Exercices sur les probabilités

Exercice 1.

On considère qu'à un concours, un candidat a 20 % de chances de réussir.

On prend un groupée 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux candidats réussissent ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?
4. Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 candidats qui passent le concours.

Exercice 2. – Polynésie juin 2018

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,
   $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$
   $b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et
   $c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.
4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

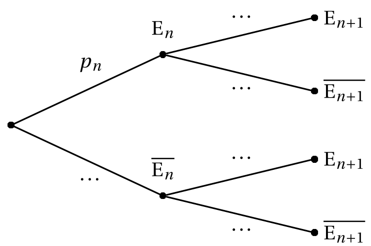
Exercice 3. – Pondichéry avril 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



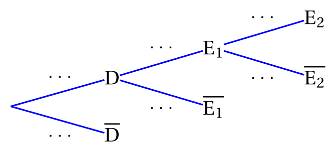
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.
   (d) En déduire la limite de la suite (p_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4. – Métropole juin 2012

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   - E_2 : « Le candidat est recruté ».

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
   (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.
2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.
3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

Exercice 5. – Métropole juin 2011

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V), P_V(T), P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. (a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 6. – Asie juin 2012

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.
   Démontrer que $p = 0,42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   (a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
   (c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p(Y_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
   (b) crire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k
2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 7. – Baccalauréat S Extrait Centres étrangers 11 juin 2018

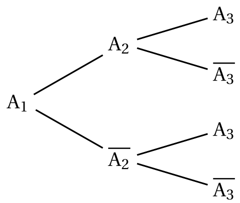
Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, relatif aux trois premières semaines.
   (b) Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
   (c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 8. – Baccalauréat ES Amérique du Sud–17 novembre 2014

Une bibliothèque municipale dispose pour ses usagers de deux types de livres : les livres à support numérique et les livres à support papier.

Le service des prêts observe que 85 % des livres empruntés sont à support papier.
Un livre est rendu dans les délais s'il est rendu dans les quinze jours suivant son emprunt.
Une étude statistique montre que 62 % des livres à support numérique sont rendus dans les délais et que 32 % des livres à support papier sont rendus dans les délais.

Un lecteur, choisi au hasard, emprunte un livre de cette bibliothèque. On note :

- N l'évènement : « le livre a un support numérique » ;
- D l'évènement : « le livre est rendu dans les délais ».

Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

1. La probabilité de D sachant N est égale à :

   a. 0,62 **b.** 0,32 **c.** 0,578 **d.** 0,15

2. $P\left(\overline{N} \cap \overline{D}\right)$ est égale à :

   a. 0,907 **b.** 0,272 **c.** 0,578 **d.** 0,057

3. La probabilité de l'évènement D est égale à :

   a. 0,272 **b.** 0,365 **c.** 0,585 **d.** 0,94

4. On appelle X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,62$.

   4.1 La probabilité à 10^{-3} près d'avoir $X \geqslant 1$ est :

   a. 0,8 **b.** 0,908 **c.** 0,092 **d.** 0,992

   4.2 L'espérance de X est :

   a. 3,1 **b.** 5 **c.** 2,356 **d.** 6,515