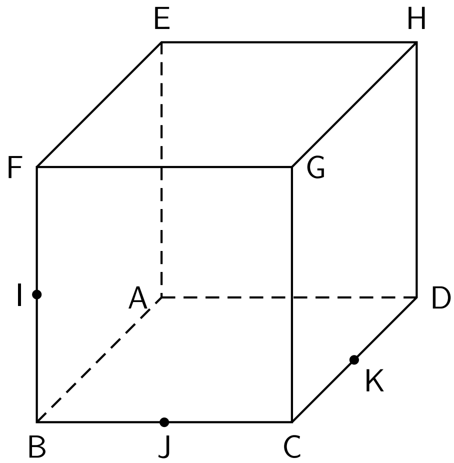
Annales 2016 - Géométrie dans l'espace

I Sujet : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016



ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.

Le point I est le milieu du segment [BF].

Le point J est le milieu du segment [BC].

Le point K est le milieu du segment [CD].

Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).
3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

   (a) Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

   (b) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$:

   (a) N appartient au plan (IJK).

   (b) La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

II Sujet : Bac S – Liban – 31 mai 2016

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AK}\right)$.

1. (a) Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

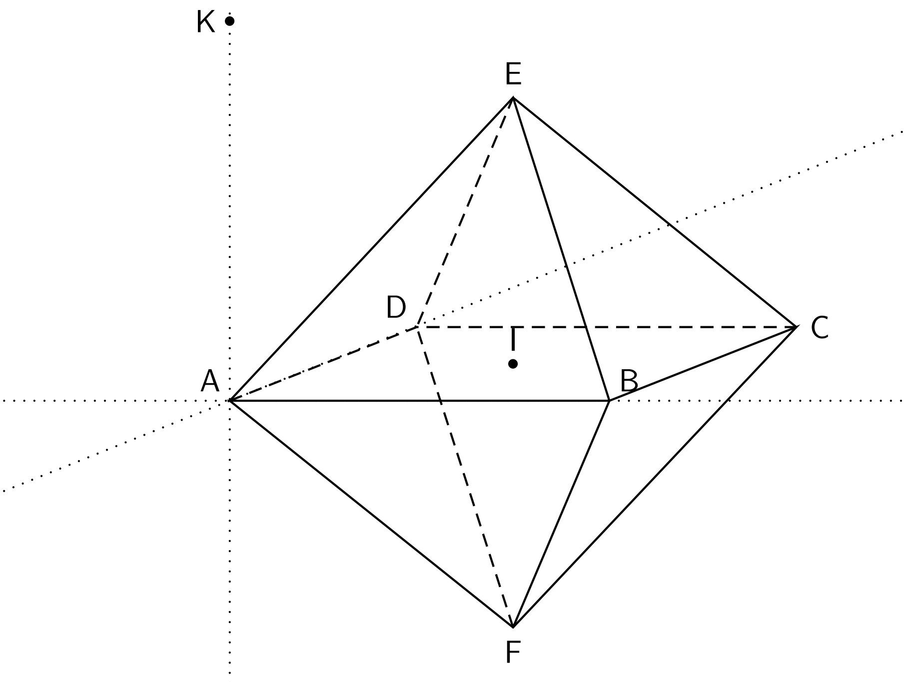
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   (a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

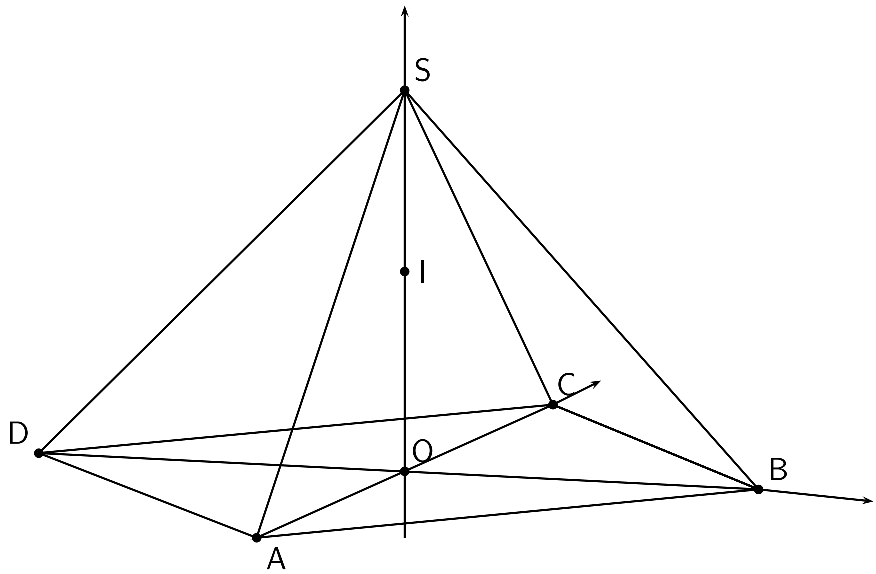
   (b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   (c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).



III Sujet : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB $= 1$.

On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\text{SK}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].

   (a) Déterminer les coordonnées du point K.

   (b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

   (c) On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).

   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

   (d) Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OC}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

   (a) Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

   (b) Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{\text{AS}}$ et $\overrightarrow{\text{DS}}$ sont coplanaires.

   (c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

IV Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

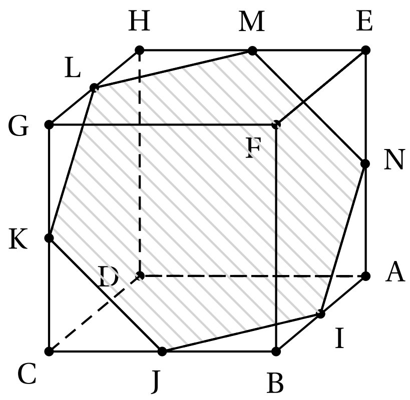
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $A(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$,

$H(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $E(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

   (b) En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre FBGE.

V Sujet : Bac S – Asie – 23 juin 2016

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.

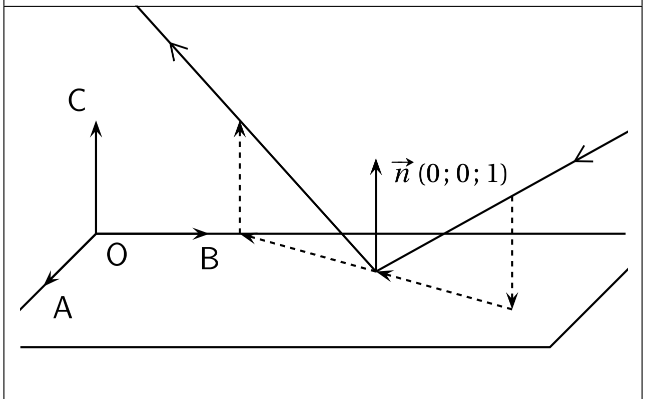
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(-a\ ;\ b\ ;\ c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v}\,(a\ ;\ -b\ ;\ c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. *Propriété des catadioptres*

   En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\vec{v_1}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\vec{v_2}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

(a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

(b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

(c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point $\text{I}_2(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

   Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

   On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière*

   On donne le vecteur $\vec{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

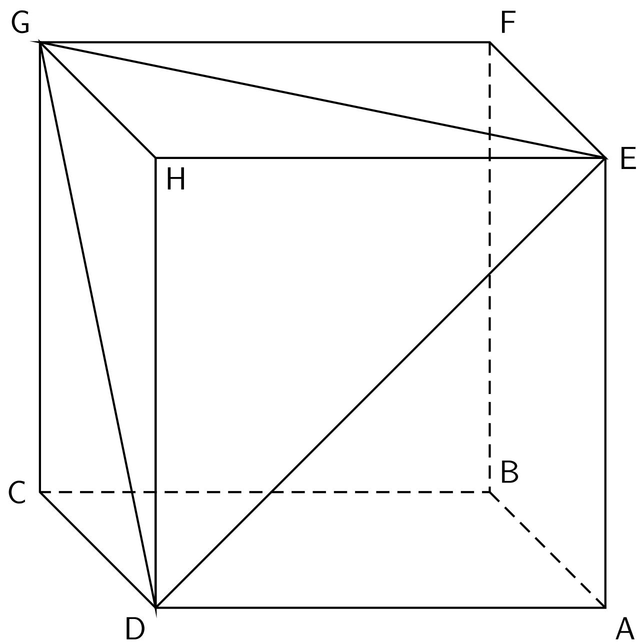
   (a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   (b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

   (c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

VI Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – septembre 2016

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).

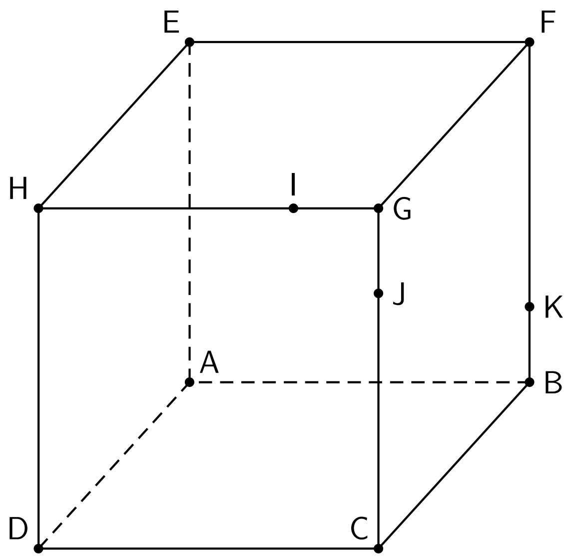
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
5. Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.

VII Sujet : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

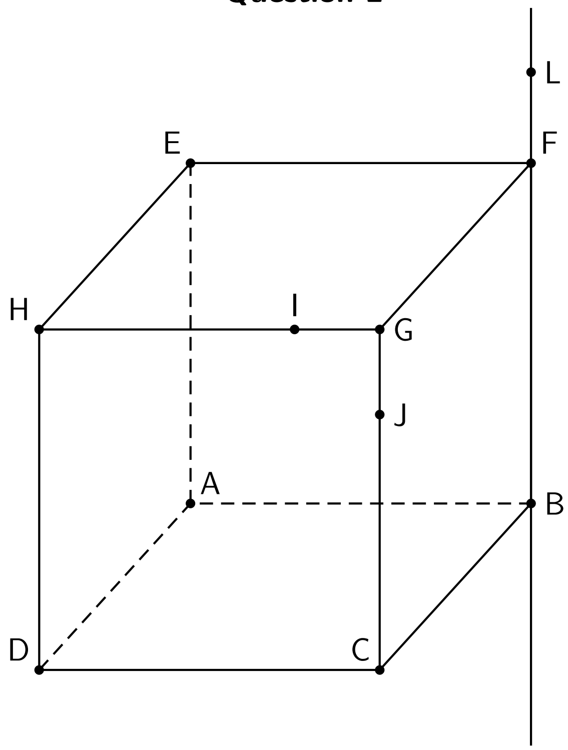
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].
2. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

Question 1



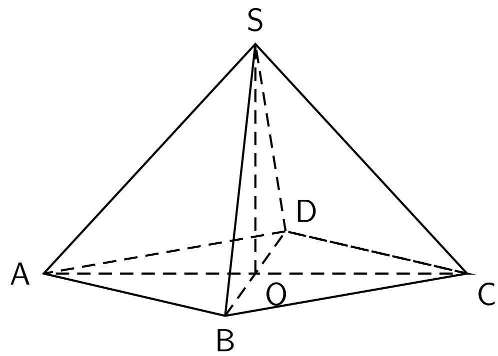
Question 2



VIII Sujet : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

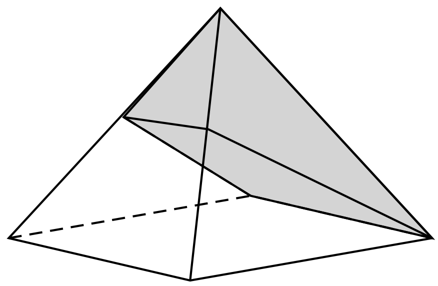
Partie B : dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}\right)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].
   (a) Justifier que $\vec{n}(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).
2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).
   (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).
   (b) Calculer les coordonnées du point H.
   (c) Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$
   Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Partie C : partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.



Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».

Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.

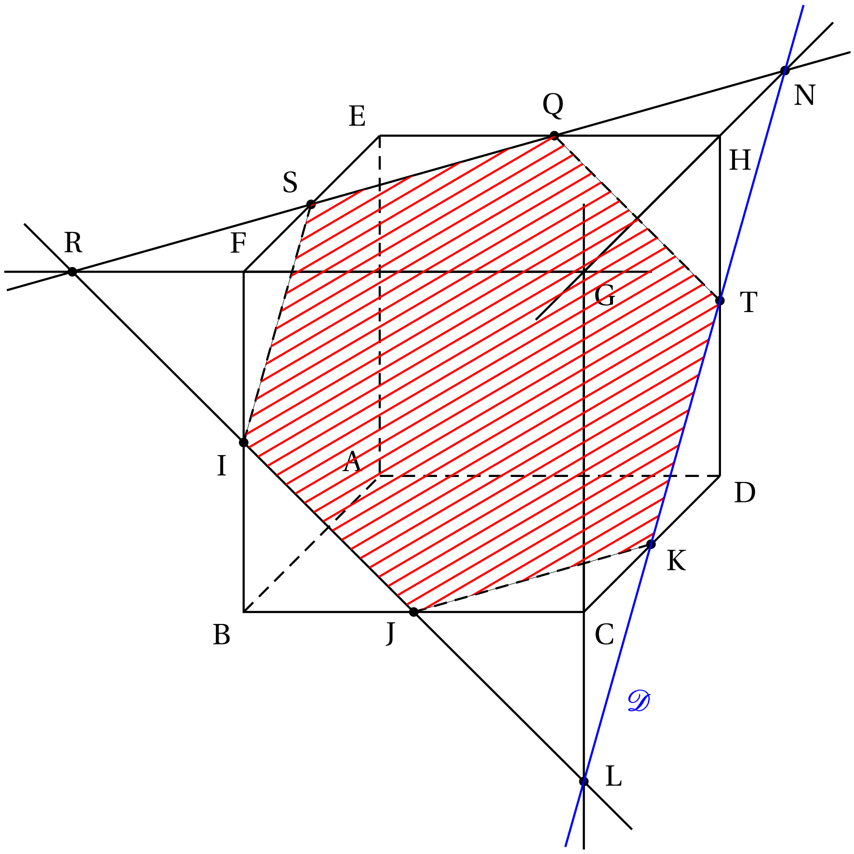
Est-ce le cas ? Justifier la réponse.

Correction : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

Partie A

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

On construit :
- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont :

   $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$, $F(1;0;1)$, $H(0;1;1)$, $G(1;1;1)$.

   Le point I est le milieu de [BF] donc I a pour coordonnées $\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$.

   Le point J est le milieu de [BC] donc J a pour coordonnées $\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$.

   Le point K est le milieu de [CD] donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$.

2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1;1;1)$.

   - $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1-1;\dfrac{1}{2}-0;0-\dfrac{1}{2}\right)=\left(0;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

     $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IJ}$

- $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}-1\,;\,1-\frac{1}{2}\,;\,0-0\right)=\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

  $\overrightarrow{\mathrm{AG}}.\overrightarrow{\mathrm{JK}}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{JK}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK).

(b) Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK) ; le plan (IJK) est l'ensemble des points $\mathrm{P}\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{IP}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$:

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IP}}$ a pour coordonnées $\left(x-1\,;\,y-0\,;\,z-\frac{1}{2}\right)=\left(x-1\,;\,y\,;\,z-\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}.\overrightarrow{\mathrm{IP}}=0 \iff 1\times(x-1)+1\times y+1\times\left(z-\frac{1}{2}\right)=0 \iff x+y+z-\frac{3}{2}=0$

Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\frac{3}{2}=0$.

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$; donc le point M a pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$.

(a) $\mathrm{IM}^2=(t-1)^2+(t-0)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\frac{1}{4}=3t^2-3t+\frac{5}{4}$

(b) Le trinôme ax^2+bx+c avec $a>0$ est minimal pour $x=-\frac{b}{2a}$, donc $3t^2-3t+\frac{5}{4}$ est minimal pour $t=-\frac{-3}{2\times 3}$ donc pour $t=\frac{1}{2}$.

MI^2 donc MI est minimal pour $t=\frac{1}{2}$; cela correspond au point M_m de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

4. (a) Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\frac{3}{2}=0$ et le point M_m a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

$x_{\mathrm{M}_m}+y_{\mathrm{M}_m}+z_{\mathrm{M}_m}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$ donc $\mathrm{M}_m\in$ (IJK)

(b) Les points I et M_m appartiennent au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK) ; on en déduit que les droites (IJ) et (AG) sont orthogonales.

Mais le point M_m est le milieu de [AG] donc il appartient à (AG).

On peut donc en déduire que les droites (IM_m) et (AG) sont perpendiculaires en M_m.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IM}_m}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}-1\,;\,\frac{1}{2}-0\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}.\overrightarrow{\mathrm{IM}_m}=0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times\frac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{IM}_m}$ donc la droite (IM_m) est orthogonale à la droite (BF).

Mais le point I appartient aux deux droites (IM_m) et (BF) donc on peut dire que les droites (IL) et (BF) sont perpendiculaires en I.

Correction : Bac S – Liban – 31 mai 2016

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre J. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AK}\right)$.

1. (a) Montrons que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   On sait que les deux pyramides ABCDE et ABCDF sont identiques, et que toutes les arêtes ont la même longueur 1. Ce sont donc des pyramides régulières à base carrée et E comme F ont pour projeté orthogonal sur ABCD le point I, centre du carré ABCD.

   I est le centre du carré ABCD de côté 1, c'est donc le milieu de [AC] et on a :

   $AC = \sqrt{2}$ et $AI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Comme I est le projeté orthogonal de E sur ABCD, le triangle AEI est rectangle en I et on a :

   $IE^2 = AE^2 - AI^2 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. Et finalement $\boxed{IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

   I est le milieu de [BD] et $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, d'où : $\boxed{I\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)}$.

   On a : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$, d'où : $\boxed{E\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

   Par raison de symétrie par rapport à ABCD : $\boxed{F\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

   (b) Montrons que le vecteur $\vec{n}\left(0\ ;\ -2\ ;\ \sqrt{2}\right)$ est normal au plan (ABE).

   On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n} = 0$.

   $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABE donc $\vec{n}(0\ ;\ -2\ ;\ \sqrt{2})$ est normal au plan (ABE).

   (c) Déterminons une équation cartésienne du plan (ABE).

   (ABE) passe par le point $A(0;0;0)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(0\ ;\ -2\ ;\ \sqrt{2})$.

   On en déduit une équation cartésienne de (ABE) : $\boxed{-2y + \sqrt{2}z = 0}$.

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   (a) Démontrons que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

Dans le plan (FDC) considérons les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DF}$ qui ne sont pas colinéaires.

Comme ABCD est un carré on : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et on a : $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

D'autre part sachant que D$(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, on a : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$. On a : $\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{FD}\cdot\vec{n} = 0$.

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC) : $\vec{n}\left(0\ ;\ -2\ ;\ \sqrt{2}\right)$ est normal au plan (FDC)

Les plans (FDC) et (ABE) admettent un même vecteur normal donc ils sont parallèles.

(b) Déterminons l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

Comme M appartient à [EM] et que M est le milieu de [FD], M appartient à l'intersection de (EMN) et (FDC).

Comme (FDC) et (ABE) sont parallèles, le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.

Or l'intersection de (EMN) et (ABE) est la droite (EN).

On en déduit que l'intersection de (EMN) avec (FDC) est la droite parallèle à (EN) passant par M.

(c) Construisons (voir annexe) la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Soit G l'intersection de la parallèle à (EN) passant par M avec le plan (BCF) : c'est l'intersection de (EM) avec (CD).

Le segment [GM] est la section de la face FCD par le plan (EMN).

Par raison de symétrie, les plan (CDE) et (ABF) sont parallèles.

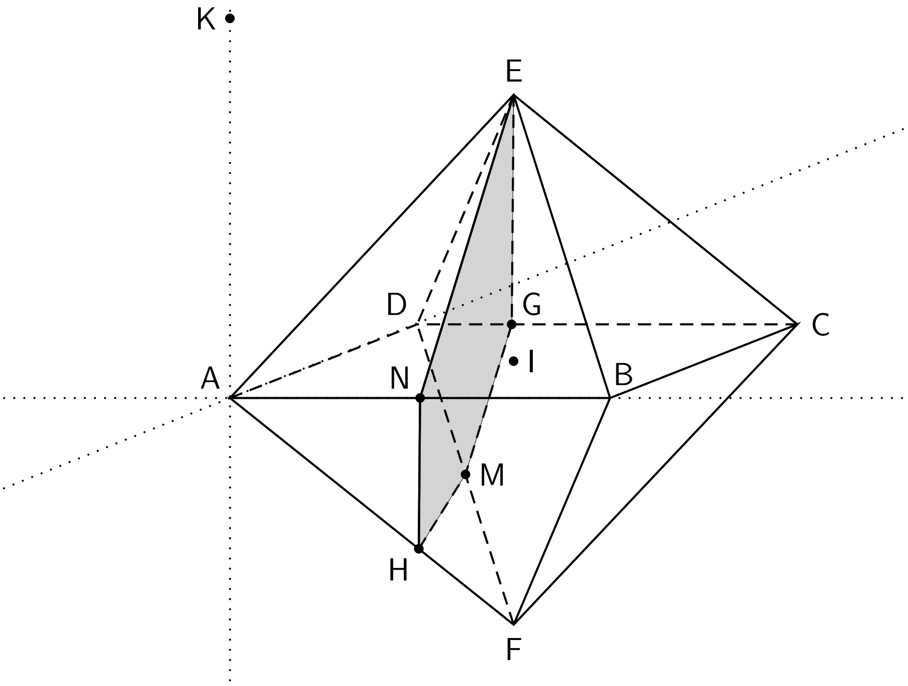
En tenant le même raisonnement que précédemment, on montre que le plan (EMN) les coupe suivant deux droites parallèles.

Or l'intersection de (EMN) avec le plan (CDE) est la droite (EG). Alors le plan(EMN) coupe le plan(ABF) suivant la parallèle à (ERG) passant par N.

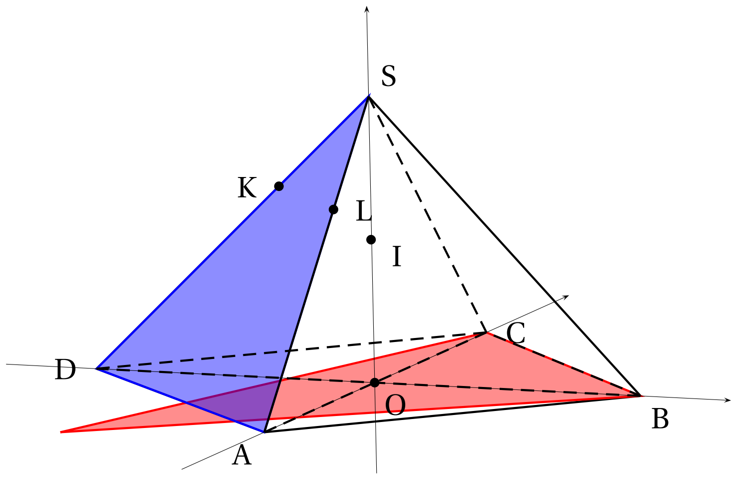
Cette droite coupe (AF) en H.

Le segment [NH] est la section de la face ABF par le plan (EMN).

On en déduit que le polygone ENHMG est la section du solide par le plan (EMN).


K
E
D
G
C
I
A
N
B
M
H
F

Correction : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB $=1$.

On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. On sait que les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et de même longueur, on en déduit que $\overrightarrow{\text{OB}}$ et $\overrightarrow{\text{OC}}$ sont orthogonaux et de même norme 1.

   (SO) est la hauteur de la pyramide, elle est donc perpendiculaire à la bas ABCD, on en déduit que $\overrightarrow{\text{OS}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{OB}}$ et à $\overrightarrow{\text{OC}}$; de plus on sait que SOC est rectangle en O avec OC $=$ OB $=1$ et SC $=\sqrt{2}$ donc SO $=1$.

   Finalement $\left(\mathbf{O}\ ;\ \overrightarrow{\mathbf{OB}},\ \overrightarrow{\mathbf{OC}},\ \overrightarrow{\mathbf{OS}}\right)$ **est orthonormé**

2. (a) Dans $\left(\text{O}\ ;\ \overrightarrow{\text{OB}},\ \overrightarrow{\text{OC}},\ \overrightarrow{\text{OS}}\right)$ on a $\text{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $\text{D}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)$

   donc $\overrightarrow{\text{SD}}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{SK}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On en déduit $\text{K}\left(-\frac{1}{3}\ ;\ 0\ ;\ \frac{2}{3}\right)$

   (b) $\text{I}\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $\text{B}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$

   donc $\overrightarrow{\text{BI}}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{BK}}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{\text{BK}}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\text{BI}}$

   On peut donc conclure que B, I **et** K **sont alignés**

   (c) (BCI) coupe (ABC) suivant la droite (BC)

   (SAD) coupe (ABC) suivant la droite (AD)

   or (AD)//(BC) donc d'après le théorème du toit, (BCI) et (SAD) se coupent suivant une parallèle à (AD) et comme on sait déjà que K appartient à cette intersection, on en déduit que la parallèle à (AD) passant par K appartient à (BCI) et coupe [SA]

   On a bien (AD)//(KL)

(d) $(KL)//(AD)$ donc K et L ont la même cote

$L \in (SOC)$ donc son abscisse est nulle

$L\left(0\ ;\ y_L\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$

Dans SAD, on a $K \in [SD]$, $L \in [SA]$ et $(KL)//(AD)$ donc d'après le théorème de Thalès on a $\dfrac{SL}{SA} = \dfrac{SK}{SD}$?$SL = SK$ car $SA = SD$

$SK^2 = \dfrac{2}{9}$ voir 2.a. or $SL^2 = y_L^2 + \dfrac{1}{9}$?$y_L^2 = \dfrac{1}{9}$ or $y_L < 0$

Finalement $L\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)$

3. (a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI} = 0$

Donc $\vec{n}$ **est normal au plan** (BCI) car il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

(b) $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

on remarque que $\vec{n} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{DS}$ donc $\vec{n}$, $\overrightarrow{\mathbf{AS}}$ **et** $\overrightarrow{\mathbf{DS}}$ **sont coplanaires**

(c) $\vec{n}$ est normal au plan (BCI) et $\vec{n}$ est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires du plan (SAD)

On en déduit que $(BCI) \perp (SAD)$

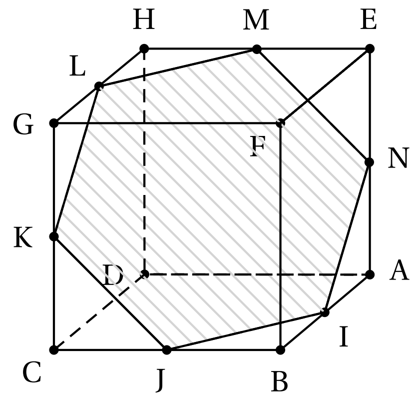
Correction : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :

D(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 0 ; 0), A(0 ; 1 ; 0), H(0 ; 0 ; 1) et E(0 ; 1 ; 1).



Soit I le milieu de [AB].

Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [BC], [CG], [GH], [HE] et [AE].

1. (a) $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires.

   $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 0-1+1 = 0$; $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = -1+0+1 = 0$.

   $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

   (b) $\mathscr{P}$ et (BGE) sont parallèles, donc $\overrightarrow{DF}$ est aussi un vecteur normal àu plan $\mathscr{P}$.

   Une équation cartésienne de ce plan est : $(x-x_I)+\left(y-y_I\right)+(z-z_I)=0 \iff \boxed{x+y+z=\dfrac{3}{2}}$.

2. Le point N appartient à [AE]. Ses coordonnées sont donc $(0 ; 1 ; z_N)$.

   Il appartient au plan $\mathscr{P}$ donc $0+1+z_N = \dfrac{3}{2} \iff z_N = \dfrac{1}{2}$.

   Ainsi N est le milieu de [AE].

3. (a) $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Une représentation paramétrique de (HB) est $\begin{cases} x = x_H - t \\ y = y_H - t \\ z - z_H + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -t \\ y = -t \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}}.$$

(b) $\overrightarrow{\text{HB}}.\overrightarrow{\text{DF}} = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$.

Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (HB) sont donc sécants.

On injecte les équations de (HB) dans léquation de $\mathscr{P}$.

$-t - t + 1 + t - \dfrac{3}{2} = 0 \Longleftrightarrow -t - \dfrac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Donc (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point $\boxed{\text{T}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)}$.

4. BGF est rectangle en F. Son aire est $\mathscr{A}(\text{BGF}) = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume du tétraèdre FBGE est alors $\mathscr{V}(\text{FBGE}) = \dfrac{\mathscr{A}(\text{BGF}) \times \text{FE}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

Correction : Bac S – Asie – 23 juin 2016

1. *Propriété des catadioptres*

   Un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC).

   Après réflexion sur le plan (OAB), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(a\,;b\,;-c)$.

   Après réflexion sur le plan (OBC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(-a\,;b\,;-c)$.

   Après réflexion sur le plan (OAC), le rayon a un vecteur directeur de coordonnées $(-a\,;-b\,;-c)$ donc qui est égal à $-\vec{v}$; le rayon final est donc parallèle au rayon initial.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan* (OBC)

   (a) La droite d_2 passe par le point $\mathrm{I}_1\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2\,;-1\,;1)$, donc d_2 a pour représentation paramétrique

   $$d_2 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-2t \\ y &=& 3-\ \ t \\ z &=& \quad\ \ t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

   (b) Le plan (OBC) a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

   Le plan (OBC) a pour équation $x=0$.

   (c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0\,;2\,;1)$.

   - $x_{\mathrm{I}_2}=0$ donc le point I_2 appartient au plan (OBC) d'équation $x=0$.
   - On regarde si la droite d_2 contient le point I_2 autrement dit s'il existe une valeur du paramètre t telle que $\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& 2-2t \\ 2 &=& 3-\ \ t \\ 1 &=& \quad\ \ t \end{array}\right.$
     C'est vrai pour $t=1$ donc $\mathrm{I}_2\in d_2$.
   - Le point I_1 appartient à la droite d_2 mais n'appartient pas au plan (OBC) car son abscisse est non nulle ; la droite d_2 n'est donc pas contenue dans le plan (OBC).

   On a donc démontré que le plan (OBC) et la droite d_2 étaient sécants en I_2.

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC)

   La droite d_3 passe par le point $\mathrm{I}_2\,(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$; elle a donc pour représentation paramétrique :

   $$d_3 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \quad\ 2t \\ y &=& 2-\ \ t \\ z &=& 1+\ \ t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

La plan (OAC) a pour équation $y=0$.

Pour déterminer le point d'intersection de la droite d_3 et du plan (OAC), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& 2-t \\ z &=& 1+t \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

$y=0$ et $y=2-t$ entraîne $t=2$ donc $x=4$ et $z=3$.

Le point I_3 d'intersection de d_3 et du plan (OAC) a pour coordonnées $(4\ ;\ 0\ ;\ 3)$.

4. *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\vec{u}\,(1;-2;0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

(a)
- Le plan $\mathscr{P}$ est défini par les droites d_1 et d_2 donc il a pour vecteurs directeurs les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ qui ne sont pas colinéaires.
- $\vec{u}.\vec{v_1}=-2+2+0=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v_1}$
- $\vec{u}.\vec{v_2}=-2+2+0=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v_2}$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

(b) Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites d_1 et d_2 ; les trois droites d_1, d_2 et d_3 seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite d_3 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

On cherche une équation du plan $\mathscr{P}$.

Le plan $\mathscr{P}$ a le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur normal et il contient le point I_1 qui appartient à d_1 ; donc : $\mathscr{P}=\left\{\text{M}\ /\ \overrightarrow{\text{I}_1\text{M}}\perp\vec{u}\right\}$

Si on appelle $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ les coordonnées de M, les coordonnées de $\overrightarrow{\text{I}_1\text{M}}$ sont $(x-2\ ;\ y-3;\ z)$.

$\overrightarrow{\text{I}_1\text{M}}\perp\vec{u} \iff \overrightarrow{\text{I}_1\text{M}}.\vec{u}=0 \iff (x-2)(1)+(y-3)(-2)+z(0)=0 \iff x-2y+4=0$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $x-2y+4=0$.

La droite d_3 a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& 2-t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$.

En prenant $t=1$, on prouve que le point $\text{H}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ appartient à d_3.

Mais $x_{\text{H}}-2y_{\text{H}}+4=4\neq 0$ donc $\text{H}\notin\mathscr{P}$.

La droite d_3 n'est pas contenue dans $\mathscr{P}$ donc les trois droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan.

(c) Le plan $\mathscr{P}$ contient les droites d_1 et d_2 ; les trois droites d_1, d_2 et d_4 seront dans un même plan si et seulement si elles sont dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire si et seulement si la droite d_4 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

La droite d_4 représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC) ; le point d'intersection du rayon avec le plan (OAC) est le point $\mathrm{I}_3\,(4\ ;\ 0\ ;\ 3)$ donc $\mathrm{I}_3 \in d_4$.

$x_{\mathrm{I}_3} - 2y_{\mathrm{I}_3} + 4 = 8 \neq 0$ donc $\mathrm{I}_3 \notin \mathscr{P}$

La droite d_4 n'est pas contenue dans le plan $\mathscr{P}$, donc les trois droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.

Correction : Bac S – Antilles-Guyane – septembre 2016

1. Le point H a pour coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$.

$$\mathrm{M} \in (\mathrm{BH}) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}\, \overrightarrow{\mathrm{BM}} = t\overrightarrow{\mathrm{BH}} \iff \begin{cases} x-0 & = & t(1-0) \\ y-0 & = & t(1-0) \\ z-0 & = & t(1-0) \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{cases}$$

2. On a D$(1 ; 1 ; 0)$, E$(1 ; 0 ; 1)$ et G$(0 ; 1 ; 1)$.

   D'où $\overrightarrow{\mathrm{DE}}(0 ; -1 ; 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}(-1 ; 0 ; 1)$.

   Comme $\overrightarrow{\mathrm{BH}}(1 ; 1 ; 1)$ ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ et à $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$, soit à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG). Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ est donc normal au plan (DEG) : la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. D'après la question précédente une équation du plan (DEG) est :

   $\mathrm{M}(x ; y ; z) \in (\mathrm{DEG}) \iff 1x + 1y + 1z + d = 0$.

   On a par exemple D $\in$ (DEG) $\iff 1+1+0+d = 0 \iff d = -2$.

   Donc $\mathrm{M}(x ; y ; z) \in (\mathrm{DEG}) \iff x+y+z-2 = 0$.

4. les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la droite (Bh) et l'équation du plan (DEG) soit :

$$\begin{cases} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t \\ x+y+z-2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow 3t-2=0 \iff t = \frac{2}{3}.$$

   On a donc P$\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

5. On a :

$$\mathrm{PD}^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 ;$$

$$\mathrm{PE}^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 ;$$

$$\mathrm{PG}^2 = \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 .$$

   On a donc de façon évidente $\mathrm{PD}^2 = \mathrm{PE}^2 = \mathrm{PG}^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, soit PD = PE = PG.

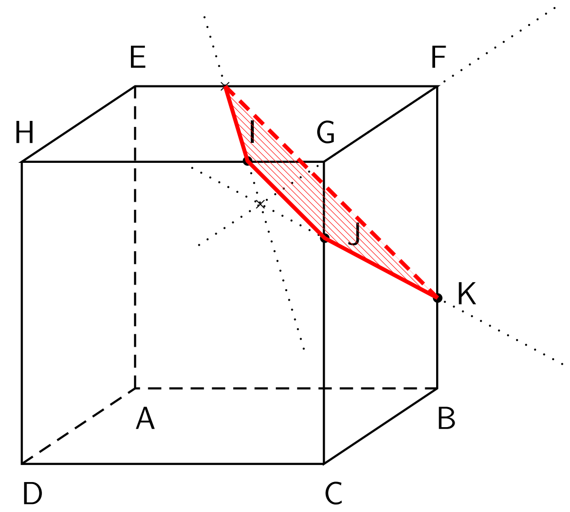
   Le point P est donc équidistant des trois sommets du triangle (DEG), c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (DEG), mais comme celui-ci est équilatéral car ses trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 1, le point P est orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle équilatéral (DEG).

Correction : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

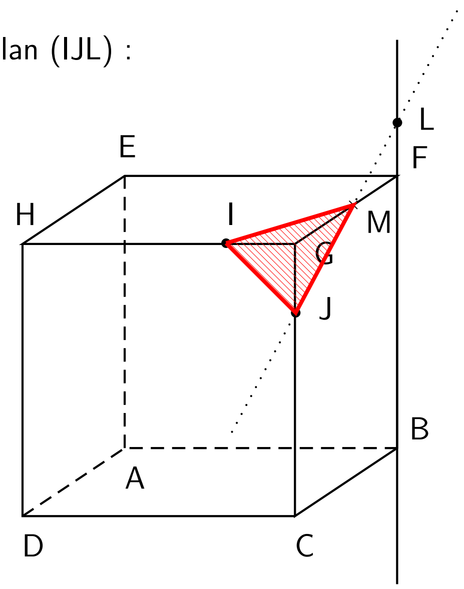
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

1. On trace la section du cube par le plan (IJK) :



2. On trace la section du cube par le plan (IJL) :



3. On cherche s'il existe un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral.

   On regarde la configuration de la question précédente et on se demande s'il n'y a pas une position du point L sur la droite (BF) telle que les points B, F et L soient dans cet ordre, pour laquelle le triangle IJM serait équilatéral.

   Soit K le point de [GF] tel que $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.

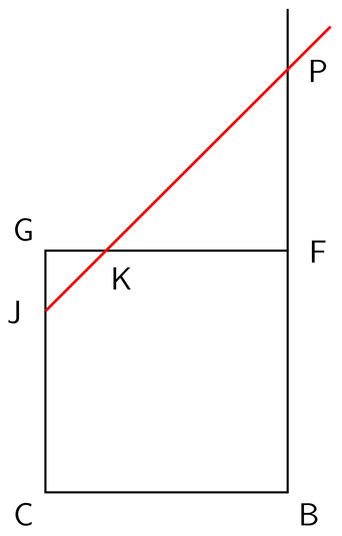
   Les trois triangles GIJ, GJK et GIK sont superposables donc IJ = JK = KJ ; le triangle IJK est donc équilatéral.

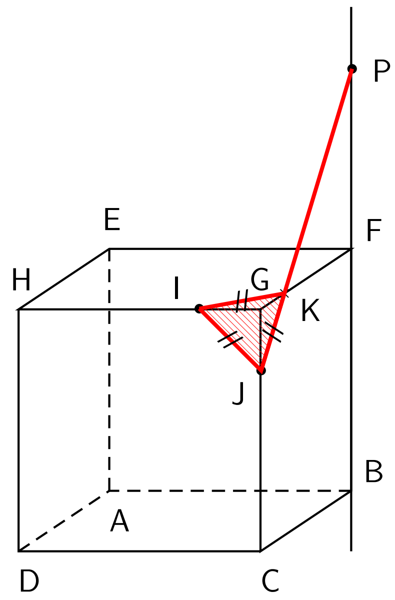
Soit P le point d'intersection des droites (JK) et (BF).

D'après le théorème de Thalès dans les triangles KGJ et KFP, on a $\dfrac{\text{FP}}{\text{GJ}} = \dfrac{\text{KF}}{\text{KG}}$.

Par construction du point K, on a $\dfrac{\text{KF}}{\text{KG}} = 3$ et on sait que, si on appelle a la longueur d'une arête du cube, $\text{GJ} = \dfrac{a}{4}$; on en déduit que $\text{FP} = \dfrac{3a}{4}$.

Le point P tel que le triangle IJK est équilatéral, est défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{\text{FP}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{BF}}$.

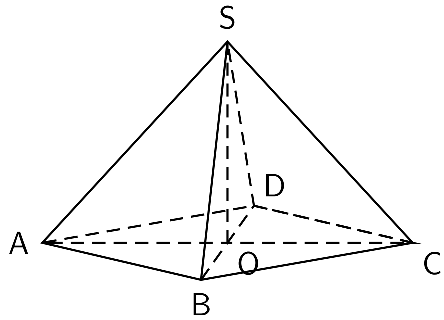




Correction : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

Partie A : Un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm.
On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



1. On sait que O est le centre du carré ABCD donc $\text{OA} = \text{OC}$.

   On sait que la pyramide SABCD est équilatère à base carrée donc $\text{SA} = \text{SC}$.

   On se place dans le triangle SAC.

   $\text{SA} = \text{SC}$ donc le triangle SAC est isocèle.

   $\text{OA} = \text{OC}$ donc O est le milieu de [AC] et donc (SO) est la médiane issue de S du triangle SAC.

   Comme le triangle SAC est isocèle de sommet principal S, la médiane issue de S est aussi une médiatrice ; on en déduit que (SO) est perpendiculaire à (AC).

   En se plaçant dans le triangle (SBD), on démontre de même que (SO) est perpendiculaire à (BD).

   La droite (SO) est perpendiculaire à deux droites sécantes (AC) et (BD) du plan (ABC) donc la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).

2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule $\text{V} = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

   - La base de la pyramide est le carré ABCD dont les diagonales mesurent 24 cm.

     Dans le triangle ABC isocèle rectangle en B on a, d'après le théorème de Pythagore, $\text{AB}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$ ce qui équivaut à $2\text{AB}^2 = 24^2$ ou $\text{AB}^2 = 288$.

     L'aire du carré ABCD est $\text{AB}^2 = 288 \text{ cm}^2$.
   - D'après le texte, $\text{SO} = \text{OA}$ donc $\text{SO} = \dfrac{24}{2} = 12$.

   Le volume de la pyramide est donc $\text{V} = \dfrac{288 \times 12}{3} = 1152 \text{ cm}^3$.

Partie B : Dans un repère

On considère le repère orthonormé $\left(\text{O} ; \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OS}}\right)$.
On peut donc dire que les points O, A, B et S ont pour coordonnées respectives $(0 ; 0 ; 0)$, $(1 ; 0 ; 0)$, $(0 ; 1 ; 0)$ et $(0 ; 0 ; 1)$.
Comme O est le milieu de [AC] et de [BD], on peut dire que les points C et D ont pour coordonnées respectives $(-1 ; 0 ; 0)$ et $(0 ; -1 ; 0)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].
   Donc P et Q ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

   (a) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ -3)$.

   - Le vecteur $\overrightarrow{PC}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 0\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.
     $\vec{n}.\overrightarrow{PC} = 1\times\left(-\frac{3}{2}\right)+0+(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{PC}$.
   - Le vecteur $\overrightarrow{QC}$ a pour coordonnées $\left(-1\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$.
     $\vec{n}.\overrightarrow{QC} = 1\times(-1)+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{QC}$.
   - Les vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

   Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{QC}$ non colinéaires, donc il est normal au plan (QPC).

   (b) Le plan (QPC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{CM}$ soient orthogonaux.
   Si M a pour coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, le vecteur $\overrightarrow{CM}$ a pour coordonnées $(x+1\ ;\ y\ ;\ z)$.
   $\overrightarrow{CM}\perp\vec{n} \iff \overrightarrow{CM}.\vec{n}=0 \iff 1\times(x+1)+1\times y-3\times z=0 \iff x+y-3z+1=0$
   Le plan (PQC) a pour équation $x+y-3z+1=0$.

2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).

   (a) La droite (SH) est orthogonale au plan (PQC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (PQC).
   La droite (SH) contient le point S de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.
   La droite (SH) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& k\\ y &=& k\\ z &=& 1-3k\end{array}\right.$ avec $k\in\mathbb{R}$

   (b) $\text{H}\in(\text{SH})\cap(\text{PQC})$ donc les coordonnées de H sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& k\\ y &=& k\\ z &=& 1-3k\\ x+y-3z+1 &=& 0\end{array}\right.$

   On a donc $k+k-3(1-3k)+1=0 \iff 11k=2 \iff k=\frac{2}{11}$.
   $1-3k=1-3\times\frac{2}{11}=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$
   Les coordonnées de H sont donc $\left(\frac{2}{11}\ ;\ \frac{2}{11}\ ;\ \frac{5}{11}\right)$.

   (c) $\text{SH}^2=\left(\frac{2}{11}-0\right)^2+\left(\frac{2}{11}-0\right)^2+\left(\frac{5}{11}-1\right)^2=\frac{4}{11^2}+\frac{4}{11^2}+\frac{36}{11^2}=\frac{44}{11^2}$ donc $\text{SH}=\frac{\sqrt{44}}{11}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$

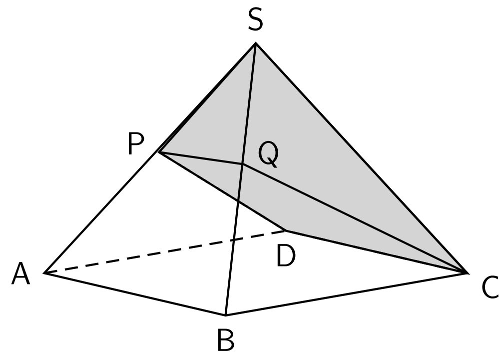
   La pyramide SPQCD a pour base le quadrilatère PQCD et pour hauteur SH ; son volume est donc $V' = \dfrac{SH \times \text{aire(PQCD}}{3} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{11}}{11} \times \dfrac{3\sqrt{11}}{8}}{3} = \dfrac{\dfrac{6}{8}}{3} = \dfrac{1}{4}$ unité de volume.

Partie C : Partage équitable

Pour l'anniversaire de ses deux jumelles Anne et Fanny, Madame Nova a confectionné un joli gâteau en forme de pyramide équilatère dont les diagonales du carré de base mesurent 24 cm.

Elle s'apprête à le partager en deux, équitablement, en plaçant son couteau sur le sommet. C'est alors qu'Anne arrête son geste et lui propose une découpe plus originale :

« Place la lame sur le milieu d'une arête, parallèlement à un côté de la base, puis coupe en te dirigeant vers le côté opposé ».



Fanny a des doutes, les parts ne lui semblent pas équitables.

Dans le repère de la partie B, la longueur OA est égale à une unité de longueur et à 12 cm. Donc l'unité de longueur vaut 12 cm et l'unité de volume vaut $12^3 = 1728$ cm^3.

Le volume de la pyramide SABCD est égal à 1 152 cm^3.

Le volume de la pyramide SPQCD est égal à 0,25 unité de volume, soit $0,25 \times 1728 = 432$ cm^3.

Or $\dfrac{1152}{2} = 576 \neq 432$ donc le partage proposé par Fanny n'est pas équitable.