Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En déduire que, pour tout x>-1, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}\geqslant 1$.

Exercice 2.

A. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 30]$ par : $f(x)=0,4x+1+\mathrm{e}^{-0,4x+1}$.

1. Montrer que, pour tout x dans $[0\,;\,30]$, on a : $f'(x)=0,4(1-\mathrm{e}^{-04x+1})$.
2. Résoudre dans $[0\,;\,30]$ linéquation $1-\mathrm{e}^{-04x+1}>0$.
3. En déduire les variations de f sur $[0\,;\ 30]$. On donnera larrondi à 10^{-2} de $f(0)$ et de $f(30)$.

B. Application économique

Une entreprise fabrique des paquets de cartes à leffigie de joueurs de football. On note x le nombre de paquets fabriqués, en centaine, avec $0\leqslant x\leqslant 30$, et on suppose que le coût de fabrication est égal, en centaine deuros, à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Calculer le coût de fabrication de 100 paquets, puis de 2 000 paquets, à leuro près.
2. On suppose que chaque paquet est vendu 2 €.
   (a) Soit x dans $[0\,;\,30]$. Montrer que la différence $\mathrm{B}(x)$ entre le chiffre daffaires et le coût de fabrication est de la forme : $mx+p-\mathrm{e}^{-0,4x+1}$, où m et p sont des réels à préciser.
   (b) Déterminer les variations de la fonction B ainsi définie sur $[0\,;\,30]$.
   (c) À laide de la calculatrice, indiquer à partir de combien de paquets lentreprise réalise un bénéfice, au paquet près.

Exercice 3. — Antilles-Guyane juin 2013

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$.

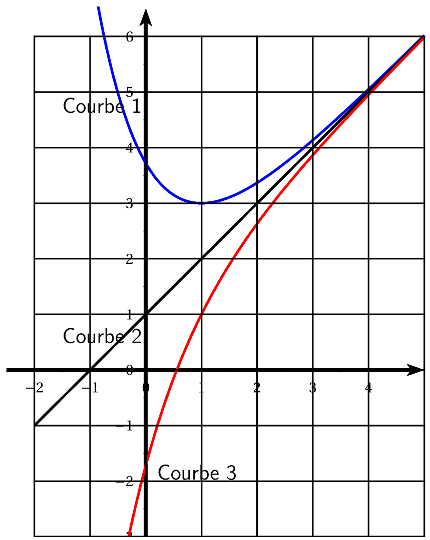
1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par : $g_m(x)=x+1-m\mathrm{e}^{-x}$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x)=0$ si et seulement si $f(x)=m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+1$ suivant les valeurs du réel m.



Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   (a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 5.

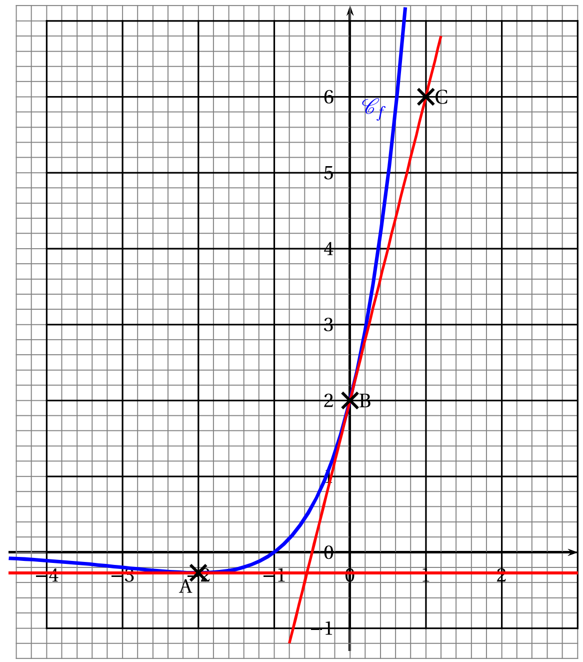
Partie A : lecture graphique

Dans le plan muni dun repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dune fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Dans la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les points A et B sont les points de $\mathscr{C}_f$ dabscisses respectives -2 et 0, et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en ces points.

On suppose que la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente en B passe par le point C(1 ; 6). On note f' la fonction dérivée de f.

Lire graphiquement les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier brièvement.



Partie B : Calcul algébrique

La fonction représentée sur le graphique précédent est la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = e^x(2x+2)$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^x(2x+4)$.
2. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer par le calcul, léquation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point dabscisse 0.
4. Justifier par le calcul les deux résultats suivants admis au début de lexercice :
   - La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
   - La tangente en B passe par le point C(1 ; 6).

Exercice 6.

Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2e^x - 1$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de g.
   (b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (d) Donner, à l'aide d'un tableau de valeurs, une valeur approchée à 0,1 près de la solution de léquation $g(x) = 0$.
   (e) En déduire le tableau de signes de g(x) sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction f nest pas définie en 0.
   (b) Déterminer une expression de la dérivée de f.
   (c) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
   (d) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 7. – Baccalauréat S Centres étrangers 11 juin 2018

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 20]$ par : $f(t) = (0,8t+0,2)e^{-0,5t} + 0,03$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   (a) Calculer $f(20)$.
   (b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   (a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

   $t \leftarrow 1,75$
   $p \leftarrow 0,1$
   $V \leftarrow 0,7$
   Tant que $V > 0,035$
   $\quad t \leftarrow t + p$
   $\quad V \leftarrow (0,8t+0,2)e^{-0,5t} + 0,03$
   Fin Tant que

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   (a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 11]$ par : $F(t) = (-1,6t-3,6)e^{-0,5t} + 0,03t$.
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 11]$.

Exercice 8. – Baccalauréat ES/L Amérique du Sud–17 novembre 2014

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x)=(3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,4]$,
   $f'(x)=(7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
   Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
   (b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $\mathrm{F}(x)=(1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x$.
   (a) Montrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,4]$.
   (b) HORS PROGRAMME Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,4]$
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f''(x)=(3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
   (b) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 9. – Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie – 2 mars 2015

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$ par : $f(x)=(25x-32)\mathrm{e}^{-x}$.

On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$, sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

- $f'(x)=(57-25x)\mathrm{e}^{-x}$
- $f''(x)=(25x-82)\mathrm{e}^{-x}$

1. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$ (Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième).
2. Montrer que, sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$, la courbe C admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x)=1$.
   (a) Justifier que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[4\,;\,5]$.
   (b) On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=1$ sur l'intervalle $[4\,;\,5]$.

```
Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5

Traitement
Tant que b − a > 0,1 faire
    y prend la valeur f((a+b)/2)
    Si y > 1 alors
        a prend la valeur (a+b)/2
    Sinon b prend la valeur (a+b)/2
Fin de Tant que
Sortie
Afficher (a+b)/2
```

   Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.
   (c) Donner une valeur approchée de α au dixième.