Divers exercices

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+15x-10}{3x^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

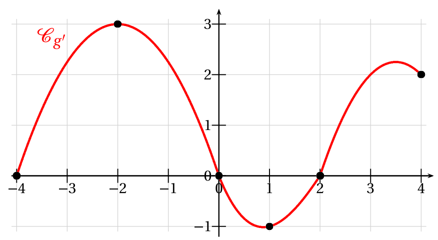
1. (a) Montrer que , pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-15x+20}{3x^3}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que , pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = \dfrac{10x-20}{x^4}$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$ et. en déduire la convexité de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

Exercice 2.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou labsence de réponse à une question ne rapporte ni nenlève de point. Pour répondre, ***cocher sur le sujet*** *la bonne réponse. Aucune justification nest demandée.*

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,
   $u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
   On peut affirmer que :
   (a) Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
   (b) La suite (w_n) converge vers 1.
   (c) La suite (u_n) est minorée par 1.
   (d) La suite (w_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{3n}{n+2}$
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$
   (d) On ne peut pas déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{2x}$.
   La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :
   (a) $f'(x) = 2xe^{2x}$
   (b) $f'(x) = 2e^{2x}$
   (c) $f'(x) = (2+x)e^{2x}$
   (d) $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$
4. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?
   (a) -1
   (b) 0
   (c) $\dfrac{1}{2}$
   (d) $+\infty$
5. On suppose que g est une fonction dérivable sur lintervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



   On peut affirmer que :
   (a) g admet un maximum en -2
   (b) g est décroissante sur lintervalle $[1\ ;\ 2]$.
   (c) $g(0) = 1$
   (d) g admet un minimum en 0.

Exercice 3. – Polynésie septembre 2019

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $\mathrm{T}_0 = 0,9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n - 0,1\mathrm{T}_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.

   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $\mathrm{T}_{n+1} = f(\mathrm{T}_n)$.

   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   (b) Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant \mathrm{T}_{n+1} \leqslant \mathrm{T}_n \leqslant 1$.

   (c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

   (d) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.

   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

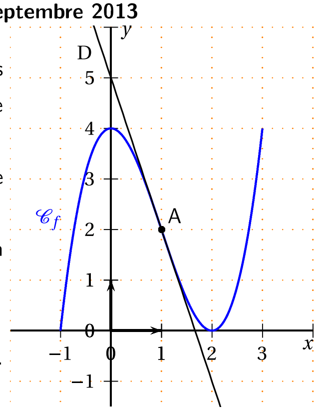
Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{P}(t) = \dfrac{1000}{0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $\mathrm{P}'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $\mathrm{P}'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ telle que $\mathrm{P}(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 4. – Baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion 13 septembre 2013



On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$, deux fois dérivable sur cet intervalle et dont la représentation $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est proposée ci-contre.

On désigne par f' la fonction dérivée de f, par f'' la fonction dérivée seconde de f, par F une primitive de f (On admet l'existence de F).

La droite D est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1, seul point en lequel la courbe traverse la tangente.

L'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 4$.

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des quatre propositions est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la proposition choisie.

Une réponse juste apporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. (a) f est convexe sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$ (b) f est concave sur l'intervalle $]1\,;\,2[$
   (c) f est convexe sur l'intervalle $]1\,;\,3[$ (d) $\mathscr{C}_f$ est au -dessus de sa tangente au point d'abscisse -1.
2. (a) $f(1) = 5$ (b) $f'(1) = 2$ (c) $f''(1) = -3$
   (d) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x + 5$.
3. (a) $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,2[$.
   (b) f' est croissante sur l'intervalle $]1\,;\,2[$.
   (c) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 2$
   (d) $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $]-2\,;\,-1[$.