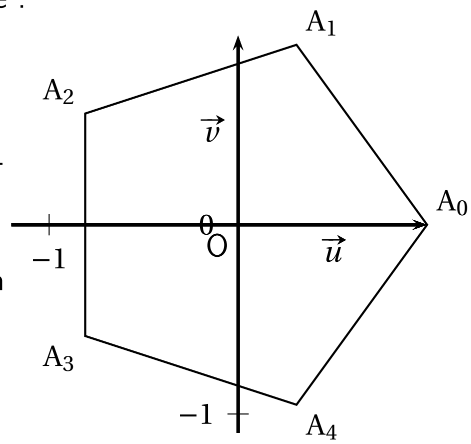
Annales 2016 - Nombres complexes

I Sujet : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le pentagone régulier $\mathrm{A_0A_1A_2A_3A_4}$, de centre O tel que $\overrightarrow{\mathrm{OA_0}} = \vec{u}$.
On rappelle que dans le pentagone régulier $\mathrm{A_0A_1A_2A_3A_4}$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$ et $\mathrm{A_4}$ appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\dfrac{\mathrm{i}}{2}$.

   Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe le segment [BJ] en un point K.

   Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. (a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point $\mathrm{A_2}$. Justifier brièvement.

   (b) Démontrer que $\mathrm{BA_2}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

   (c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

▶ Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\rightarrow \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

   En déduire, grâce à ces résultats, que $\mathrm{BA_2} = \mathrm{BK}$.

3. Dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{u}, \vec{v})$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

II Sujet : Bac S – Liban – 31 mai 2016

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.

On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

III Sujet : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $0; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+\mathrm{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1+\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

IV Sujet : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

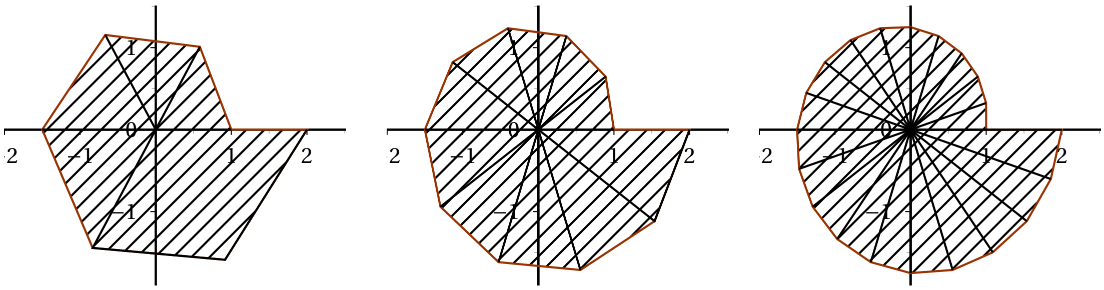
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Par exemple, pour les entiers $n=6$, $n=10$ et $n=20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n=6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1+\dfrac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle $\mathrm{OM_0M_1}$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.
2. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\right)$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right)$.

   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right)$.
3. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle $\mathrm{OM}_k\mathrm{M}_{k+1}$ est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
4. On admet que l'aire du triangle $\mathrm{OM}_k\mathrm{M}_{k+1}$ est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $\mathrm{A}_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à $n-1$
	A prend la valeur $\mathrm{A}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $\mathrm{A}_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{A}_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

   Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $\mathrm{A}_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		**Tant que**............
L7		n prend la valeur $n+1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n-1$
L10		A prend la valeur $\mathrm{A}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	**SORTIE :**	**Afficher** ...

V Sujet : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2| = 1$.

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax$.

   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel a.

VI Sujet : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. (a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6

   (b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

   (c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?

   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

VII Sujet : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. (a) Pour tout nombre réel t positif, déterminer une relation entre

   $P(X \leqslant 125 - t)$ et $P(X \geqslant 125 + t)$.

   (b) On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture. En utilisant la relation précédente, déterminer

   $P(121 \leqslant X \leqslant 129)$.

2. Déterminer une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que

   $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $\sigma = 2$.

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

   (a) On choisit au hasard un pot de confiture de la production. Déterminer la probabilité que ce pot soit conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

   (b) On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme ? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} près.

4. On admet que la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un pot de confiture soit conforme est $0,988$.

   On choisit au hasard 900 pots dans la production. On constate que 871 de ces pots sont conformes. Au seuil de 95 % peut-on rejeter l'hypothèse suivante : « La machine est bien réglée » ?

VIII Sujet : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué **un point par réponse exacte correctement justifiée**. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2\text{i}|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

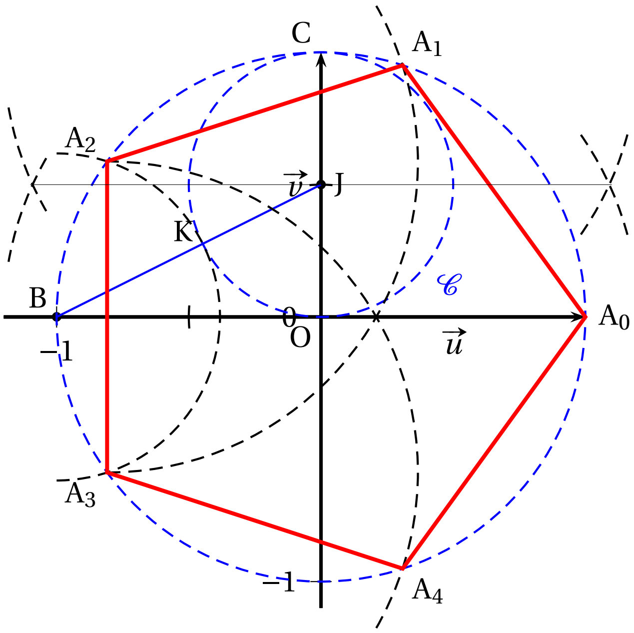
Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right)=0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\text{i}\right)^8$.

Correction : Bac S – Pondichery – 22 avril 2016

1. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBJ rectangle en O donne :
   $\mathrm{BJ}^2=\mathrm{BO}^2+\mathrm{OJ}^2=1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}\Rightarrow \mathrm{BJ}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}.$
   $\mathrm{BK}=\mathrm{BJ}-\mathrm{KI}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
2. (a) L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{4\pi}{5}$. Donc $z_{\mathrm{A}_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$
   (b) $\mathrm{BA_2}^2=\left|z_{\mathrm{A}_2}-z_{\mathrm{B}}\right|^2=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}-(-1)\right|^2=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}+1\right|^2=\left|\cos\dfrac{4\pi}{5}+1+\mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right|^2$
   $=\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+1\right)^2+\sin^2\dfrac{4\pi}{5}=\cos^2\dfrac{4\pi}{5}+2\cos\dfrac{4\pi}{5}+1+\sin^2\dfrac{4\pi}{5}=2+2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$
   (c) D'après le logiciel de calcul formel, $\cos\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$ donc :
   $\mathrm{BA}_2^2=2+2\times\dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)=2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
   Donc $\mathrm{BA}_2=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ d'après le logiciel de calcul formel.
   On en déduit que $\mathrm{BA}_2=\mathrm{BK}$.
3. Procédé de construction (voir figure page **??**) :
   - Soit C le point de coordonnées $(0\,;\,1)$. La médiatrice de [OC] coupe l'axe des ordonnées au point J de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.
     On place le point B sur l'axe des abscisses, d'abscisse négative tel que OB = 2OJ, on construit [BJ] et le cercle $\mathscr{C}$ centré en J passant par O donc de rayon $\dfrac{1}{2}$;
   - on obtient le point K à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et du segment [BJ] ;
   - le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
   - le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle unitaire en A_1 ;
   - le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle unitaire en A_4 ;
   - le point A_0 est le point d'affixe 1.


C
A_1
A_2
$\vec{v}$
J
K
B
$\mathscr{C}$
A_0
0
O
$\vec{u}$
-1
A_3
-1
A_4

Correction : Bac S – Liban – 31 mai 2016

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} z_0 &= 0 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.

On considère le nombre complexe $z_\mathrm{A} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$.
   (a) Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

   Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = z_{n+1} - z_\mathrm{A} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 - (4+2\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 1 - 2\mathrm{i}$.

   Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n = \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(z_n - z_\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(z_n - 4 - 2\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 1 - 2\mathrm{i}$.

   Et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.

   (b) On va démontrer par récurrence que, pour tout n, la propriété $\mathscr{P}_n$: $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i})$ est vraie.

   - *Initialisation* : $u_0 = z_0 - z_\mathrm{A} = -z_\mathrm{A} = -4 - 2\mathrm{i}$; pour $n = 0$, $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i}) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^0 (-4-2\mathrm{i}) = -4-2\mathrm{i}$

     Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang quelconque $p \leqslant 0$, c'est-à-dire $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^p (-4-2\mathrm{i})$; on va la démontrer au rang $p+1$.

     $u_{p+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i}u_n = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^p (-4-2\mathrm{i}) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{p+1} (-4-2\mathrm{i})$

     Donc la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

   Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i})$

2. Démontrons que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}_n}$ a pour affixe $u_n = z_n - z_\mathrm{A}$, et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}_{n+4}}$ a pour affixe $u_{n+4} = z_{n+4} - z_\mathrm{A}$.

   Mais d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n+4} (-4-2\mathrm{i})$ et $u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i})$.

   On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4 u_n$.

   Mais $\left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^4 = \frac{1}{16}$

   On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+4} = \frac{1}{16}u_n$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}_{n+4}} = \frac{1}{16}\overrightarrow{\mathrm{AM}_n}$

   Ce qui prouve que, pour tout entier naturel n, les vecteurs sont colinéaires et par conséquent les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Correction : Bac S – Amérique du Nord – 1 juin 2016

1. $1+\mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   $= \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

   La distance maximale entre O et un point quelconque d'un côté du carré est 4.

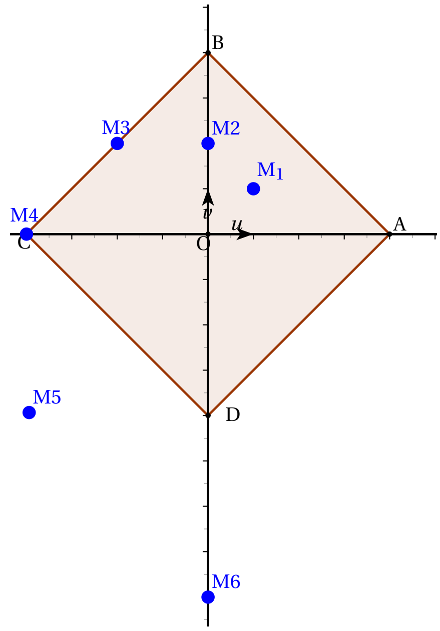
   Un point M_n sort du carré si $\mathrm{OM}_n > 4$

   or $\mathrm{OM}_n = |z_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n$

   $\mathrm{OM}_n > 4 ? \left(\sqrt{2}\right)^n > 4$

   $? \left(\sqrt{2}\right)^n > \left(\sqrt{2}\right)^4$

   $? n > 4$



2. Donc pour $n_0 = 5$, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD

Correction : Bac S – Centres étrangers – 8 juin 2016

Candidat/e/s n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1+\frac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$.

1. Déterminons la forme algébrique de z_1.

   On a : $z_1 = \left(1+\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} = \left(\frac{7}{6}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12}+\mathrm{i}\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

2. On a $z_0 = \mathrm{e}^0 = 1$ et $z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 2$.

3. Calculons la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle $\mathrm{OM}_0\mathrm{M}_1$.

   Soit H le pied de la hauteur issue de M_1 dans le triangle $\mathrm{OM}_0\mathrm{M}_1$. Comme O et M_0 sont pour abscisse 0, on a : $\mathrm{M}_1\mathrm{H} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

   L'aire du triangle $\mathrm{OM}_0\mathrm{M}_1$ est égale à : $\frac{1}{2}\mathrm{OM}_0 \times \mathrm{M}_1\mathrm{H} = \frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminons la longueur OM_k.

   On a $\mathrm{OM}_k = |z_k| = 1+\frac{k}{n}$, car pour tout entier naturel n est un entier supérieur ou égal à 2, tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, le module de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ vaut 1.

2. Soit k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

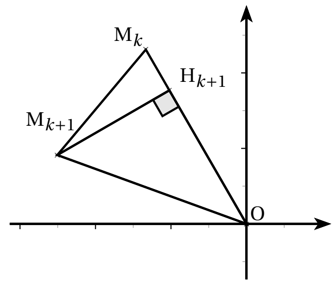
   $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\right) = \arg(z_k) = \frac{2k\pi}{n}$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) = \arg(z_k) = \frac{2(k+1)\pi}{n}$.

   Or $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) - \left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\right)$ à 2π près.

   On en déduit que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) = \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ à 2π près.

3. Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculons la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle $\mathrm{OM}_k\mathrm{M}_{k+1}$.

Soit H_{k+1} le pied de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle $\mathrm{OM}_k\mathrm{M}_{k+1}$.



On a : $\dfrac{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{H}_{k+1}}{\mathrm{OM}_{k+1}} = \sin\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right)$.

Mais $\mathrm{OM}_{k+1} = 1 + \dfrac{k+1}{n}$ et $\sin\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

On en déduit que pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

$\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{H}_{k+1} = \left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

4. On admet que l'aire du triangle $\mathrm{OM}_k\mathrm{M}_{k+1}$ est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $\mathrm{A}_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES	A est un nombre réel
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à $n-1$
	A prend la valeur $\mathrm{A} + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\left(1 + \dfrac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE	Afficher n

   On entre dans l'algorithme $n = 10$

   On obtient le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	10705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,848

5. On admet que $\mathrm{A}_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{A}_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

   En L6 tant que $\mathrm{A} < 7,2$

   En L13 Afficher n.

Correction : Bac S – Antilles-Guyane – 20 juin 2016

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(0;\vec{u},\vec{v})$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2|=1$.

1. Soit A le point d'affixe 2.

   $|z-2|=1 \iff \mathrm{AM}=1$ donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1.

2. $\mathrm{M}(z)\in\mathscr{C}\cap\mathscr{D} \iff \begin{cases}|z-2|=1\\ y=ax\end{cases} \iff \begin{cases}y=ax\\ |x-2+\mathrm{i}ax|=1\end{cases}$.

   $|x-2+\mathrm{i}ax|=1 \iff (x-2)^2+a^2x^2=1 \iff \left(1+a^2\right)x^2-4x+3=0$.

   Le discriminant est $\Delta=16-12\left(1+a^2\right)=4-12a^2=4\left(1-3a^2\right)$.

   Pour qu'il y ait une intersection, il faut que cette équation ait au moins une solution réelle, donc que $\Delta\geqslant 0$.

   On doit avoir $1-3a^2\geqslant 0$, donc $\boxed{-\sqrt{\frac{1}{3}}\leqslant a\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

   On peut alors distinguer trois cas :

   - **Premier cas.** $a\in\left]-\infty\,;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,\infty\right[$: aucun point d'intersection.
   - **Deuxième cas.** $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$: un seul point d'intersection (la droite et le cercle sont tangents).
   - **Troisième cas.** $a\in\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$: deux points d'intersection.

Correction : Bac S – Métropole – 12 septembre 2016

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. (a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$.

   $z_1 = 1 - \dfrac{1}{z_0} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - 2 = -1$; $z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{-1} = 1 + 1 = 2$;

   ensuite on retrouve $z_4 = \dfrac{1}{2}$, $z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

   (b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$.

   $z_1 = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$; $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = 1 - \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+1} = \dfrac{2-1+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$;

   $z_3 = 1 - \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}} = 1 - \dfrac{2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{-1+1+\mathrm{i}+\mathrm{i}}{1+1} = \mathrm{i} = z_0$;

   ensuite on retrouve $z_4 = z_1 = 1 + \mathrm{i}$, puis $z_5 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ et $z_6 = \mathrm{i}$.

   (c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

   Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$, pour $n \in \mathbb{N}$.

   On démontre cette conjecture par récurrence sur n :

   - **Initialisation :** on a bien $z_{3\times 0} = z_0$. L'égalité est vraie au rang 0.
   - **Hérédité :** supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$, alors

   $$z_{3(n+1)} = z_{3n+3} = 1 - \dfrac{1}{z_{3n+2}} = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{z_{3n+1}}} = 1 - \dfrac{z_{3n+1}}{z_{3n+1}-1} = \dfrac{z_{3n+1} - 1 - z_{3n+1}}{z_{3n+1}-1}$$

   $$= \dfrac{-1}{z_{3n+1}-1} = \dfrac{-1}{1 - \dfrac{1}{z_{3n}} - 1} = \dfrac{-1}{-\dfrac{1}{z_{3n}}} = z_{3n} = z_0.$$

   - **Conclusion :** on a donc démontré que $z_{3\times 0} = z_0$ et si $z_{3n} = z_0$, alors $z_{3(n+1)} = z_0$: d'après le principe de récurrence on a démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

2. Comme $2016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2016} = z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3. On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore

   $$z_0^2 = z_0 - 1 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = 0 \iff \left(z_0 - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_0 - \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z_0 - \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \\ z_0 - \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z_0 & = & \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z_0 & = & \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

   Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1 = z_0$.

   Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites (z_n) sont constantes.

Correction : Bac S – Nouvelle Calédonie – 19 novembre 2016

La société « Bonne Mamie » utilise une machine pour remplir à la chaaône des pots de confiture. On note X la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient, exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que X suit une loi normale de moyenne $\mu = 125$ et d'écart-type σ.

1. (a) La fonction de Gauss est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ c'est-à-dire $x = 125$.

   On a donc, pour tout réel t positif, $P(X \leqslant 125 - t) = P(X \geqslant 125 + t)$.

   (b) On sait que 2,3 % des pots de confiture contiennent moins de 121 grammes de confiture, donc $P(X < 121) = 0,023$.

   $$\begin{aligned} P(121 \leqslant X \leqslant 129) &= P\left(\overline{(X < 121) \cup (X > 129)}\right) \\ &= 1 - P(X < 121) - P(X > 129) \\ &= 1 - P(X \leqslant 121) - P(X \geqslant 129) \end{aligned}$$

   les évènements $(X \leqslant 121)$ et $(X \geqslant 129)$ étant incompatibles.

   D'après la question précédente, $P(X \leqslant 121) = P(X \leqslant 125 - 4) = P(X \geqslant 125 + 4) = P(X \geqslant 129)$; on en déduit : $P(121 \leqslant X \leqslant 129) = 1 - 2P(X \leqslant 125 - 4) = 1 - 2P(X \leqslant 121) = 1 - 0,046 = 0,954$.

2. On cherche une valeur arrondie à l'unité près de σ telle que $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68$.

   On se ramène à la loi normale centrée réduite de X en posant $Z = \dfrac{X - 125}{\sigma}$.

   $123 \leqslant X \leqslant 127 \iff 123 - 125 \leqslant X - 125 \leqslant 127 - 125 \iff \dfrac{-2}{\sigma} \leqslant \dfrac{X - 125}{\sigma} \leqslant \dfrac{2}{\sigma}$

   On a alors : $P(123 \leqslant X \leqslant 127) = 0,68 \iff P\left(-\dfrac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{2}{\sigma}\right) = 0,68$.

   à la calculatrice, on trouve l'intervalle centré en 0 correspondant soit $\dfrac{2}{\sigma} \approx 0,994$. à l'unité près, on prendra donc $\sigma \approx \dfrac{2}{0,994} \approx 2$ (ce qui est la valeur de σ supposée juste après dans l'énoncé !).

3. On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

   (a) À la calculatrice, la probabilité qu'un pot soit conforme correspond à $P(120 \leqslant X \leqslant 130) \approx 0{,}9876$.

   (b) La probabilité qu'un pot ne soit pas conforme parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes correspond à

   $$\begin{aligned} P_{(X \leqslant 130)}\left(\overline{120 \leqslant X \leqslant 130}\right) &= \frac{P\left(\overline{(120 \leqslant X \leqslant 130)} \cap (X \leqslant 130)\right)}{P(X \leqslant 130)} \\ &= \frac{P(X \leqslant 120)}{P(X \leqslant 130)} \approx \frac{0,00621}{0,992379} \\ &\approx 6,1 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

4. Comme $900 \geqslant 30$, $900 \times 0,988 \geqslant 5$ et $900 \times (1-0,988) \geqslant 5$, les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace sont vérifiées et un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{95\%} &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\
&= \left[0,988 - 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}}\,;\, 0,988 + 1,96\sqrt{\frac{0,988(1-0,988)}{900}}\right] \\
&\approx [0,980\,;\,0,996]\,.
\end{aligned}$$

Comme $f_{\text{obs}} = \dfrac{871}{900} \approx 0,968 \notin \mathrm{I}_{95\%}$, on rejette l'hypothèse « La machine est bien réglée » au seuil des 95%.

Correction : Bac S – Amérique du Sud – 22 novembre 2016

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Proposition 1

L'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite qui passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition vraie

- Soit B le point d'affixe $b = 4$ et C le point d'affixe $c = -2\imath$; on appelle M le point d'affixe z.

  $|z-4| = |z+2i| \iff |z-b| = |z-c| \iff \text{MB} = \text{MC}$

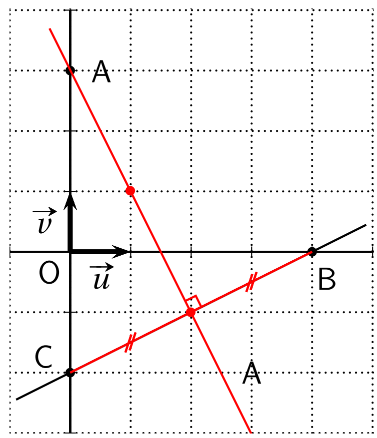
  Donc l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est la médiatrice Δ du segment [BC].

- On appelle a l'affixe du point A.

  $\text{AB} = |b-a| = |4-3\imath| = \sqrt{16+9} = 5$

  $\text{AC} = |c-a| = |-2\imath-3\imath| = |-5\imath| = 5$

  Donc le point A est à égale distance de B et de C ; il appartient donc à la droite Δ, médiatrice de [BC].



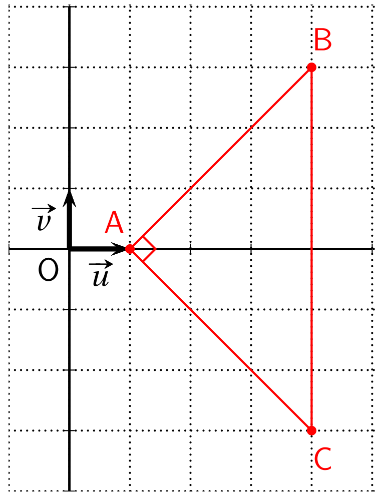
L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est donc la droite médiatrice du segment [BC] et cette droite passe par le point A d'affixe 3i.

Proposition 2

Soit (E) l'équation $(z-1)\left(z^2-8z+25\right) = 0$ où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition vraie

- L'équation $z-1=0$ a pour solution le nombre $a=1$ affixe d'un point appelé A.
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-8z+25=0$; $\Delta=64-100=-36$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées $b=\dfrac{8+6\imath}{2}=4+3\imath$ et $c=4-3\imath$.
  Ces deux nombres complexes b et c sont les affixes de deux points qu'on appelle B et C.
- L'équation (E) a donc trois solutions qui sont les affixes des trois points A, B et C.
- $\text{AB}^2=|b-a|^2=|4+3\imath-1|^2=|3+3\imath|^2=9+9=18$
  $\text{AC}^2=|c-a|^2=|4-3\imath-1|^2=|3-3\imath|^2=9+9=18$
  $\text{BC}^2=|c-b|^2=|4-3\imath-4-3\imath|^2=|-6\imath|^2=36$
- $18+18=36$ donc $\text{AB}^2+\text{AC}^2=\text{BC}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.



Donc les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle.

Proposition 3

$\dfrac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8$.

Proposition fausse

Soit z le nombre complexe $-\sqrt{3}+\imath$; on cherche θ un argument de z.

$|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}=\sqrt{4}=2$

On cherche donc θ tel que $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$; un argument de z est donc $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

D'après le cours, un argument de z^8 est $8\theta=\dfrac{40\pi}{6}\equiv\dfrac{2\pi}{3}\pmod{2\pi}$.

Les nombres $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$ ne sont pas congrus modulo 2π donc la proposition est fausse.