Bac 2023 : Programme l'épreuve de spécialité mathématiques

Programme complet de la spécialité mathématiques

https://cache.media.education.gouv.fr/file/SP1-MEN-22-1-2019/16/8/spe632_annexe_1063168.pdf

ou dans les **sommaires** de chaque chapitre que nous avons travaillé jusquà présent.

Programme du bac 2023 : (BO du 30 septembre 2022)

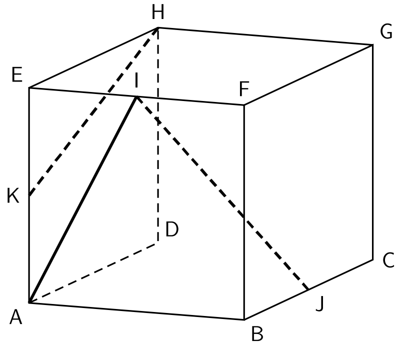
Lors de l'épreuve terminale dans l'enseignement de spécialité mathématiques, les candidats peuvent être évalués sur les parties suivantes du programme de la classe de terminale.

- **Partie « Algèbre et géométrie »**, uniquement les items suivants :
  - Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace
  - Orthogonalité et distances dans l'espace
  - Représentations paramétriques et équations cartésiennes
- **Partie « Analyse »**, uniquement les items suivants :
  - Suites
  - Limites des fonctions
  - Compléments sur la dérivation
  - Continuité des fonctions d'une variable réelle
  - Fonction logarithme
  - Primitives, équations différentielles, à l'exclusion du contenu suivant :
    - équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes
    - équation différentielle $y' = ay + b$
- **Partie « Probabilités »**, uniquement l'item suivant :
  - Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli
- **Partie « Algorithmique et programmation »** dans sa totalité

Exercices sur la géométrie dans l'espace

Exercice 1.

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

   Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

   On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$$

$$\text{et } d_2 : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t \\ z = 8+2t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

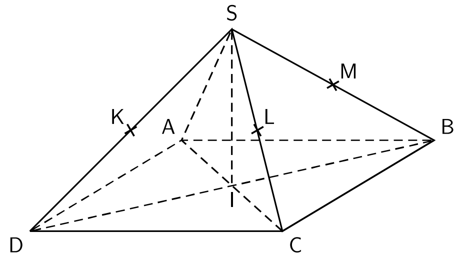
Exercice 2.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

   Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I\,;\,\overrightarrow{IC},\,\overrightarrow{IB},\,\overrightarrow{IS}\right)$.

   Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

   $I(0\,;\,0\,;\,0)$; $A(-1\,;\,0\,;\,0)$; $B(0\,;\,1\,;\,0)$; $C(1\,;\,0\,;\,0)$; $D(0\,;\,-1\,;\,0)$; $S(0\,;\,0\,;\,1)$.

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

   a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

a. $P(2 ; 1 ; -1)$ **b.** $Q(-3 ; -4 ; 6)$ **c.** $R(-3 ; -4 ; -2)$ **d.** $T(-5 ; -5 ; 1)$

Exercice 3.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k}\right)$.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que ces deux vecteurs définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ est-il normal au plan $\mathscr{P}$?

Exercice 4.

A, B et C sont trois points de l'espace tels que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 60$ř.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5.

On considère un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer AB et AC.
3. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à 0,1řprès.

Exercice 6.

Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation cartésienne $10x + y - 2z - 2 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $-x + 6y + 2z - 2 = 0$.

Ces deux plans sont-ils perpendiculaires ?

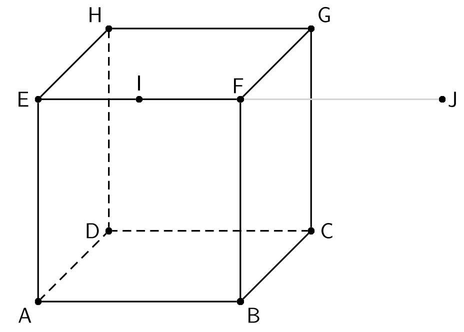
Exercice 7.

On considère dans l'espace muni d'un repère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+3y-z+2 = 0$ et $\mathscr{Q}$ d'équation $x + y - 2z + 5 = 0$.

1. Montrer que ces deux plans sont sécants.
   On note Δ l'intersection de ces plans.
2. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.

Exercice 8.

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.

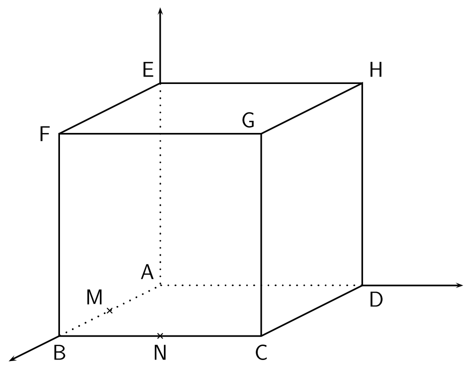


Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   (b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   (c) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   (d) Montrer quune équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point dintersection de la droite d et du plan (BGI).
3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire dune base et h la hauteur associée à cette base.
   (a) Calculer le volume de la pyramide FBGI.
   (b) En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 9.

Dans le cube ABCOEFGH ci-dessous , on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].



On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points H, M et N.
2. On admet que les droites (CD) et (MN) sont sécantes et on note K leur point d'intersection.
   (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).
   On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (CD) est
   $$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$
   (b) Déterminer les coordonnées du point K.
3. On admet que les points H, M, N définissent un plan et que la droite (CG) et le plan (HMN) sont sécants. On note L leur point d'intersection.
   (a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMN).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (HMN).
   (c) En déduire les coordonnées du point L.
4. Construire les points K et L puis la section du cube ABCDEFGH par le plan (HMN).

Exercices sur les suites

Exercice 1.

Une personne loue un local à partir du 1er janvier 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial (cest-à-dire le loyer payé en 2007) est 24 000 € et le locataire sengage à occuper le local pendant neuf années complètes.

1. **Contrat 1** : Le loyer annuel augmente de 4 % par an. On note u_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et u_n le loyer payé en lannée $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 4 % par an.
   (a) Calculer u_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) et donner ses caractéristiques.
   (c) Donner lexpression de u_n en fonction de n. En déduire u_8 à 10^{-2} près.
   (d) Calculer la somme totale payée à lissue des neuf années de contrat. Arrondir à 10^{-2} près.
   (e) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel dépassera 36 000 euros.
2. **Contrat 2** : Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   On note v_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et v_n le loyer payé en lannée $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   (a) Calculer v_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) et donner ses caractéristiques.
   (c) Donner lexpression de v_n en fonction de n. En déduire v_8.
   (d) Calculer la somme totale payée à lissue des neuf années de contrat.
   (e) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel double.
3. **Bilan** : quel est le contrat le plus intéressant ?

Exercice 2.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$.
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 3.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

Exercice 4.

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

   Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 0,75x(1-0,15x)$.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

   On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   (c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-contre.

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def menace()
  u = 0,6
  n = 0
  while u > 0,02
      u = 0,75*u*(1-0,15*u)
      n = n+1
  return n
```


Exercice 5.

On s'intéresse à la gestion des déchets ménagers au sein d'une grande agglomération.

Grâce au développement du recyclage, les experts estiment que la quantité de déchets de l'agglomération à incinérer devrait diminuer de 5 % par an. Par ailleurs, suite à la signature d'un contrat, cette agglomération s'engage à partir du 1er janvier 2020 à collecter et incinérer 12 000 tonnes de déchets supplémentaires par an provenant d'une commune voisine.

Durant l'année 2019, l'agglomération a incinéré 300 000 tonnes de déchets.

On admet que la situation peut être modélisée par une suite (u_n) dont le terme général u_n donne, pour tout entier naturel n, une estimation de la quantité (exprimée en millier de tonnes) de déchets incinérés durant l'année $2019+n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

Partie A

1. (a) Déterminer u_1.

   (b) Justifier, pour tout entier naturel n, que $u_{n+1} = 0,95u_n + 12$.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $200 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

   (b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 240$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que $u_n = 60 \times 0,95^n + 240$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

L'agglomération s'est fixé l'objectif d'une diminution de la quantité de déchets incinérés de 15 % d'ici 2039 par rapport à 2019.

1. Justifier que cet objectif ne sera pas atteint si la diminution des déchets suit les prévisions des experts.
2. (a) Recopier et compléter le programme écrit ci-dessous en Python afin qu'il affiche, après exécution, l'année à partir de laquelle la quantité de déchets incinérés aura diminué de 15 % par rapport à 2019.

   (b) En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?

```
def seuil() :
    N = 2019
    U = 300
    while U... :
        N = N + 1
        U = ...
    return N
```

Exercice 6. – Constante d'Euler

L'objectif est de montrer que les suites (u_n) et (v_n), définies pourtout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

convergent vers une limite commune γ appelée constante d'Euler.

1. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

   (b) Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

   Déterminer la limite de f en $+\infty$, étudier son sens de variation sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire son signe sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Démontrer que, pout tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

   (b) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?

3. (a) Justifier que, pour tout n non nul, $v_n \leqslant u_n$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est minorée, que la suite (v_n) est majorée, que ces deux suites convergent et qu'elles ont la même limite.

   Cette limite commune est appelée constante d'Euler est notée γ.

4. Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En déduire que, pour tout x>-1, on a : $\dfrac{e^x}{x+1}\geqslant 1$.

Exercice 2.

A. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 30]$ par : $f(x)=0,4x+1+e^{-0,4x+1}$.

1. Montrer que, pour tout x dans $[0\,;\,30]$, on a : $f'(x)=0,4(1-e^{-04x+1})$.
2. Résoudre dans $[0\,;\,30]$ linéquation $1-e^{-04x+1}>0$.
3. En déduire les variations de f sur $[0\,;\ 30]$. On donnera larrondi à 10^{-2} de $f(0)$ et de $f(30)$.

B. Application économique

Une entreprise fabrique des paquets de cartes à leffigie de joueurs de football. On note x le nombre de paquets fabriqués, en centaine, avec $0\leqslant x\leqslant 30$, et on suppose que le coût de fabrication est égal, en centaine deuros, à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Calculer le coût de fabrication de 100 paquets, puis de 2 000 paquets, à leuro près.
2. On suppose que chaque paquet est vendu 2 €.
   (a) Soit x dans $[0\,;\,30]$. Montrer que la différence $\mathrm{B}(x)$ entre le chiffre daffaires et le coût de fabrication est de la forme : $mx+p-e^{-0,4x+1}$, où m et p sont des réels à préciser.
   (b) Déterminer les variations de la fonction B ainsi définie sur $[0\,;\,30]$.
   (c) À laide de la calculatrice, indiquer à partir de combien de paquets lentreprise réalise un bénéfice, au paquet près.

Exercice 3. — Antilles-Guyane juin 2013

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

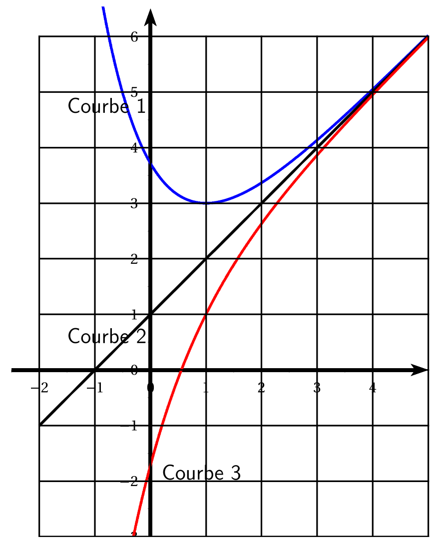
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=(x+1)e^x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=(x+2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par : $g_m(x)=x+1-me^{-x}$
et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x)=0$ si et seulement si $f(x)=m$.
   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_e$, et $\mathscr{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+1$ suivant les valeurs du réel m.



Exercice 4.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

   (b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

   (a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

   On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.

   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   (b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 5.

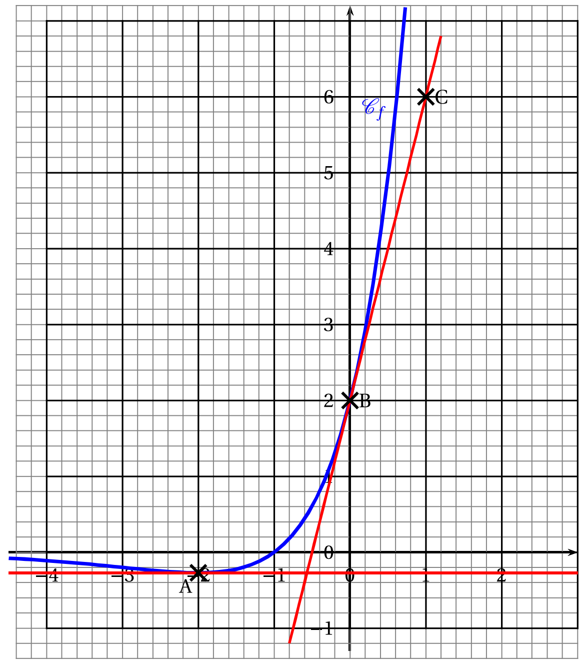
Partie A : lecture graphique

Dans le plan muni dun repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dune fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Dans la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$.

Les points A et B sont les points de $\mathscr{C}_f$ dabscisses respectives -2 et 0, et on a tracé les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en ces points.

On suppose que la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente en B passe par le point C(1 ; 6). On note f' la fonction dérivée de f.

Lire graphiquement les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier brièvement.



Partie B : Calcul algébrique

La fonction représentée sur le graphique précédent est la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = e^x(2x+2)$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^x(2x+4)$.
2. Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer par le calcul, léquation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point dabscisse 0.
4. Justifier par le calcul les deux résultats suivants admis au début de lexercice :
   - La tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.
   - La tangente en B passe par le point C(1 ; 6).

Exercice 6.

Utilisation d'une fonction auxiliaire

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto x^2e^x - 1$.
   (a) Déterminer une expression de la dérivée de g.
   (b) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (d) Donner, à l'aide d'un tableau de valeurs, une valeur approchée à 0,1 près de la solution de léquation $g(x) = 0$.
   (e) En déduire le tableau de signes de g(x) sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction f nest pas définie en 0.
   (b) Déterminer une expression de la dérivée de f.
   (c) Donner le tableau de signes de cette dérivée sur $\mathbb{R}^*$.
   (d) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 7. – Baccalauréat S Centres étrangers 11 juin 2018

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.

Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.

Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.

À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 20]$ par : $f(t) = (0,8t+0,2)e^{-0,5t} + 0,03$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

Ainsi, la valeur $f(0) = 0,23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   (a) Calculer $f(20)$.
   (b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
   (a) Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
   (b) On considère l'algorithme suivant :

$t \leftarrow 1,75$
$p \leftarrow 0,1$
$V \leftarrow 0,7$
Tant que $V > 0,035$
  $t \leftarrow t + p$
  $V \leftarrow (0,8t+0,2)e^{-0,5t} + 0,03$
Fin Tant que

   Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
   Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?
3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.
   (a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 11]$ par : $F(t) = (-1,6t-3,6)e^{-0,5t} + 0,03t$.
   Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 11]$.

Exercice 8. – Baccalauréat ES/L Amérique du Sud–17 novembre 2014

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $f(x) = (3x-4)\mathrm{e}^{-x}+2$.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 4],
   $f'(x) = (7-3x)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 4] puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
   Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [0 ; 4].
   (b) Donner à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 0,01 près.
4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $\mathrm{F}(x) = (1-3x)\mathrm{e}^{-x}+2x$.
   (a) Montrer que F est une primitive de f sur [0 ; 4].
   (b) HORS PROGRAMME Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ; 4]
5. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur l'intervalle [0 ; 4] par $f''(x) = (3x-10)\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
   (b) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 9. – Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie – 2 mars 2015

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [1,5 ; 6] par : $f(x) = (25x-32)\mathrm{e}^{-x}$.

On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle [1,5 ; 6], sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

- $f'(x) = (57-25x)\mathrm{e}^{-x}$
- $f''(x) = (25x-82)\mathrm{e}^{-x}$

1. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1,5 ; 6].
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1,5 ; 6] (Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième).
2. Montrer que, sur l'intervalle [1,5 ; 6], la courbe C admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.
   (a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [4 ; 5].
   (b) On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle [4 ; 5].

Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5

Traitement
Tant que $b-a > 0,1$ faire
  y prend la valeur $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
  Si $y > 1$ alors
    a prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
  Sinon b prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher $\frac{a+b}{2}$

   Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.
   (c) Donner une valeur approchée de α au dixième.

Exercices sur la fonction logarithme népérien

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$
où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$.
3. (a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   (b) Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$.
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.
   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice 2.

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**. En déduire la valeur de ℓ.
4. (a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.
   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

Exercice 3.

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $f(x) = x(1-\ln x)^2$.

   (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$,

   $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

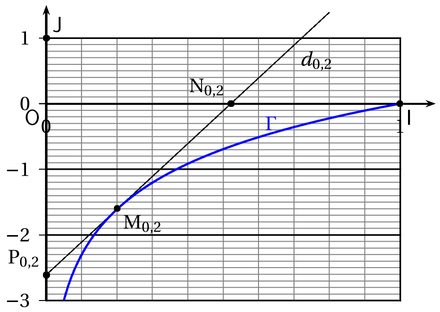
   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



   (a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $\mathrm{ON}_{0,2}\mathrm{P}_{0,2}$ en unités d'aire.

   (b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

   (c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $\mathrm{ON}_{0,2}\mathrm{P}_{0,2}$.

   Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle $\mathrm{ON}_a\mathrm{P}_a$ en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \frac{1}{2}a(1-\ln a)^2$.

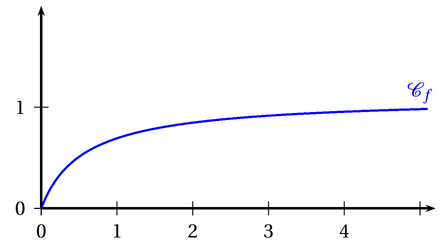
2. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

Exercice 4.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$

   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où $x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0 ↗	$g(x_0)$	↘ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.
2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

   $x \leftarrow 0,22$
   Tant que . . . . faire
   $\quad x \leftarrow x + 0,01$
   Fin de Tant que

   (b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.
3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 5.

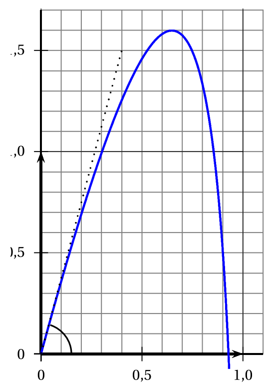
Amérique du Nord mai 2018

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par : $f(x) = bx + 2\ln(1-x)$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que , pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$: $f'(x) = \dfrac{-bx+b-2}{1-x}$.
   (b) En déduire que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.
   (c) Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Divers exercices

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+15x-10}{3x^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. (a) Montrer que , pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-15x+20}{3x^3}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que , pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = \dfrac{10x-20}{x^4}$.
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$ et. en déduire la convexité de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

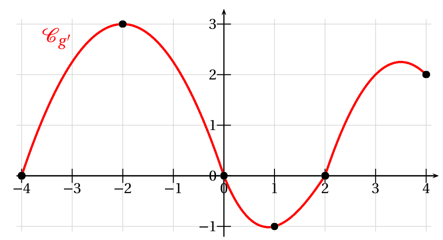
Exercice 2.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou labsence de réponse à une question ne rapporte ni nenlève de point. Pour répondre, ***cocher sur le sujet*** *la bonne réponse. Aucune justification nest demandée.*

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,
   $u_n = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
   On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
   On peut affirmer que :
   (a) Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
   (b) La suite (w_n) converge vers 1.
   (c) La suite (u_n) est minorée par 1.
   (d) La suite (w_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{3n}{n+2}$
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$
   (d) On ne peut pas déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{2x}$.
   La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :
   (a) $f'(x) = 2xe^{2x}$
   (b) $f'(x) = 2e^{2x}$
   (c) $f'(x) = (2+x)e^{2x}$
   (d) $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$
4. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?
   (a) -1
   (b) 0
   (c) $\dfrac{1}{2}$
   (d) $+\infty$
5. On suppose que g est une fonction dérivable sur lintervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



-

   On peut affirmer que :
   (a) g admet un maximum en -2
   (b) g est décroissante sur lintervalle $[1\ ;\ 2]$.
   (c) $g(0) = 1$
   (d) g admet un minimum en 0.

Exercice 3. – Polynésie septembre 2019

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à $0,9$; cela signifie que $90\,\%$ des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $\mathrm{T}_0 = 0,9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n - 0,1\mathrm{T}_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de $0,4$. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.

   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $\mathrm{T}_{n+1} = f(\mathrm{T}_n)$.

   (a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   (b) Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant \mathrm{T}_{n+1} \leqslant \mathrm{T}_n \leqslant 1$.

   (c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

   (d) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à $0,4$ au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.

   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{P}(t) = \dfrac{1000}{0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $\mathrm{P}'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $\mathrm{P}'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;\,+\infty[$ telle que $\mathrm{P}(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 4. – Baccalauréat ES/L Métropole–La Réunion 13 septembre 2013

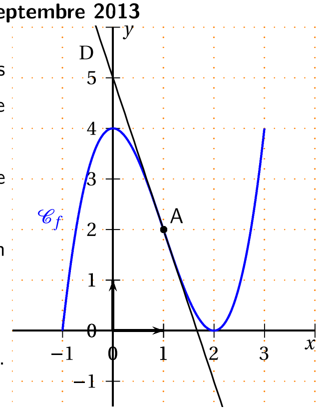
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$, deux fois dérivable sur cet intervalle et dont la représentation $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est proposée ci-contre.

On désigne par f' la fonction dérivée de f, par f'' la fonction dérivée seconde de f, par F une primitive de f (On admet l'existence de F).

La droite D est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1, seul point en lequel la courbe traverse la tangente.

L'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 4$.



Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des quatre propositions est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la proposition choisie.

Une réponse juste apporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. (a) f est convexe sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$ (b) f est concave sur l'intervalle $]1\,;\,2[$

   (c) f est convexe sur l'intervalle $]1\,;\,3[$ (d) $\mathscr{C}_f$ est au -dessus de sa tangente au point d'abscisse -1.
2. (a) $f(1) = 5$ (b) $f'(1) = 2$ (c) $f''(1) = -3$

   (d) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x + 5$.
3. (a) $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,2[$.

   (b) f' est croissante sur l'intervalle $]1\,;\,2[$.

   (c) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 2$

   (d) $f'(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $]-2\,;\,-1[$.

Exercices sur les probabilités

Exercice 1.

On considère qu'à un concours, un candidat a 20 % de chances de réussir.

On prend un groupée 25 candidats au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux candidats réussissent ?
2. Quelle est la probabilité qu'au plus deux candidats réussissent ?
3. Quelle est la probabilité que dix candidats réussissent ?
4. Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 candidats qui passent le concours.

Exercice 2. – Polynésie juin 2018

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n,
   $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$
   $b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et
   $c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.
4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

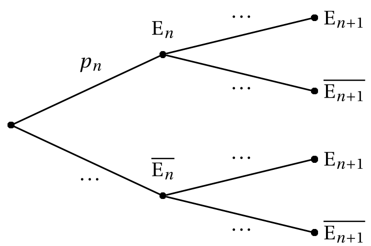
Exercice 3. – Pondichéry avril 2013

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. (a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



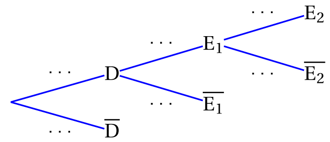
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.
   (d) En déduire la limite de la suite (p_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4. – Métropole juin 2012

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   - D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   - E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   - E_2 : « Le candidat est recruté ».

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.
   (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.
2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.
3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

Exercice 5. – Métropole juin 2011

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».

$\overline{\mathrm{V}}$ et $\overline{\mathrm{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Préciser les valeurs des probabilités $\mathrm{P(V)}, \mathrm{P_V(T)}, \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{V}}}(\overline{\mathrm{T}})$.

   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $\mathrm{V} \cap \mathrm{T}$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. (a) Justifier par un calcul la phrase :

   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 6. – Asie juin 2012

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.

Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.

   Démontrer que $p = 0,42$.
2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

   (a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

   (b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

   (c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. (a) Justifier l'égalité : $p(\mathrm{Y}_k = 5) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

   (b) crire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k
2. On note $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k

   On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_k)$ est strictement positive.

   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exercice 7. – Baccalauréat S Extrait Centres étrangers 11 juin 2018

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

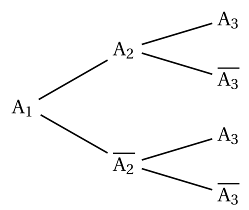
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(\mathrm{A}_1) = 1$.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous, relatif aux trois premières semaines.
   (b) Démontrer que $p(\mathrm{A}_3) = 0,85$.
   (c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 8. – Baccalauréat ES Amérique du Sud–17 novembre 2014

Une bibliothèque municipale dispose pour ses usagers de deux types de livres : les livres à support numérique et les livres à support papier.

Le service des prêts observe que 85 % des livres empruntés sont à support papier.
Un livre est rendu dans les délais s'il est rendu dans les quinze jours suivant son emprunt.
Une étude statistique montre que 62 % des livres à support numérique sont rendus dans les délais et que 32 % des livres à support papier sont rendus dans les délais.

Un lecteur, choisi au hasard, emprunte un livre de cette bibliothèque. On note :

- N l'évènement : « le livre a un support numérique » ;
- D l'évènement : « le livre est rendu dans les délais ».

Pour tout évènement A, on note $\overline{\mathrm{A}}$ son évènement contraire.

1. La probabilité de D sachant N est égale à :

   a. 0,62 **b.** 0,32 **c.** 0,578 **d.** 0,15

2. $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{N}} \cap \overline{\mathrm{D}}\right)$ est égale à :

   a. 0,907 **b.** 0,272 **c.** 0,578 **d.** 0,057

3. La probabilité de l'évènement D est égale à :

   a. 0,272 **b.** 0,365 **c.** 0,585 **d.** 0,94

4. On appelle X la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,62$.

   4.1 La probabilité à 10^{-3} près d'avoir $\mathrm{X} \geqslant 1$ est :

   a. 0,8 **b.** 0,908 **c.** 0,092 **d.** 0,992

   4.2 L'espérance de X est :

   a. 3,1 **b.** 5 **c.** 2,356 **d.** 6,515