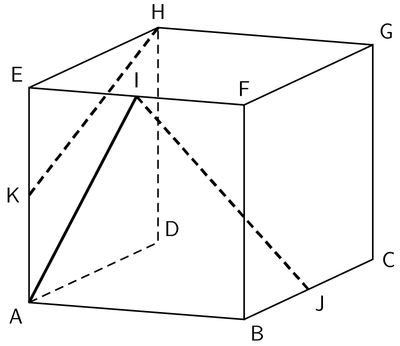
Exercices sur la géométrie dans l'espace

Exercice 1.

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

   Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

   On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$$

$$\text{et } d_2 : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t \\ z = 8+2t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L$(4\,;\,0\,;\,3)$ est le projeté orthogonal du point M$(5\,;\,3\,;\,1)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

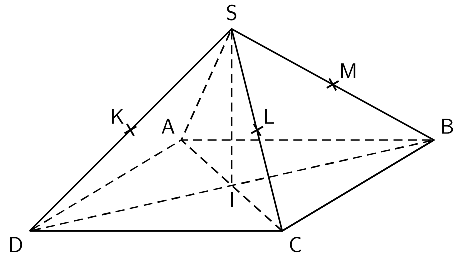
Exercice 2.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

   Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I\,;\,\overrightarrow{IC},\,\overrightarrow{IB},\,\overrightarrow{IS}\right)$.

   Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

   $I(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,A(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,B(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,C(1\,;\,0\,;\,0);D(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,S(0\,;\,0\,;\,1).$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

   a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

   Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   a. $P(2 ; 1 ; -1)$ **b.** $Q(-3 ; -4 ; 6)$ **c.** $R(-3 ; -4 ; -2)$ **d.** $T(-5 ; -5 ; 1)$

Exercice 3.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que ces deux vecteurs définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ est-il normal au plan $\mathscr{P}$?

Exercice 4.

A, B et C sont trois points de l'espace tels que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 60$ř.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5.

On considère un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer AB et AC.
3. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à 0,1řprès.

Exercice 6.

Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation cartésienne $10x + y - 2z - 2 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $-x + 6y + 2z - 2 = 0$.

Ces deux plans sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 7.

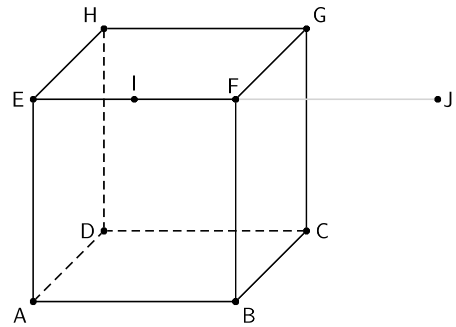
On considère dans l'espace muni d'un repère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+3y-z+2 = 0$ et $\mathscr{Q}$ d'équation $x + y - 2z + 5 = 0$.

1. Montrer que ces deux plans sont sécants.

   On note Δ l'intersection de ces plans.
2. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.

Exercice 8.

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

   (b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

   (c) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

   (d) Montrer quune équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   (b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.

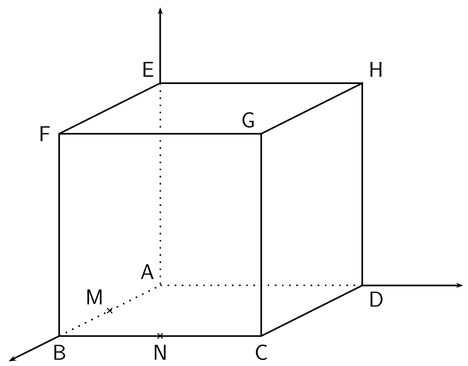
   Montrer que L est le point dintersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire dune base et h la hauteur associée à cette base.

   (a) Calculer le volume de la pyramide FBGI.

   (b) En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 9.

Dans le cube ABCOEFGH ci-dessous , on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points H, M et N.
2. On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.
   (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).

   On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Déterminer les coordonnées du point K.
3. On admet que les points H, M, N définissent un plan et que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.
   (a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN).
   (c) En déduire les coordonnées du point L.
4. Construire les points K et L puis la section du cube ABCDEFGH par le plan (HMN).