0.
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

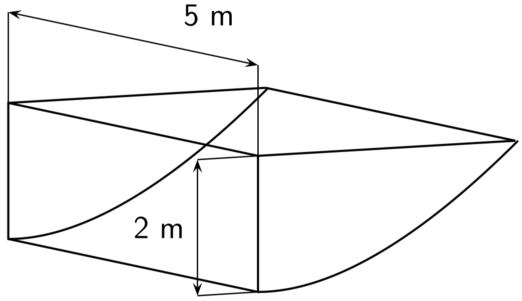


III Sujet : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



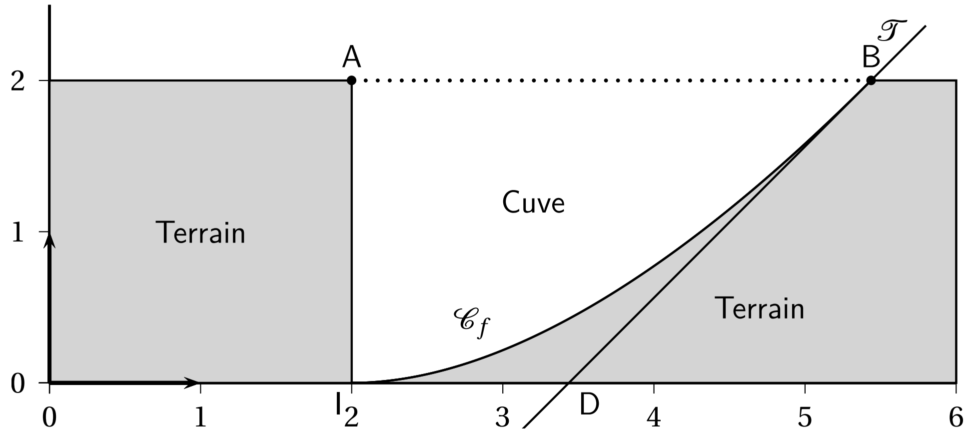
Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2\text{e}]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unité 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points A(2 ; 2), I(2 ; 0) et B(2e ; 2).



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.
2. On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.
   (a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.
   (b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2\text{e}$.

S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.

Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3. (a) Montrer que, sur l'intervalle [2 ; 2e], la fonction G définie par

$$\mathrm{G}(x)=\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x)=x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

(b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 2e].

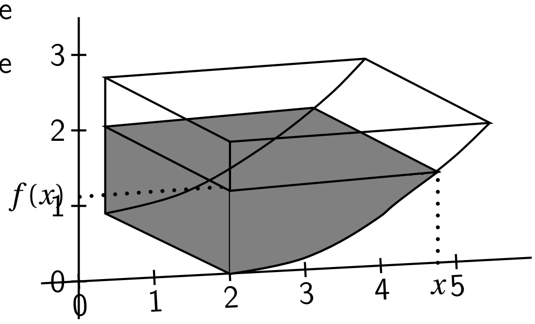
(c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et 2e, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 2e],

$$v(x)=5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)-2x\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x^2}{4}+2x-3\right].$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

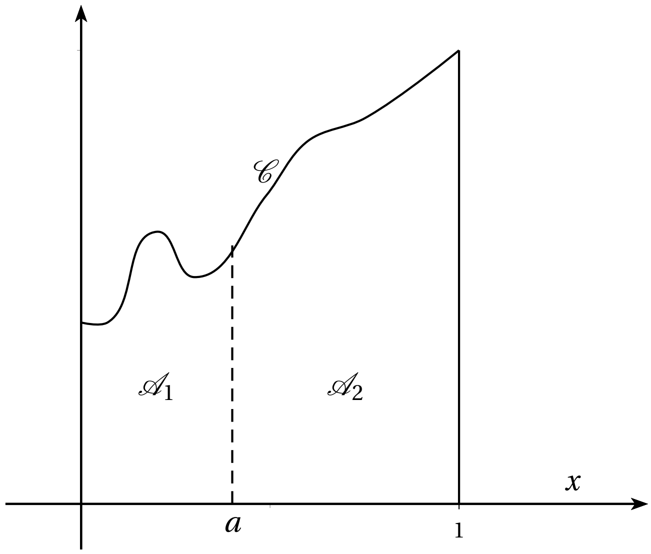
Variables :	a est un réel
	b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur 2 e
	Tant que $v(b)-v(a)>10^{-3}$ faire :
	c prend la valeur $(a+b)/2$
	Si $v(c)<\mathrm{V}/2$, alors :
	a prend la valeur c
	Sinon
	b prend la valeur c
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$

IV Sujet : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0~;~1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.

On note :

- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
   (a) f est une fonction constante strictement positive.
   (b) f est définie sur $[0~;~1]$ par $f(x) = x$.
2. (a) À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.
   (b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$.
   Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
   (a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
   Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.
   (b) La fonction f définie pour tout réel x de $[0~;~1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
   Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Calculer u_1.

   (b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   (d) Prouver que la suite (u_n) est convergente.

   À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

   (e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

V Sujet : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

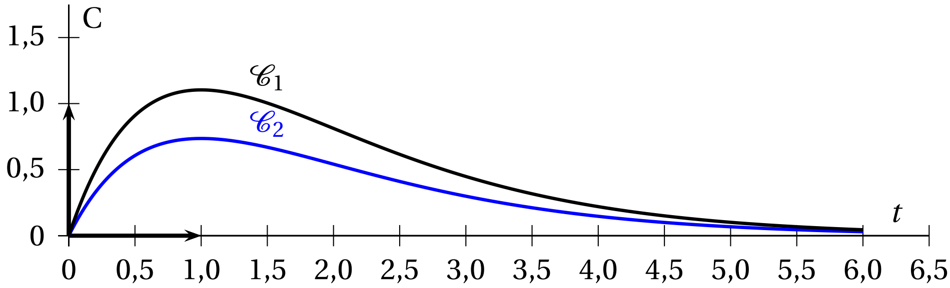
Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool.

L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$$

   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   (b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?

   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{\text{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.
   (a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que
   $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
   (b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.
5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à
   5×10^{-3} g.L^{-1}.
   (a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
   (b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\text{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $\text{C} > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

VI Sujet : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$.

1. Résoudre dans R l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $\mathrm{N} - \ln\left(\mathrm{N}^2+1\right) < \mathrm{A}$ $\quad$ N prend la valeur $\mathrm{N}+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

   (a) Que fait cet algorithme ?

   (b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

   En déduire la valeur de ℓ.

VII Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,
   $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.

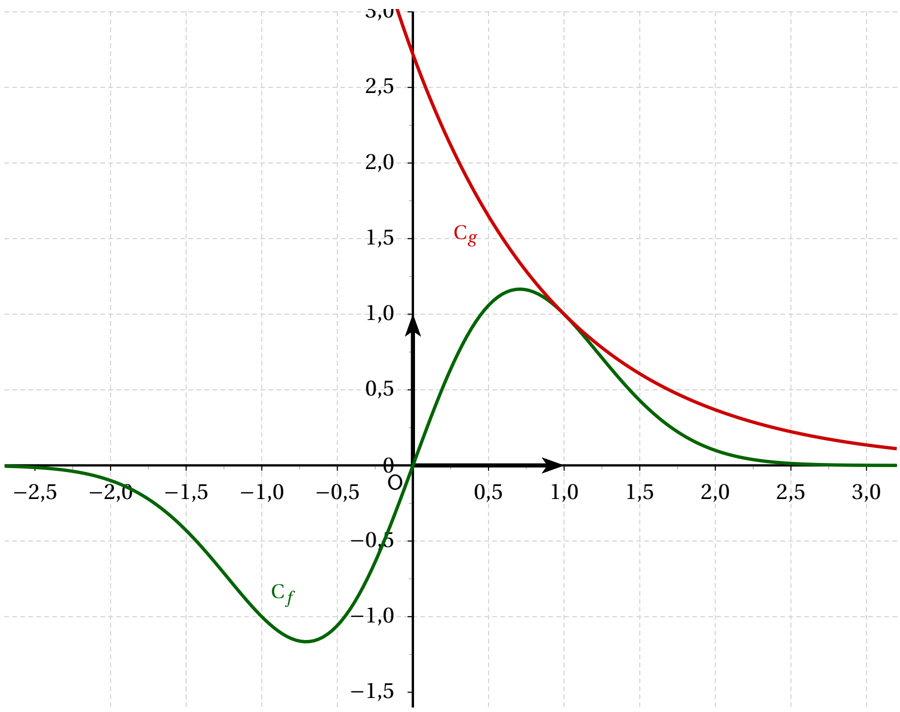
   Démontrer que pour tout réel x,
   $$f'(x) = \left(1-2x^2\right)e^{1-x^2}.$$

   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,
   $$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
   (b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
   (c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. (a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.
   (c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

VIII Sujet : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = ae^{ax} + a$.
On note $\mathrm{I}(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $\mathrm{I}(0)$.
2. On pose dans cette question $a = 1$.

   On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^x + 1$.

   (a) Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $\mathrm{I}(1)$.

   (b) Calculer la valeur exacte de $\mathrm{I}(1)$, puis arrondir au dixième.
3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $\mathrm{I}(a)$ est égale à 2 ?

   Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

IX Sujet : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.
2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

   On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

   Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

1. Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.
2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.
3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

   On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(\mathrm{T}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$, $d(\mathrm{T}) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3\mathrm{T}} + 0,3\mathrm{T} - 1\right)$.

   (b) Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.
4. Déterminer un encadrement d'amplitude $0,1$ s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

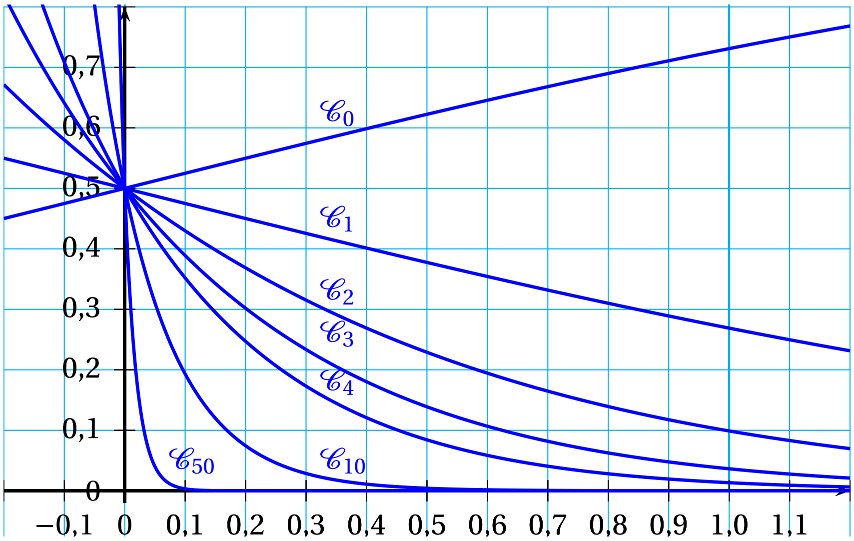
X Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – septembre 2016

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_n$ pour différentes valeurs de n.

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.



Partie A - Étude graphique

1. Donner une interprétation graphique de u_n.
2. Quelles conjectures peut-on faire concernant les variations et la convergence de la suite (u_n) ?
3. Proposer, à l'aide du graphique et en expliquant la démarche, un encadrement de u_4 d'amplitude $0,05$.

Partie B - Étude théorique

1. Montrer que $u_0 = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.
2. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$ puis en déduire u_1.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
4. On pose pour tout entier naturel n et pour tout x réel, $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   (a) Montrer que, pour tout nombre réel $x, d_n(x) = e^{-nx}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
   (b) Étudier le signe de la fonction d_n sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

(a) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

(b) En déduire la valeur de ℓ.

(c) On souhaite construire un algorithme qui affiche la valeur de u_N pour un entier naturel N non nul donné.

Recopier et compléter les quatre lignes de la partie **Traitement** de l'algorithme suivant.

Entrée :	N est un entier naturel non nul
Variables :	U est un nombre réel
	K est un entier naturel
Initialisation :	Affecter 1 à K
	Affecter $1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ à U
	Demander à l'utilisateur la valeur de N
Traitement :	Tant que $K < N$
	Affecter .... à U
	Affecter .... à K
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher U

XI Sujet : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1$.

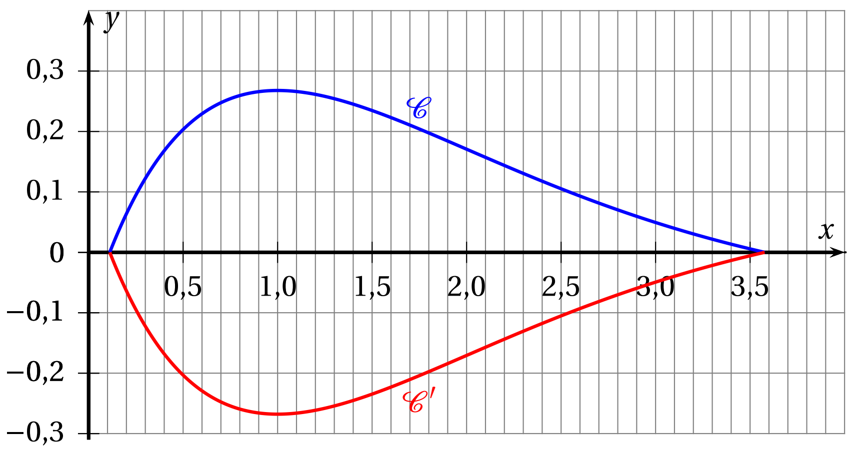
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.

Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ par

$$\mathrm{F}(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x} - 0,1x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$.

5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à $0,01$ près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

   On utilisera les valeurs arrondies à $0,001$ près suivantes : $\alpha \approx 0,112$ et

   $\beta \approx 3,577$.

6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

XII Sujet : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de deux fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$.

On considère les points A(0,5 ; 1) et $B(0 ; -1)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Déterminer les valeurs exactes des réels a et b, en détaillant la démarche.

Désormais, on considère que $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $[0 ; +\infty[$

2. (a) On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   (b) Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point $B(0 ; -1)$ est une primitive de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.

   (a) Déterminer l'expression de $g(x)$.

   (b) Soit m un réel strictement positif.

   Calculer $I_m = \displaystyle\int_0^m f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de m.

   (c) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} I_m$.

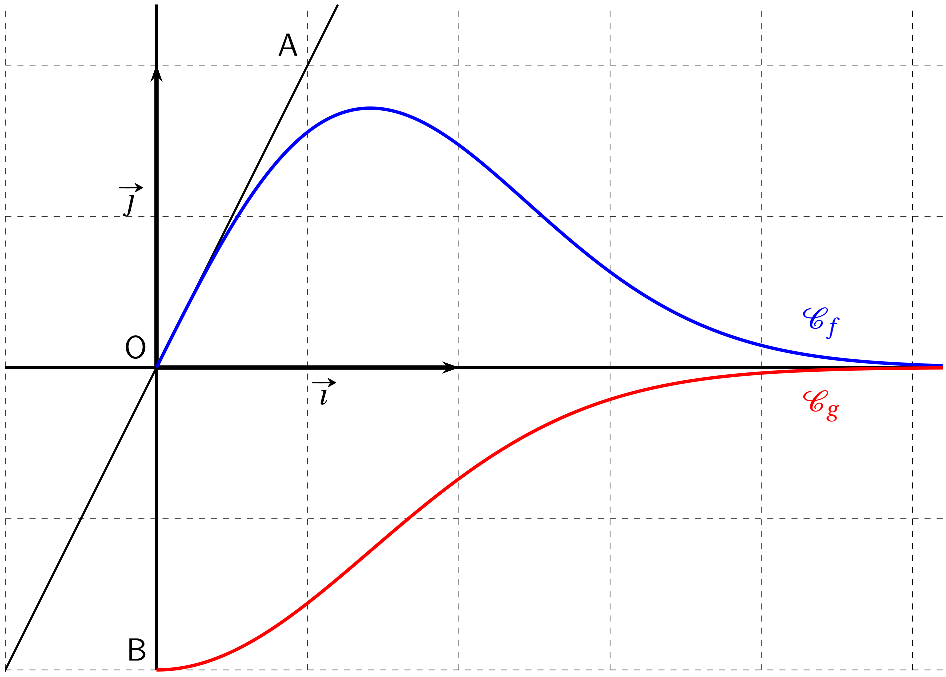
4. (a) Justifier que f est une fonction densité de probabilité sur $[0 ; +\infty[$.

   (b) Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité. Justifier que, pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, $P(X \leqslant x) = g(x) + 1$.

   (c) En déduire la valeur exacte du réel α tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,5$.

   (d) Sans utiliser une valeur approchée de α, construire dans le repère de l'annexe 1 le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$ en laissant apparents les traits de construction.

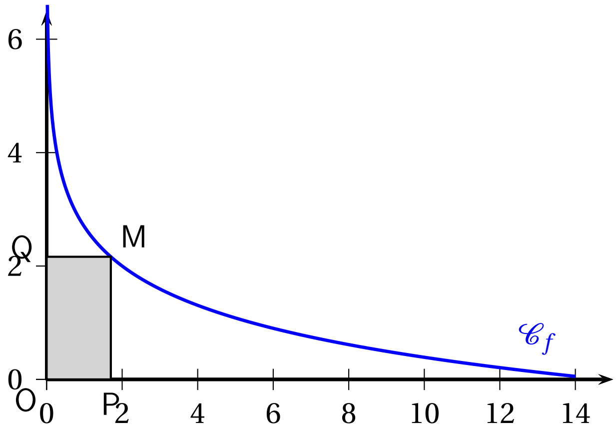
   Hachurer ensuite la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$.


A
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
B
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$

Correction : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- On prend deux positions du point M et on compare les aires des rectangles obtenus.
  - Si M est d'abscisse 2, son ordonnée est $f(2) = 2 - \ln(1) = 2$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut 4 unités d'aire.
  - Si M est d'abscisse 4, son ordonnée est $f(4) = 2 - \ln(2)$ donc l'aire du rectangle OPMQ vaut $4 - 2\ln(2)$ qui est différente de 4.

  Donc l'aire du rectangle OPMQ n'est pas constante.

- Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle OPMQ est $\mathscr{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

  Étudions les variations de la fonction $\mathscr{A}$; on remarque que $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$ donc $\left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{x}$

  $\mathscr{A}'(x) = 2 - \left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

  $1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0 \iff 1 > \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff e > \dfrac{x}{2} \iff x < 2e$

  $\mathscr{A}(2e) = 2 \times 2e - 2e \times \ln\dfrac{2e}{2} = 2e$ d'où le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$:

x	0		$2e$		14
$\mathrm{A}'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de A	‖	↗	$2e$	↘	

$f(2e) = 2 - \ln\dfrac{2e}{2} = 2 - 1 = 1$. donc l'aire du rectangle OPMQ est maximale pour le point M de coordonnées $(2e\,;1)$.

Correction : Bac S – Liban – 31 mai 2016

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ avec pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$: $f'(x) = \dfrac{-(-1)\mathrm{e}^{1-x}}{(1+\mathrm{e}^{1-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+\mathrm{e}^{1-x})^2}$.

   Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ et $(1+\mathrm{e}^{1-x})^2 > 0$.

   On en déduit que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $f'(x) > 0$ et donc que f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

2. En remarquant que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$, et que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^x = 1$, on peut écrire :

   $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-x})e^x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$.

3. f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ donc continue et est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; elle admet donc comme primitive pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$ la fonction F définie par : $\mathrm{F}(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e})$.

   On en déduit que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\ln(e^x+e)\right]_0^1 = \ln(2\mathrm{e}) - \ln(1+\mathrm{e}) = \ln(2) + \ln(\mathrm{e}) - \ln(1+\mathrm{e}) = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.

   Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a : $f_0(x) = \dfrac{1}{1+0\times\mathrm{e}^{1-x}} = 1$.

   La courbe $\mathscr{C}_0$ représentative de la fonction f_0 est le segment d'équation $y = 1$ avec $x \in [0;1]$.

2. Soit n un entier naturel.

   Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} > 0$. On en déduit que u_n représente l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_n$ délimitée par l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   On a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_0^1 = 1$

3. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante car les aires sont de plus en plus petites. Démontrons-le.

   Soit n un entier naturel.

   Pour tout réel $x \in [0\,;\,1]$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1}{1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x}} - \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}} = \dfrac{-e^{1-x}}{(1+n\mathrm{e}^{1-x})(1+(n+1)\mathrm{e}^{1-x})} < 0$.

   On en déduit que pour tout réel $x \in [0;1]$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et comme par intégration sur un intervalle, l'ordre est conservé, on a pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $u_{n+1} < u_n$.

   Ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

4. Soit n un entier naturel.

   Pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n\mathrm{e}^{1-x}} > 0$ et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x > 0$

   Ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée par 0.

   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et par conséquent elle admet une limite finie.

Correction : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

Partie A

1. $f(x_{\text{B}}) = f(2\text{e}) = 2\text{e} \times \ln\left(\dfrac{2\text{e}}{2}\right) - 2\text{e} + 2 = 2\text{e} - 2\text{e} + 2 = 2 = y_{\text{B}}$ donc $\text{B} \in \mathscr{C}_f$

   $f(x_{\text{I}}) = f(2) = 2 \times \ln\left(\dfrac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0 = y_{\text{I}}$ donc $\text{I} \in \mathscr{C}_f$

   f est dérivable sur $[2\ ;\ 2\text{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\ ;\ 2\text{e}]$

   $f = uv - u + 2 \Longrightarrow f' = u'v + uv' - u'$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

   $\forall x \in [2\ ;\ 2\text{e}]$, $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et on a $f'(2) = 0$ donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale en I

   L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2. (a) $\mathscr{T}$: $y = f'(2\text{e})(x - 2\text{e}) + f(2\text{e})$ or $f'(2\text{e}) = 1$ et $f(2\text{e}) = 2$

   On a donc $\mathscr{T}$: $y = x + 2 - 2\mathbf{e}$ et on en déduit $\text{D}(2\mathbf{e} - 2\ ;\ 0)$

   (b) $\mathscr{A}_{\text{ABI}} = \dfrac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AI} = (2\text{e} - 2)\,m^2$

   $\mathscr{A}_{\text{AIDB}} = \dfrac{(\text{AB} + \text{ID}) \times \text{AI}}{2} = (4\text{e} - 6)\,m^2$

   La longueur de la cuve étant de 5 m, on en déduit $10\mathbf{e} - 10 \leqslant \text{V} \leqslant 20\mathbf{e} - 30$

   Autrement dit **le volume de la cuve est compris entre 17,183 m^3 et 24,366 m^3**

3. (a) G est dérivable sur $[2\ ;\ 2\text{e}]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[2\ ;\ 2\text{e}]$

   $\text{G} = uv - \dfrac{1}{2}u \Longrightarrow f' = u'v + uv' - \dfrac{1}{2}u'$ avec $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^2}{2} \\ v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow$

   $\begin{cases} u'(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

   $\forall x \in [2\ ;\ 2\text{e}]$, $\text{G}'(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}x = x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = g(x)$.

   Donc G **est bien une primitive de la fonction g sur** $[2\ ;\ 2\text{e}]$

   (b) $f(x) = g(x) - x + 2$

   donc $\text{F}(x) = \text{G}(x) - \dfrac{x^2}{2} + 2x = \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$ **est primitive de f sur** $[2\ ;\ 2\text{e}]$

   (c) $\text{S} = \displaystyle\int_2^{2\mathbf{e}} (2 - f(x))\ dx = \Big[2x - \text{F}(x)\Big]_2^{2\text{e}} = \big(4(\text{e})\text{F}(2\text{e})\big) - (4 - \text{F}(2)) = (\text{e}^2) - (3)$

   $= \mathbf{e}^2 - 3$ $\text{V} = 5\text{S} \approx 22\,\mathbf{m}^3$

Partie B

1. on cherche x_0 tel que $f(x_0) = 1$

   On sait qu'il existe un unique x_0 vérifiant cette équation car f est continue et strictement croissante sur $[2\ ;\ 2\text{e}]$ à valeurs dans $[0\ ;\ 1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, x_0 existe et est unique.

   Par balayage on a $x_0 \approx 4,311$

   $v(4,311) \approx 7m^3$

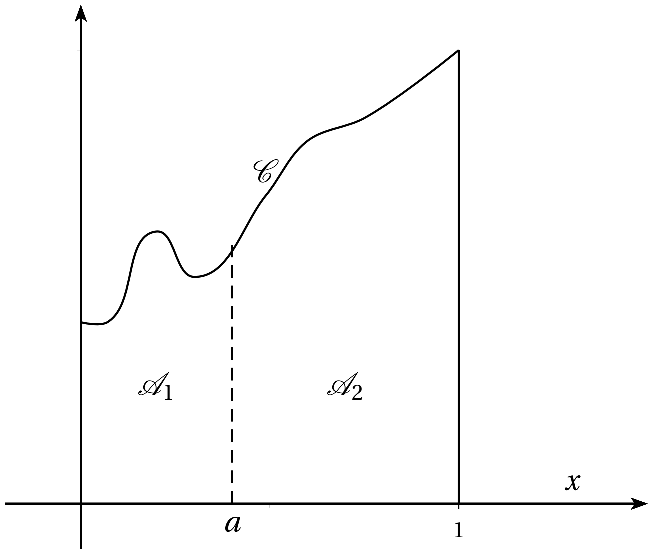
2. L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve correspondant à $10^{-3}m^3$ près à un remplissage à moitié de la capacité totale.

Correction : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0~;~1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.

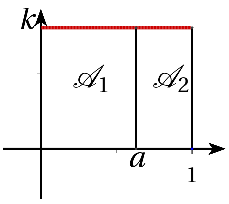
On note :

- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Partie A : Étude de quelques exemples

1. (a) Soit f une fonction constante strictement positive sur $[0~;1]$.



Alors il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = k$.

Pour tout réel $a \in]0~;~1[$, on a : $\mathscr{A}_1 = ka$ et $\mathscr{A}_2 = (1-a)k$.

On a : $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff ka = k(1-a)$. Et comme $k > 0$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff a = \dfrac{1}{2}$.

Ce qui prouve que si la fonction f est continue , constante et strictement positive sur $[0~;~1]$, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales pour une seule valeur de a et $a = \dfrac{1}{2}$.

(b) Soit f la fonction définie sur $[0~;~1]$ par $f(x) = x$.

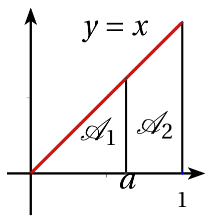
f est continue sur $[0~;~1]$ et la fonction F définie sur $[0~;~1]$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ est une primitive de f.

On a : $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a = \frac{1}{2}a^2$

et : $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^1 = 1 - \frac{1}{2}a^2$.

On en déduit pour $a \in]0~;~1[$: $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \iff \dfrac{1}{2}a^2 = 1 - \dfrac{1}{2}a^2 \iff a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : on peut aussi tout simplement calculer les aires du triangle et du trapèze sur le graphique ci-contre et égaliser



2. (a) À l'aide d'intégrales, exprimons, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

Comme $f \geqslant 0$ sur $[0;1]$, on a : $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ et $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Soit a un réel de $]0;1[$ qui satisfait la condition (E), c'est à dire tel que $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$.

Si F est une primitive de f sur $[0;1]$, alors

$(\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Rightarrow \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(a))$ et finalement :

Si a un réel de $]0;1[$ qui satisfait la condition (E) alors $\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}$.

Supposons maintenant que F est une primitive de f telle que $\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}$.

On a : $\mathscr{A}_1 = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(0) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2} - \mathrm{F}(0) = \dfrac{\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)}{2}$

et : $\mathscr{A}_2 = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(1) + \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2} = \dfrac{\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)}{2}$

Si F est une primitive telle que $\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}$ alors $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$ et la condition (E) est vérifiée : la réciproque est vraie.

3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

(a) Considérons la fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

Montrons que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a.

f est continue sur $[0\ ;\ 1]$ et admet pour primitive $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x$.

On a $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^a = \mathrm{e}^a - 1$ et $\mathscr{A}_2 = \displaystyle\int_a^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_a^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^a$.

On en déduit que :

$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Rightarrow \mathrm{e}^a - 1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^a \iff \mathrm{e}^a = \dfrac{1+\mathrm{e}}{2} \iff a = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

(b) Soit f la fonction définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Vérifions que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

On a d'une part : $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{5}} f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^{\frac{2}{5}} = \frac{-1}{\frac{2}{5}+2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

D'autre part : $\displaystyle\int_{\frac{2}{5}}^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_{\frac{2}{5}}^1 = \frac{-1}{3} + \frac{1}{\frac{2}{5}+2} = \frac{1}{12}$

On a pour $a = \dfrac{2}{5}$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$. La condition (E) est vérifiée.

Remarque : pour ces deux questions on peut utiliser A. 2. b., c'est à dire a est solution de (E) si et seulement si $\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}$

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrons que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Si a est un réel satisfaisant la condition (E),on a vu au A. 2. b que si F est une primitive de f alors :

$$\mathrm{F}(a) = \frac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2}.$$

Pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$, la fonction f définie par $f(x) = 4-3x^2$ admet comme primitive sur $[0\ ;\ 1]$, la fonction F définie par $\mathrm{F}(x) = 4x - x^3$.

On a alors : $\mathrm{F}(0) = 0$ et $\mathrm{F}(1) = 3$ et :
$\mathrm{F}(a) = \dfrac{\mathrm{F}(0)+\mathrm{F}(1)}{2} \iff 4a-3a^3 = 3 \iff a = \dfrac{a^3}{4} + \dfrac{3}{8}$.
Par conséquent, si a est un réel satisfaisant la condition (E), a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

   (a) Calculons u_1.
   On a $u_1 = g(u_0) = g(0) = \dfrac{3}{8}$

   (b) Démontrons que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
   g est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 \geqslant 0$. On en déduit que g est croissante sur $[0;1]$.

   (c) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   Considérons la proposition (P_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

   Initialisation $(0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1)$ est vraie.

   Hérédité Comme g est croissante sur $[0;1]$,

$$(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1) \Rightarrow (g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \leqslant g(1)).$$

   Mais $g(0) = \dfrac{3}{8} > 0$ et $g(1) = \dfrac{5}{8} < 1$.
   On en déduit :

$$(0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1) \Rightarrow (0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant g(1)).$$

Conclusion

P_0 est vraie.

Pour tout entier naturel n, $(\mathrm{P}_n \Rightarrow \mathrm{P}_{n+1})$ est vraie.

D'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

(d) Prouvons que la suite (u_n) est convergente.

On vient de démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, autrement dit que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. On peut en déduire qu'elle converge. Soit L sa limite.

Par définition de u_n, et par unicité de la limite, on en déduit que $g(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$ et L est solution de l'équation $x = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ d'où $\mathrm{L} = a$.

(e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$.

A la calculatrice, on obtient ; $u_{10} = 0,38980784$ à 10^{-8} près.

Correction : Bac S – Polynésie – 10 juin 2016

Partie A

1. **La vitesse est visiblement maximale pour** $t = 0$ car c'est la tangente aux courbes en O$(0 ; 0)$ qui semble avoir le coefficient directeur le plus élevé parmi toutes les tangentes.
2. Le coefficient directeur de la tangente en O à la courbe $\mathscr{C}_1$ est supérieur à celui de la tangente en O à la courbe $\mathscr{C}_2$. C'est donc la personne P_1 la moins corpulente qui subit plus vite les effets de l'alcool.
3. (a) Première méthode (longue mais utilisable dans la partie B) :

   f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$.

   $f = uv \Longrightarrow f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{A}t \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \mathrm{A} \\ v'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

   $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $f'(t) = \mathrm{A}(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ et $f'(0) = \mathrm{A}$

   Deuxième méthode (peut-être un peu plus astucieuse) :

   $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \mathrm{A}\mathrm{e}^{-h} = \mathrm{A}$ (limite finie)

   On en déduit que f **est dérivable en 0 et** $f'(0) = \mathrm{A}$

   (b) **L'affirmation est FAUSSE**

   - On a vu que le nombre dérivé en 0 est égal à $f'(0) = \mathrm{A}$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe à l'origine et on sait que les personnes de faible corpulence subissent plus vite les effets de l'alcool. Donc plus A est grand et plus la personne est de faible corpulence.
   - Autre méthode mathématique : si $\mathrm{A}_1 > \mathrm{A}_2$ alors $\mathrm{A}_1 t\mathrm{e}^{-t} > \mathrm{A}_2 t\mathrm{e}^{-t}$ car $t\mathrm{e}^{-t} > 0$ sur $[0 ; +\infty[$

   On en déduit que la courbe associée à A_1 est au dessus de celle associée à A_2 donc la personne associée à A_1 est de plus faible corpulence que la personne associée à A_2.

Partie B - Un cas particulier

1. On a vu dans la partie précédente que $\forall t \in [0 ; +\infty[$, $f'(t) = \mathrm{A}(1-t)\mathrm{e}^{-t}$ or $\mathrm{A}\mathrm{e}^{-t} > 0$

   donc $f'(t)$ est du signe de $1 - t$, on peut donc déterminer les variations de f sur $[0 ; +\infty[$

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>0</td><td>↗</td><td>$\frac{2}{\mathrm{e}}$</td><td>↘</td><td></td></tr>
</table>

2. **La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1 h après l'absorption**.

   Elle est alors d'environ **0,74** $g.l^{-1}$

3. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$

   $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2\times\dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = \lim\limits_{t\to+\infty} 2\times\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^t}{t}\right)} = 0$ par quotient

   On en déduit que l'alcool finit par s'éliminer totalement.

4. (a) f est continue et strictement croissante sur $[0\ ,\ 1]$ à valeurs dans $\left[0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$

   or $0,2 \in \left[0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

   l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_1 sur $[0\ ,\ 1]$

   de même, f est continue et strictement décroissante sur $[1\ ,\ +\infty[$ à valeurs dans $\left]0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$

   or $0,2 \in \left]0\ ;\ \dfrac{2}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

   l'équation $f(t) = 0,2$ admet une unique solution t_2 sur $[1\ ,\ +\infty[$

   (b) Par balayage, on obtient $t_1 \approx 0,112$ et $t_2 \approx 3,577$

   donc **Paul doit attendre au minimum 3 heures et 35 minutes avant de reprendre le volant.**

5. (a) On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\mathrm{T} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > \mathrm{T}$, $f(t) \in]-\epsilon\ ;\ \epsilon[$

   ici on pose $\epsilon = 5\times 10^{-3}$

   Donc **il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang**

   (b)

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	**0,25**	**0,25**
t	3,5	**3,75**	**4**
C	0,21	**0,18**	**0,15**

   La valeur affichée par l'algorithme est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

   Si on poursuit l'algorithme jusqu'à son terme, on obtient $8,25$ à l'affichage donc il faut 8 h et 15 minutes pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang

Correction : Bac S – Métropole – 20 juin 2016

Partie A

1. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & x \\ \iff & x - \ln(x^2+1) & = & x \\ \iff & \ln(x^2+1) & = & 0 \\ \iff & x^2+1 & = & e^0 \\ \iff & x^2 & = & 0 \\ \iff & x & = & 0 \end{array}$$

L'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution

2. • Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

   La fonction $u : x \mapsto x^2 + 1$ est une fonction trinôme, donc dérivable là où elle est définie, i.e $\mathbb{R}$.

   Puisque $u > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\ln \circ u = \ln u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Finalement, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -\ln(x^2+1)$, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, *sauf pour* $x = 1$: on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   • Montrons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$:

   De $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$

   on déduit, par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$.

   Il vient ensuite, par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$

   De $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(x^2+1) = -\infty$

   on déduit, par somme : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

3. La fonction f est (strictement) croissante sur $[0,1]$. Par suite : $\forall x \in [0,1] \qquad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

   On a $f(0) = 0 - \ln(0^2+1) = 0$ et $f(1) = 1 - \ln(1^2+1) = 1 - \ln 2$.

   Puisque $1 - \ln 2 < 1$, alors $\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leqslant f(x) < 1$ On a prouvé : $\forall x \in [0,1] \qquad f(x) \in [0,1]$

4. (a) L'algorithme affiche la plus petite valeur de N pour laquelle $\mathrm{N} - \ln(\mathrm{N}^2+1)$ est supérieur ou égal à N.

   (b) Pour $\mathrm{A} = 100$, l'algorithme affiche 110

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0,1]$.

   • Puisque $u_0 = 1$, $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   • Supposons vraie la propriété $\mathscr{P}_n$ pour *un* entier naturel n quelconque.

   On a alors : $u_n \in [0\ ;\ 1]$.

   D'après la troisième question de la partie A, on en déduit : $f(u_n) \in [0\ ;\ 1]$ soit : $u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$

   On a prouvé : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathscr{P}_n$ est vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$ est vraie

   • On a prouvé par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0\ ;\ 1]$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$.

   Étudions le signe de $-\ln(u_n^2+1)$:

   Puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit, la fonction carré étant croissante sur $[0,1]$: $0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2$

   soit : $u_n^2 \in [0\ ;\ 1]$

   Par suite : $u_n^2 + 1 \in [1\ ;\ 2]$

   La fonction $\ln$ est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$:

   De $u_n^2 + 1 \geqslant 1$, on déduit $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant \ln 1$, soit $\ln\left(u_n^2+1\right) \geqslant 0$.

   Puisque $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2+1) \leqslant 0$, alors

   La suite u est décroissante

3. La suite u est décroissante et minorée par 0 : elle converge donc, en vertu du théorème de la limite monotone, vers un nombre réel ℓ.

4. Puisque l'équation $f(x) = x$ admet 0 pour unique solution, on en déduit :

   $$\ell = 0$$

Correction : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = x\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x^2} = \dfrac{\mathrm{e}}{x} \times \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} + +\infty$ (croissances comparées).

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}\right) = 0$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}}{x}\right) = 0$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

   $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. (a) $f = u\mathrm{e}^v$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(x) = 1 - x^2 \\ v'(x) = -2x \end{cases}$.

   $f' = u'\mathrm{e}^v + u \times v'\mathrm{e}^v$ d'où :

   $f'(x) = \mathrm{e}^{1-x^2} + x \times (-2x)\mathrm{e}^{1-x^2} = \boxed{\left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}}$.

   (b) Comme $\mathrm{e}^{1-x^2>0}$, $f'(x)$ est du signe de $1 - 2x^2$.

   $1 - 2x^2 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $1 - 2x^2$ est positif (signe opposé à celui du coefficient de x^2) entre les racines.

   $f\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \mathrm{e} = -\dfrac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$ et $f\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$.

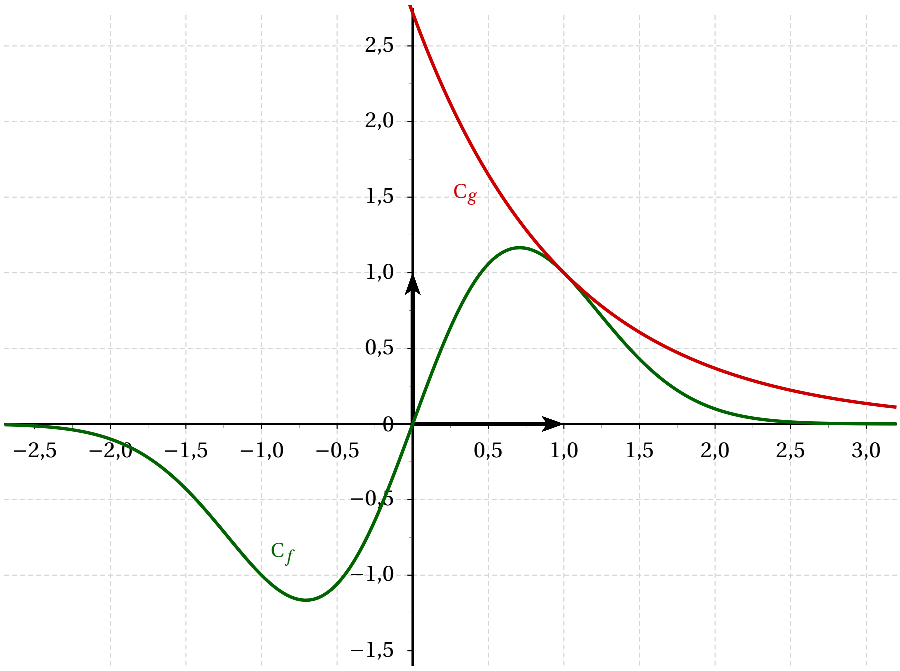
   Tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2\mathrm{e}}}{2}$	$\searrow$	0

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit en dessous de $\mathscr{C}_g$ et que les deux courbes soient tangentes en un point.
2. Soit $x \leqslant 0$; $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant 0$ car $x \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$ et $g(x) = \mathrm{e}^{1-x} > 0$, donc $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   (a) $f(x) \leqslant g(x) \iff x\mathrm{e}^{1-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \iff x\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x^2} \iff \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x} \iff x\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \iff \ln\left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right) \leqslant \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$ (car la fonction $\ln$ est croissante).

   cela équivaut à $\ln x - x^2 \leqslant -x \iff \ln x - x^2 + x \leqslant 0 \iff \boxed{\Phi(x) \leqslant 0}$.

   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   (b) $\Phi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 1 = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{x}$ qui est du signe de $-2x^2 + x + 1$ car $x > 0$.

   On calcule le discriminant : $\Delta = 9 > 0$: il y a deux racines : $-\dfrac{1}{2}$ et 1.

   Cette expression est négative (du signe du coefficient de x^2, donc de -2) en dehors de l'intervalle formé par les racines.

   $\Phi(1) = 0$.

   On en déduit le tableau de variations de ϕ :

x	0		1		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\Phi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

(c) Le maximum de $\Phi(x)$ est $\Phi(1) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. (a) $\Phi(x) \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant g(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est bien en dessous de $\mathscr{C}_g$.

   (b) $f(x) = g(x) \iff \Phi(x) = 0 \iff x = 1$ donc les deux courbes ont un point commun, A, de coordonnées $(1\,;\,1)$.

   (c) $f'(1) = -1$: $g'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ donc $g'(1) = -1$.

   En A, les deux tangentes ont l même coefficient directeur, donc les deux courbes ont même tangente.

Partie C

1. On pose $u(x) = 1 - x^2$; alors $u'(x) = -2x$ donc $x = -\dfrac{1}{2}u'(x)$ d'où $f = -\dfrac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

   Une primitive est $\mathrm{F}(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{u(x)} = \boxed{-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 [g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x]$.

   Une primitive de $g - f$ est $\mathrm{G} - \mathrm{F}$ avec

   $(\mathrm{G}-\mathrm{F})(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - \left(-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2} - \mathrm{e}^{1-x}$.

   $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = (\mathrm{G}-\mathrm{F})(1) - (\mathrm{G}-\mathrm{F})(0) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\mathrm{e} - \mathrm{e}\right) = \boxed{\frac{\mathrm{e}-1}{2}}$.

3. Ce résultat correspond à laire en unités d'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_f$ et les droites déquation $x = 0$ et $x = 1$.

Correction : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_a(x) = ae^{ax} + a$.

On note $\mathrm{I}(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

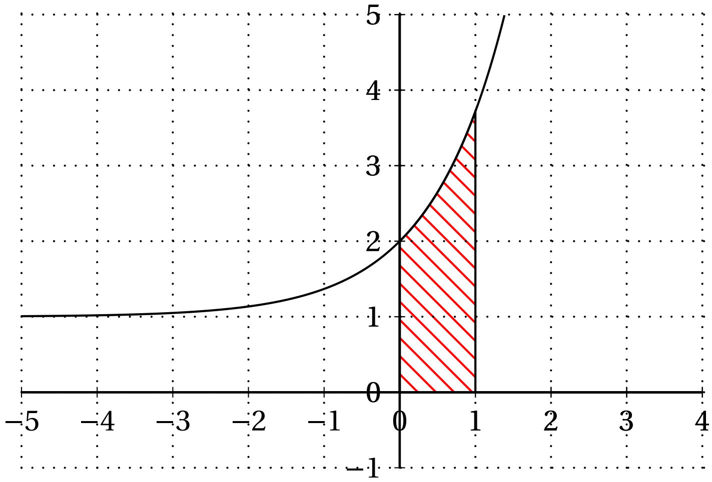
1. On pose dans cette question $a = 0$.

   $f_0(x) = 0$ donc $\mathrm{I}(0) = \displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$

2. On pose dans cette question $a = 1$.

   On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = e^x + 1$.

   (a) On représente la fonction f_1 dans un repère orthogonal :

   On connaît la représentation graphique de la fonction exponentielle donc on peut, sans étude, représenter la fonction f_1.

   (b) La fonction F_1 définie par $\mathrm{F}_1(x) = e^x + x$ est une primitive de la fonction f_1.

   Donc $\mathrm{I}(1) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{F}_1(x)\right]_0^1 = \mathrm{F}_1(1) - \mathrm{F}_1(0) = (e^1 + 1) - (e^0 - 0) = e + 1 - 1 = e \approx 2,7$

3. On cherche s'il existe une valeur de a pour laquelle $\mathrm{I}(a)$ est égale à 2.

   La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}_a(x) = e^{ax} + ax$ est une primitive de f.

   Donc $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}_a(1) - \mathrm{F}_a(0) = (e^a + a) - (e^0 + 0) = e^a + a - 1$

   Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = e^x + x - 1$.

   g est dérivable donc continue et $g'(x) = e^x + 1 > 0$ sur $[0;1]$.

   $g(0) = e^0 + 0 - 1 = 0 < 2$ et $g(1) = e^1 + 1 - 1 = e \approx 2,72 > 2$

   La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0;1]$; $g(0) < 2$ et $g(1) > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$.

   Il existe donc une valeur unique de a dans $[0;1]$ telle que $\mathrm{I}(a) = 2$.

$$\begin{cases} f(0,7) \approx 1,71 < 2 \\ f(0,8) \approx 2,03 > 2 \end{cases} \implies a \in [0,7\,;0,8]$$

$$\begin{cases} f(0,79) \approx 1,99 < 2 \\ f(0,80) \approx 2,03 > 2 \end{cases} \implies a \in [0,79\,;0,80]$$

Correction : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}$.

1. La fonction v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$v_1'(t) = 5 \times \frac{0,3e^{0,3t}\left(e^{0,3t}+1\right) - \left(e^{0,3t}-1\right) \times \left(0,3e^{0,3t}\right)}{\left(e^{0,3t}+1\right)^2} = 5 \times \frac{0,3e^{0,3t}\left(e^{0,3t}+1-e^{0,3t}+1\right)}{\left(e^{0,3t}+1\right)^2}$$
$$= 5 \times \frac{0,3e^{0,3t} \times 2}{\left(e^{0,3t}+1\right)^2} = \frac{3e^{0,3t}}{\left(e^{0,3t}+1\right)^2}$$
Pour tout t, $e^{0,3t} > 0$ donc $v_1(t) > 0$ donc la fonction v_1 est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$. On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

   On résout l'inéquation $v_1(t) < 6$:
$$v_1(t) < 6 \iff 5 \times \frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1} < 6 \iff 5 \times \frac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1} - 6 < 0$$
$$\iff \frac{5e^{0,3t} - 5 - 6e^{0,3t} - 6}{e^{0,3t}+1} < 0 \iff \frac{-e^{0,3t} - 11}{e^{0,3t}+1} < 0$$
Pour tout t, $e^{0,3t} > 0$ donc $-e^{0,3t} - 11 < 0$ et $e^{0,3t} + 1 > 0$, donc l'inéquation est toujours vérifiée : $v_1(t) < 6$ pour tout t. Donc le colis ne risque pas d'être endommagé si le parachute s'ouvre normalement.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

1. La vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes est $v_2(10)$:
$$v_2(t) = 32,7\left(1 - e^{-0,3\times 10}\right) \approx 31,1.$$
La valeur approchée à 10^{-1} de vitesse atteinte par le colis au bout de 10 secondes est 31,1 m.s^{-1}.

2. On résout l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}.
$$v_2(t) = 30 \iff 32,7\left(1 - e^{-0,3t}\right) = t \iff 1 - e^{-0,3t} = \frac{30}{32,7}$$
$$\iff 1 - \frac{30}{32,7} = e^{-0,3t} \iff \frac{2,7}{32,7} = e^{-0,3t}$$
$$\iff \ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right) = -0,3t \iff \frac{\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3} = t$$

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3} \approx 8,3$ donc au bout d'environ 8,3 secondes, le colis atteint la vitesse de 30 m.s^{-1}.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

   On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(\mathrm{T}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) $d(\mathrm{T}) = \displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} v_2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{T}} 32,7\left(1-e^{-0,3t}\right)\mathrm{d}t$

   La fonction v_2 a pour primitive la fonction $t \longmapsto 32,7\left(t - \dfrac{e^{-0,3t}}{-0,3}\right)$;

   on a $32,7\left(t-\dfrac{e^{-0,3t}}{-0,3}\right) = 32,7\left(t+\dfrac{e^{-0,3t}}{0,3}\right) = \dfrac{32,7}{0,3}\left(0,3t+e^{-0,3t}\right) = 109\left(0,3t+e^{-0,3t}\right)$.

   Donc $d(\mathrm{T}) = \left[109\left(0,3t+e^{-0,3t}\right)\right]_0^{\mathrm{T}} = 109\left(0,3\mathrm{T}+e^{-0,3\mathrm{T}}\right) - 109\left(0+e^{-0,3\times 0}\right) = 109\left(e^{-0,3\mathrm{T}}+0,3\mathrm{T}-1\right)$.

   (b) Le colis atteint le sol au bout de 20 secondes donc la distance qu'il parcourt est

   $$d(20) = 109\left(e^{-0,3\times 20}+0,3\times 20-1\right) \approx 545 \text{ m.}$$

4. Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est la valeur de T solution de l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$.

   On étudie les variations de la fonction d sur $[0 ; +\infty[$:

   $d'(\mathrm{T}) = 109\left(-0,3e^{-0,3\mathrm{T}}+0,3\right) = 32,7\left(1-0,3e^{-0,3\mathrm{T}}\right)$

   $\mathrm{T} \geq 0 \Longrightarrow -0,3\mathrm{T} \leq 0 \Longrightarrow e^{-0,3\mathrm{T}} \leq 1 \Longrightarrow 1-0,3e^{-0,3\mathrm{T}} \geq 0 \Longrightarrow d'(\mathrm{T}) \geq 0$

   Donc la fonction d est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

   Or $d(0) = 0 < 700$ et $d(30) \approx 872 > 700$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on peut dire que l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$ admet une solution unique α sur $[0 ; 30[$:

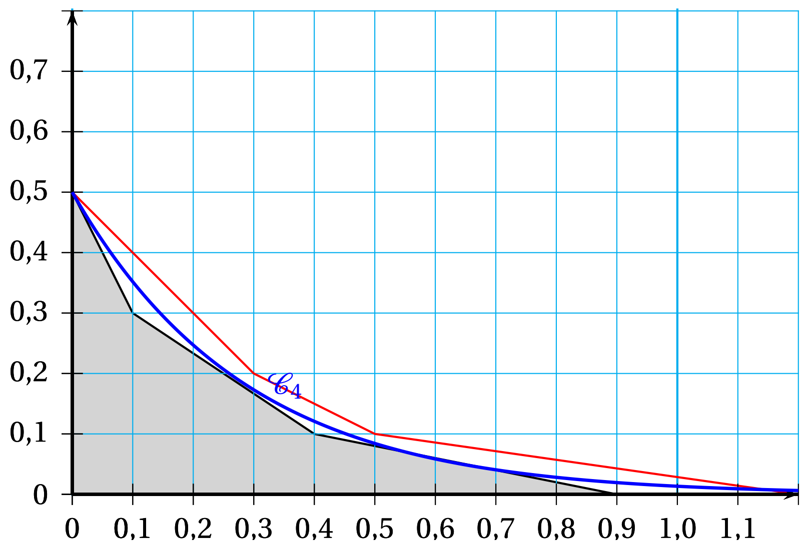
   $\left.\begin{array}{lcl} d(24) & \approx & 675,9 < 700 \\ d(25) & \approx & 708,6 > 700 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [24 ; 25]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{lcl} d(24,7) & \approx & 698,8 < 700 \\ d(24,8) & \approx & 702,0 > 700 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [24,7 ; 24,8]$

   Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est comprise entre 24,7 et 24,8 secondes.

Correction : Bac S – Antilles-Guyane – septembre 2016

Partie A - Étude graphique

1. Quel que soit n naturel et quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-(n-1)x} > 0$ et $1+\mathrm{e}^{x} > 1 > 0$: les fonctions f_n sont donc positives : les termes de la suite (u_n) sont des intégrales de fonctions positives sur $[0\,;\,1]$: u_n est donc l'aire, en unités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
2. D'après l'allure des courbes on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0.
3.



L'aire de la surface grisée s'obtient comme la somme des aires de deux trapèzes et d'un triangle : $4+6+2,5=12,5$ carrés d'aire 0,01.

L'aire de la surface limitée par les axes et la ligne rouge se décompose en $10,5+3+3,5=17$ aires de carrés d'aire 0,01.

On en déduit que $0,125 < u_4 < 0,17$.

On a donc

$$0,12 < u_4 < 0,17.$$

Partie B - Étude théorique

1. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$
   En posant $u(x)=1+\mathrm{e}^x$ on obtient $u'(x)=\mathrm{e}^x$, donc :
   $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln u(x)]_0^1 = \left[\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right]_0^1 = \ln(1+\mathrm{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right).$
2. Par linéarité de l'intégrale :
   $u_0+u_1 = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} + \frac{\mathrm{e}^{-(1-1)x}}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}\right) dx = \int_0^1 \frac{e^x+1}{1+e^x}\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1-0=1.$

On en déduit que : $u_1 = 1-u_0 = 1-\ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$.

3. L'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle [0 ; 1] est positive. Donc $u_n > 0$

4. (a) $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{e^{-(n+1-1)x}}{1+e^x} - \dfrac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^x} - \dfrac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} =$ $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^x}\left(1-e^x\right) = e^{-nx}\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

   (b) On sait que pour tout naturel n et pour tout réel x, $e^{-nx} > 0$ et que $1+e^x > 1 > 0$.

   Le signe de $d_n(x)$ est donc celui de $1-e^x$.

   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow e^0 \leqslant e^x \leqslant e^1$ par croissance de la fonction exponentielle, soit $1 \leqslant e^x \leqslant e$, d'où $-e \leqslant -e^x \leqslant -1$ et enfin $1-e \leqslant 1-e^x \leqslant 0$.

   Conclusion : $1-e^x \leqslant 0 \Rightarrow d_n(x) \leqslant 0$.

5. $d_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \iff f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

   Il en résulte par intégration sur l'intervalle [0 ; 1]que $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

   Comme on a vu qu'elle minorée par zéro, elle est donc convergente vers une limite ℓ supérieure ou égale à zéro.

6. (a) $u_n + u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} + \int_0^1 \frac{e^{-(n+1-1)x}}{1+e^x}$ et par linéarité de l'intégrale :

   $u_n + u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \left[\frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x} + \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\right] dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\left(e^x+1\right) dx = \int_0^1 e^{-nx}\, dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

   (b) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n} = 1$ et enfin $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$.

   On a donc $\ell = 0$.

   (c) Tant que $K < N$

   Affecter $\dfrac{1-e^{-K}}{K} - U$ à U

   Affecter $K+1$ à K

   Fin Tant que

Correction : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} - 0,1$.

1. D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -0,1$.
2. La fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)e^{-x} - 0 = (1-x)e^{-x}$.

   Pour tout x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   $f(0) = -0,1$; $f(1) = e^{-1} - 0,1 \approx 0,27 > 0$

   On construit le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-0,1$	$\nearrow$	$e^{-1}-0,1$	$\searrow$	$-0,1$

3. $f(0) = -0,1 < 0$ et $f(1) \approx 0,27 > 0$; on complète le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-0,1$	$\nearrow$ α : 0	$e^{-1}-0,1$	$\searrow$	$-0,1$

   D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.

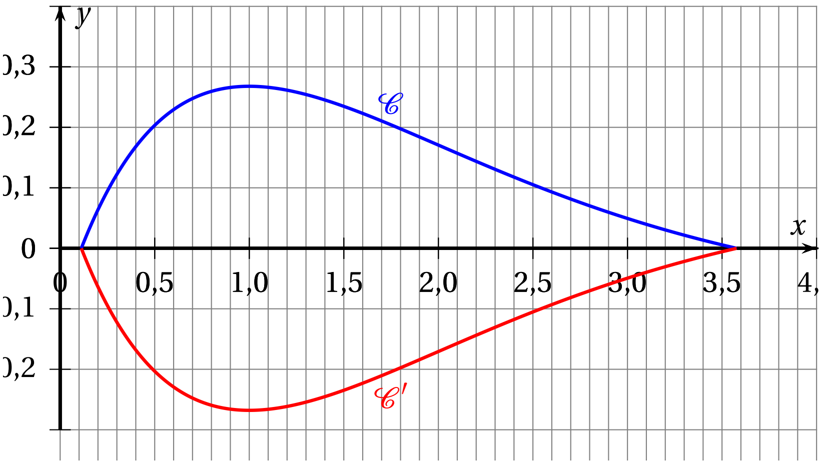
Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.

4. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ par $\mathrm{F}(x) = -(x+1)e^{-x} - 0,1x$.

   La fonction F est dérivable sur $[\alpha\ ;\ \beta]$ et

   $\mathrm{F}'(x) = -1 \times e^{-x} - (x+1) \times (-1)e^{-x} - 0,1 = (-1+x+1)e^{-x} - 0,1 = xe^{-x} - 0,1 = f(x)$

   Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[\alpha\ ;\ \beta]$.



5. La fonction f est positive sur $[\alpha\,;\,\beta]$ donc l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=\alpha$ et $x=\beta$ est $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\text{d}x$.

   Pour des raisons de symétrie, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est $\mathscr{A} = 2\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\text{d}x$.

   $\mathscr{A} = 2\times\left[\text{F}(\beta)-\text{F}(\alpha)\right] \approx 2\times\left[\text{F}(3,577)-\text{F}(0,112)\right] \approx 1,04$

   L'aire du domaine compris entre les deux courbes est approximativement de $1,04$ unité d'aire.

6. L'unité sur chaque axe représente 5 mètres, donc une unité d'aire est égale à 25 m^2.

   L'aire du domaine entre les deux courbes est donc approximativement de $1,04\times 25 = 26$ m^2.

   On peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré donc sur 26 m^2 on en disposera $26\times 36 = 936$ plants de tulipes.

Correction : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données en annexe 1 sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de deux fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty]$.

On considère les points A(0,5 ; 1) et B(0 ; −1) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que O appartient à $\mathscr{C}_f$ et que la droite (OA) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O.

1. On suppose que la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

   On sait que le point O appartient à $\mathscr{C}_f$ donc $f(0) = 0$ ce qui équivaut à $(0+b)e^0 = 0$ ou encore $b = 0$.

   Donc $f(x)$ s'écrit $f(x) = axe^{-x^2}$.

   La droite (OA) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en O, et elle a pour coefficient directeur 2, donc $f'(0) = 2$.

   $f(x) = axe^{-x^2}$ donc $f'(x) = a \times e^{-x^2} + ax \times (-2x)e^{-x^2} = (a - 2ax^2)e^{-x^2}$.

   $f'(0) = 2 \iff (a-0)e^0 = 2 \iff a = 2$; donc $f(x) = 2xe^{-x^2}$.

Désormais, on considère que $f(x) = 2xe^{-x^2}$ pour tout x appartenant à $cd0$; $+\infty]$

2. (a) On admettra que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \text{on pose } X = x^2 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

   (b) La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty]$ et on a déjà vu que $f(x) = (a-2ax^2)e^{-x^2} = (2-4x^2)e^{-x^2}$ puisque $a = 2$.

   Pour tout x, $e^{-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - 4x^2$ c'est-à-dire de $4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + x\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - x\right)$.

   Sur $]0 ; +\infty]$, la dérivée s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,86$.

   On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty]$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+x\right)$		$+$	0	$+$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

3. La fonction g dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ passe par le point B$(0\ ;\ -1)$ est une primitive de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty]$.

   (a) On sait que la dérivée de $x \longmapsto e^{u(x)}$ est $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$, donc une primitive de $x \longmapsto u'(x)e^{u(x)}$ est $x \longmapsto e^{u(x)}$.

   Donc la fonction $x \longmapsto -2xe^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ donc une primitive de la fonction f est g définie par $g(x) = -e^{-x^2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

   $\mathscr{C}_g$ contient le point B $(0\ ;\ -1)$, donc $g(0) = -1$, ce qui équivaut à $-e^0 + k = -1$ donc $k = 0$.

   La primitive de f dont la courbe représentative passe par le point B est donc la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty]$ par $g(x) = -e^{-x^2}$.

   (b) Soit m un réel strictement positif.
   $\mathrm{I}_m = \int_0^m f(t)ṭ = g(m) - g(0) = -e^{-m^2} - (-1) = 1 - e^{-m^2}$

   (c) On cherche $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathrm{I}_m$:

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{m\to+\infty} -m^2 = -\infty \\ \text{on pose } \mathrm{M} = -m^2 \\ \lim\limits_{\mathrm{M}\to-\infty} \dfrac{\mathrm{X}}{e^{\mathrm{M}}} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{m\to+\infty} e^{-m^2} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{m\to+\infty} 1 - e^{-m^2} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{m\to+\infty} \mathrm{I}_m = 1.$$

4. (a) La fonction f est
   - continue sur I
   - positive sur I
   - telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_0^m f(t)ṭ = 1$

   donc la fonction f est une fonction de densité de probabilité sur $]0\ ;\ +\infty]$.

   (b) Soit X une variable aléatoire continue qui admet la fonction f comme densité de probabilité.
   Pour tout x de I, $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \int_0^x f(t)ṭ = g(x) - g(0)$.
   Or $g(0) = -e^0 = -1$, donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = g(x) + 1$.

(c) Soit α le réel tel que $P(X \leq \alpha) = 0,5$.

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) = 0,5 &\iff g(\alpha) + 1 = 0,5 \iff g(\alpha) = -0,5 \\ &\iff -e^{-\alpha^2} = -0,5 \iff -\alpha^2 = \ln 0,5 \\ &\iff -\alpha^2 = -\ln 2 \iff \alpha^2 = \ln 2 \\ &\iff \alpha = \sqrt{\ln 2} \text{ car } \alpha > 0 \end{aligned}$$

(d) On construit le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ 0)$ et on hachure la région du plan correspondant à $P(X \leqslant \alpha)$: