Exercices sur les suites

Exercice 1.

Une personne loue un local à partir du 1er janvier 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial (cest-à-dire le loyer payé en 2007) est 24 000 € et le locataire sengage à occuper le local pendant neuf années complètes.

1. **Contrat 1** : Le loyer annuel augmente de 4 % par an. On note u_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et u_n le loyer payé en lannée $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 4 % par an.
   (a) Calculer u_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) et donner ses caractéristiques.
   (c) Donner lexpression de u_n en fonction de n. En déduire u_8 à 10^{-2} près.
   (d) Calculer la somme totale payée à lissue des neuf années de contrat. Arrondir à 10^{-2} près.
   (e) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel dépassera 36 000 euros.
2. **Contrat 2** : Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   On note v_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et v_n le loyer payé en lannée $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   (a) Calculer v_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) et donner ses caractéristiques.
   (c) Donner lexpression de v_n en fonction de n. En déduire v_8.
   (d) Calculer la somme totale payée à lissue des neuf années de contrat.
   (e) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel double.
3. **Bilan** : quel est le contrat le plus intéressant ?

Exercice 2.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$.
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $\mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 3.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

Exercice 4.

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

   Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x)=0,75x(1-0,15x)$.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x)=x$.

   On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   (c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-contre.

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def menace()
  u = 0,6
  n = 0
  while u > 0,02
      u = 0,75*u*(1-0,15*u)
      n = n+1
  return n
```


Exercice 5.

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.

Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.

Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.

On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019+n$. On a ainsi $u_0=300$.

Partie A

1. (a) Déterminer u_1.

   (b) Justifier, pour tout entier naturel n, que $u_{n+1}=0,95u_n+12$.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $200\leq u_{n+1}\leq u_n$.

   (b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-240$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n=60\times 0,95^n+240$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15 % d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Justifier que cet objectif ne sera pas atteint si la diminution des déchets suit les prévisions des experts.
2.

   (a) Recopier et compléter le programme écrit ci-dessous en Python afin qu'il affiche, après exécution, l'année à partir de laquelle la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15 % par rapport à 2019.

   (b) En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?

```
def seuil() :
    N = 2019
    U = 300
    while U... :
        N = N+1
        U = ...
    return N
```

Exercice 6. – Constante d'Euler

L'objectif est de montrer que les suites (u_n) et (v_n), définies pourtout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

convergent vers une limite commune γ appelée constante d'Euler.

1. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

   (b) Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

   Déterminer la limite de f en $+\infty$, étudier son sens de variation sur $[1\,;\,+\infty[$ et en déduire son signe sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. (a) Démontrer que, pout tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

   (b) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?

3. (a) Justifier que, pour tout n non nul, $v_n \leqslant u_n$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est minorée, que la suite (v_n) est majorée, que ces deux suites convergent et qu'elles ont la même limite.

   Cette limite commune est appelée constante d'Euler est notée γ.

4. Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.