CHAPITRE 3 Fonctions cosinus et sinus

Manuel p. 80-107

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre, nous verrons la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus et comment dériver une fonction composée utilisant les polynômes et les fonctions trigonométriques. Dans un deuxième temps, nous verrons les valeurs remarquables et comment résoudre une équation et une inéquation mettant en jeu ces fonctions trigonométriques. Nous verrons enfin l'étude des fonctions trigonométriques et la résolution d'une inéquation trigonométrique de degré 3.

Objectifs

- → **Dériver une fonction trigonométrique.**
- → **Résoudre une équation trigonométrique.**
- → **Résoudre une inéquation trigonométrique.**
- → **Étudier une fonction trigonométrique.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 81

1. Déterminer la périodicité et la parité d'une fonction

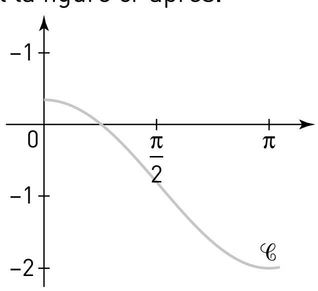
1. a) 2π **b)** 2π **c)** π

2. a) Paire. **b)** Impaire. **c)** Impaire.

2. Étudier la courbe d'une fonction trigonométrique

1. Comme *f* est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de tracer le symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir la courbe sur $[0 ; 2\pi]$.

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur et utilise une figure erronée. L'erreur est corrigée sur les éditions suivantes, qui utilisent la figure ci-après.



Symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées puis translation de la courbe obtenue sur $[0 ; 2\pi]$ de vecteur horizontal et de longueur 2π vers la gauche puis vers la droite.

3. Se repérer dans un triangle rectangle

Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$\cos\widehat{ACB} = \frac{5}{10} = 0{,}5$ donc $\widehat{ACB} = 60°$.

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$ sont complémentaires donc $\widehat{ACB} = 30°$.

4. Se repérer sur le cercle trigonométrique

a) C **b)** B **c)** A **d)** E **e)** D

5. Connaître les valeurs remarquables

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ **d)** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Activités p. 82-83

1 Dériver les fonctions cosinus et sinus

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Introduire le la dérivation en abordant la notion de limite.

A. Limite... finie ?

1. Aire du triangle OMP ⩽ Aire de la portion de disque OMI ⩽ Aire du triangle OTI

$$\frac{MP \times OP}{2} \leqslant \frac{\pi \times x}{2\pi} \leqslant \frac{TI \times OI}{2}$$

$\dfrac{\sin(x) \times \cos(x)}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{\tan(x)}{2}$ avec $\sin(x) \neq 0$ puisque $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$\cos(x) \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

2. Si $x > 0$, on utilise le théorème des gendarmes et on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

Si $x < 0$, $f(-x) = f(x)$ car $\sin(-x) = -\sin(x)$ donc f est paire.

Lorsque x tend vers 0 avec $x < 0$, $-x$ tend vers 0 avec $-x > 0$ et donc $f(-x)$ tend vers 1 et comme $f(-x) = f(x)$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Remarque : On dit alors que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

B. Vers la dérivation...

1. Lorsque la fonction sinus est décroissante, la fonction cosinus prend des valeurs négatives.

Lorsque la fonction sinus est croissante, la fonction cosinus prend des valeurs positives.

Lorsque la fonction cosinus est décroissante, la fonction sinus prend des valeurs positives.

Lorsque la fonction cosinus est croissante, la fonction sinus prend des valeurs négatives.

2. a) On développe $\sin(x + h)$ à l'aide de la formule $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.

b) $$\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)}$$
$$= \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1}.$$

Or, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} = 0$.

c) $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \cos(x) \times \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} = \cos(x).$$

Ainsi, la fonction dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, ce qui correspond au fait que :

• lorsque la fonction sinus est décroissante, la fonction cosinus prend des valeurs négatives ;

• lorsque la fonction sinus est croissante, la fonction cosinus prend des valeurs positives.

3. $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h \to 0} -\sin(x) \times \frac{\sin(h)}{h} + \cos(x) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} = -\sin(x)$$

2 Résoudre des équations trigonométriques

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Commencer à résoudre des équations simples à l'aide du cercle trigonométrique.

A. Résoudre une équation en cosinus

1. L'abscisse du point M est $\cos(\alpha)$.

2. L'abscisse du point N est $\cos(-\alpha)$ et $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. (Les points M et N ont la même abscisse par symétrie d'axe (OI).)

3. a) Soit α et β deux réels appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$. Alors : $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta \end{cases}$

b) Comme la fonction cosinus est 2π – périodique, les solutions de l'équation $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ pour α, β réels sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

B. Résoudre une équation en sinus

1. a) $\widehat{IOP} = \pi - \alpha$

b) L'abscisse du point P est $\sin(\pi - \alpha)$.

Les points M et P ont la même ordonnée (symétrie d'axe (OJ)) donc $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.

2. a) Soit α et β deux réels appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

Alors : $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta \end{cases}$

b) Comme la fonction sinus est 2π–périodique, les solutions de l'équation $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ pour α, β réels sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3 Déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation trigonométrique

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Utiliser un algorithme Python pour approcher des solutions d'une équation trigonométrique.

1. a) $f'(x) = -6\sin(2x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - 1) = \sin(0) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi + 1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\pi+1}{2}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	$3\cos(1)$	↗	3	↘	-3	↗	$3\cos(1)$

b) La fonction f est continue sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

La fonction f prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\pi+1}{2}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$ et $f\left(\dfrac{\pi+1}{2}\right) = -3$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\pi+1}{2}\right]$. Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi+1}{2} ; \pi\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\dfrac{\pi+1}{2}\right) = -3$ et $f(\pi) = 3\cos(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi+1}{2} ; \pi\right]$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. a) [ERRATUM] Le code de la question 2 utilise le symbole ^ pour la fonction puissance : c'est une erreur. Il faut utiliser le symbole **.

Le programme retourne une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; \dfrac{\pi+1}{2}\right]$ au dix-millième près.

b)

```
from math import *
def dichotomie(n):
    a=pi/2+0.5
    b=pi
    while abs(b-a)>1/(10**n):
        c=(a+b)/2
        if 3*cos(2*c-1)>0:
            b=c
        else:
            a=c
    print("Une valeur approchée de x est
          comprise entre",a," et ",b)
```

c) Le code est le suivant.

```
from math import *
def dichotomie(n):
    a1=0.5
    b1=pi/2+0.5
    a2=pi/2+0.5
    b2=pi
    while abs(b1-a1)>1/(10**n):
        c1=(a1+b1)/2
        if 3*cos(2*c1-1)>0:
            a1=c1
        else:
            b1=c1
    while abs(b2-a2)>1/(10**n):
        c2=(a2+b2)/2
        if 3*cos(2*c2-1)<0:
            b2=c2
        else:
            a2=c2
    print("Une valeur approchée de x1
          est comprise entre",a1," et ",b1)
    print("Une valeur approchée de x2
          est comprise entre",a2," et ",b2)
```

Les valeurs renvoyées sont :

Une valeur approchée de x1 est comprise entre 1.2853981633974483 et 1.2854940371966912

Une valeur approchée de x2 est comprise entre 2.0707963267948966 et 2.0708616830160143

À vous de jouer p. 85

1. a) $f'(x) = \dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

b) $f'(x) = -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) = 2(1 - 2\sin^2(x))$

2. a) $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}$

b) $f'(x) = \dfrac{(1 - \sin(x))(3 + \sin(x)) - \cos(x)(x + \cos(x))}{(3 + \sin(x))^2}$

$f'(x) = \dfrac{2 - 2\sin(x) - x\cos(x)}{(3 + \sin(x))^3}$

3. a) $f'(x) = 15\cos(3x + 12)$

b) $g'(x) = 40\sin(-5x + 4)$

c) $h'(x) = -14\sin(-2x - 3)$

4. a)

$f'(x)=\dfrac{(-3\sin(3x)-1)(\sin(3x)+x+2)-(\cos(3x)-x)(3\cos(3x)+1)}{(\sin(3x)+x+2)^2}$

$f'(x) = \dfrac{3x(\cos(3x) - \sin(3x)) - 7\sin(3x) - \cos(3x) - 5}{(\sin(3x) + x + 2)^2}$

b)

$$g'(x) = \frac{-5\sin(5x+1)\left(sin\left(\frac{x}{4}\right)+3\right) - \frac{1}{4}\cos(5x+1)\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\left(sin\left(\frac{x}{4}\right)+3\right)^2}$$

5. a) $\left\{-\dfrac{\pi}{18} ; \dfrac{\pi}{18} ; \dfrac{11\pi}{18} ; \dfrac{13\pi}{18}\right\}$.

b) $\left\{-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

6. a) $\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{3} = 3x - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \dfrac{\pi}{3} = -3x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5\pi}{6} = 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{-\pi}{6} = -4x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions sont : $\left\{-\dfrac{47\pi}{24} ; -\dfrac{19\pi}{12} ; -\dfrac{35\pi}{24} ; -\dfrac{7\pi}{12} ;\right.$

$\left.-\dfrac{7\pi}{12} ; -\dfrac{11\pi}{24} ; -\dfrac{23\pi}{24} ; \dfrac{\pi}{24} ; \dfrac{13\pi}{24} ; \dfrac{25\pi}{24} ; \dfrac{17\pi}{12} ; \dfrac{37\pi}{24}\right\}$.

b) $\begin{cases} \pi - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \dfrac{x}{2} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{10\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions sont : $\left\{-\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

7. $x \in \left[\dfrac{2\pi}{3} ; \pi\right[$

8. $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad 2x + \dfrac{\pi}{6} < 2\pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{24} + k\pi < x < \dfrac{19\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$x \in \left]\dfrac{\pi}{24} ; \dfrac{19\pi}{24}\right[\cup \left]\dfrac{25\pi}{24} ; \dfrac{43\pi}{24}\right[$

9. a) $f(x + 2\pi) = 3\cos^2(x + 2\pi) - 6\cos(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = f(x)$ car la fonction cosinus est 2π–périodique.

b) On peut étudier f sur $[0 ; 2\pi]$.

c) $f'(x) = -6\cos(x)\sin(x) + 6\sin(x)$

$f'(x) = 6\sin(x)(1 - \cos(x))$

x	0		π		2π
$6\sin(x)$	0	$+$	0	$-$	
$1-\cos(x)$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	-3	$\nearrow$	9	$\searrow$	-3

10. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes : la fonction $f(x) = 2\cos(2x) + \sin^2(x)$ est remplacée par $f(x) = 2\cos(x) + \sin^2(x)$.

a) La fonction cosinus étant 2π périodique, la fonction f l'est aussi.

b) $f(-x) = 2\cos(x) + (-\sin(x))^2$

$f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

c) $f'(x) = -2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)(\cos(x) - 1)$

avec $\cos(x) - 1 \leqslant 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0 ; \pi]$.

x	0		π
$f'(x)$		$-$	
Variation de f	2	$\searrow$	-2

f étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

x	π		0		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
Variation de f	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

11. On effectue un changement de variable en posant $X = \sin(x)$ puis on résout l'inéquation

$2\,X^2 - X - 1 > 0$ et $\Delta = 9$ et $X_1 = -\dfrac{1}{2} X_2 = 1$

Donc $2X^2 - X - 1 > 0$ pour $X < -\dfrac{1}{2}$

ainsi, $\sin(x) < -\dfrac{1}{2}$ et $x \in \left]-\dfrac{5\pi}{6} ; -\dfrac{\pi}{6}\right[$.

12. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes. Le début de l'exercice est modifié ainsi :

> **1.** Soit $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Vérifier que $f(1) = 0$.
> **2.** Résoudre ....

1. $f(1) = 2 - 1 = -2 + 1 = 0$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(x)$ puis on résout l'inéquation $2X^3 - X^2 - 2X + 1 < 0$.

Or, $f(1) = 0$. On peut donc factoriser par $X - 1$ l'expression $2X^3 - X^2 - 2X + 1$.

$2X^3 - X^2 - 2X + 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$

$= aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$

Par identification, on a : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$.

$2X^3 - X^2 - 2X + 1 = (X - 1)(2X^2 + X - 1)$

On détermine le signe de $2X^2 + X - 1$.

$\Delta = 9$ et $X_1 = -1$, $X_2 = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $2X^3 - X^2 - 2X + 1 < 0$ pour $X < -1$ et $X \in \left]\dfrac{1}{2} ; 1\right[$

Comme $X = \cos(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in [-1 ; 1]$, on a :

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < X < 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < \cos(x) < 1$

donc sur l'ensemble $[-\pi ; \pi]$, $S = \left]-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3}\right[$.

13. 1. $f(-1) = -1 - 2{,}5 + 2 + 1{,}5 = 0$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(x)$ puis on résout l'inéquation $X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5 < 0$. Or, $f(1) = 0$. On peut donc factoriser par $X + 1$ l'expression $X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5$

$X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5 = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$

$= aX^3 + (b + a)X^2 + (c + b)X + c$

Par identification, on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3{,}5 \\ c = 1{,}5 \end{cases}$

$X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5 = (X + 1)(X^2 - 3{,}5X + 1{,}5)$

on détermine le signe de $X^2 - 3{,}5X + 1{,}5$.

$\Delta = 6{,}25$ et $X_1 = 3$, $X_2 = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5 < 0$ pour $X < -1$ et $X \in \left]\dfrac{1}{2} ; 3\right[$

comme $X = \cos(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in [-1 ; 1]$, on a :

$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < X < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos(x) < 1$

donc sur l'ensemble $[0 ; 2\pi]$, $S = \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right]$.

14. 1. $f(2) = 8 - 2 - 5 - 1 = 0$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = \sin(x)$ puis on résout l'inéquation $X^3 - 0{,}5X^2 - 2{,}5X - 1 < 0$. Or, $f(2) = 0$. On peut donc factoriser par $X - 2$ l'expression $X^3 - 0{,}5X^2 - 2{,}5X - 1$.

$$X^3 - 0{,}5X^2 - 2{,}5X - 1 = (X - 2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c$$

Par identification, on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1{,}5 \\ c = 0{,}5 \end{cases}$

$X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5 = (X + 1)(X^2 + 1{,}5X + 0{,}5)$

on détermine le signe de $X^2 + 1{,}5X + 0{,}5$.

$\Delta = 0{,}25$ et $X_1 = -1$, $X_2 = -\frac{1}{2}$

Ainsi $X^3 - 2{,}5X^2 - 2X + 1{,}5 < 0$ pour $X < -1$ et $X \in \left]-\frac{1}{2} ; 2\right[$

comme $X = \sin(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in [-1 ; 1]$, on a :

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < X < 2 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < \cos(x) < 1$

donc sur l'ensemble $[-\pi ; \pi]$,

$S = \left[-\pi ; \frac{-5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{6} ; \pi\right]$.

Exercices apprendre à démontrer p. 60

Pour s'entraîner

On pose $f(x) = \sqrt{3}x + 2\cos(x) - 3$.

$f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(x)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \sin(x) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right]$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	+		–	+
Variation de f	↗		↘	↗

• f est continue et monotone sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$ et ne prend que des valeurs négatives sur cet intervalle.

• f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right]$ avec $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$ et $f(2\pi) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right]$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 2\pi]$. L'équation $\sqrt{3}x + 2\cos(x) = 3$ a une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Exercices calculs et automatismes p. 91

15. Valeurs remarquables (1)

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

16. Valeurs remarquables (2)

a) $\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

17. Dériver des fonctions (1)

a) $-\sin(x)$

b) $-\sin(x) + 3$

c) $2\cos(x)$

d) $3\cos(x) + 8$

e) $-5\sin(x) - 5\cos(x) + 7$

f) $6\cos(x) + 7\sin(x) + 5$

18. Déterminer la parité ou non d'une fonction

a) $f(-x) = 2\cos(-x) + 13 = f(x)$ donc f est paire.

b) $f(-x) = \sin(-x) + x = -\sin(x) + x = -f(x)$ donc f est impaire.

c) $f(-x) = 2\sin(-x) - \cos(-x) = -2\sin(x) - \cos(x)$ donc f n'est ni paire ni impaire.

d) $f(-x) = (-x)^2 + 3\cos(-x) = x^2 + 3\cos(x) = f(x)$ donc f est paire.

e) $f(-x) = (-x)^3 + 5\sin(-x) = -x^3 - 5\sin(x) = f(x)$ donc f est impaire.

19. Vrai ou faux ?

a) Faux. **b) Vrai**. **c) Vrai**. **d) Faux**.

20. Périodiques ?

a) 2π périodique. **b)** π périodique.

c) 2π périodique. **d)** 2π périodique.

e) 2π périodique. **f)** Non périodique.

21. Résoudre une équation trigonométrique

a) $x = \pi$ **b)** $x = 0$ ou $x = \pi$

c) $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ **d)** $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

e) $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ **f)** $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

22. Résoudre une inéquation trigonométrique

a) $x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$ **b)** $x \in]0 ; \pi] \cup \left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right[$

c) $x \in \left[\frac{4\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$ **d)** $x \in \left[\frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right]$

23. Dériver des fonctions (2)

a) $f'(x) = -12\sin(3x)$ **b)** $f'(x) = 30\cos(5x)$

c) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ **d)** $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$

e) $f'(x) = 5\cos(x) + 5\cos(5x)$

f) $f'(x) = -2\sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$

24. QCM

1. c) **2.** a)

25. Déterminer les variations d'une fonction

a) $f'(x) = 1 - \sin(x)$ avec $\sin(x) < 1$ pour tout x réel donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 0{,}5 + \cos(x)$

Comme le signe de $f'(x)$ peut être positif et négatif, la fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

26. Lecture graphique

f est une fonction paire et $f(0) = 2$ donc la courbe rouge correspond à sa courbe représentative.

$g(0) = 1$ donc la courbe verte correspond à la courbe représentative de g.

Exercices d'application p. 92-93

Image d'un nombre par une fonction trigonométrique

27. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{7}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} - 8}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$; $f(\pi) = -4$

28. 1. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$, $f(\pi) = 0$

2. $g(\pi) = 3$, $g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-12 - \sqrt{3}}{2}$, $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

29. $f(\pi) = 1$; $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{11}{12}$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{12}$;

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}$

Périodicité et parité

30. 1. a) $f(x + 2\pi) = \dfrac{1 - \cos(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = f(x)$

b) $f(-x) = \dfrac{1 - \cos(-x)}{2 + \cos(-x)} = f(x)$

2. $g(x + 2\pi) = 1 + 5\cos^2(x + 2\pi) = g(x)$

$g(-x) = 1 + 5\cos^2(-x) = g(x)$

31. 1. Elles sont 2π périodiques car les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

2. $f(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

$g(-x) = -\sin(x) + \dfrac{3}{2 - \sin(x)}$.

g n'est ni paire ni impaire.

32. 1. $f(x + 2\pi) = 2\sin(x) + \sin(2x + 4\pi) = f(x)$. Donc f est 2π périodique.

2. $f(-x) = -2\sin(x) -2\sin(2x) = -f(x)$. Donc f est une fonction impaire.

33. 1. $f(x + 4\pi) = f(x)$ donc f est 4π périodique.

2. $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.

Représentation graphique

34. a) Ni l'une ni l'autre. **b)** Impaire.

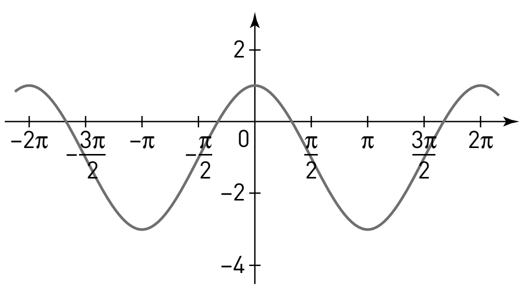
c) Paire. **d)** Paire.

c) Ni l'une ni l'autre.

35. a) 2π périodique. **b)** π périodique.

c) Non périodique.

36.



37.

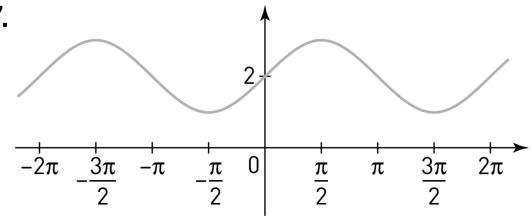


Tableau de variations

38.

x	$-\pi$		0		π
Variation de la fonction cosinus	-1	↗	1	↘	-1

x	0		π		2π
Variation de la fonction cosinus	1	↘	-1	↗	1

39.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
Variation de la fonction sinus	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Variation de la fonction sinus	0	↗	1	↘	-1	↗	0

Dérivation

40. a) $f'(x) = 3\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$

$= \cos(x)(3 + 2x) - x^2\sin(x)$

b) $f'(x) = -2\sin(x) + 1$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$

d) $f'(x) = 10x\sin(x) - 5x^2\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)$

$f'(x) = 9x\sin(x) + \cos(x)(1 - 5x^2)$

41. a) $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ **b)** $f'(x) = 5(\sin(x) + x\cos(x))$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{4 + \sin(x)}}$ **d)** $f'(x) = -4\sin(x)(\cos(x))^3$

42. a) $f'(x) = -9\sin(3x)$

b) $f'(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{(2+3x)^2}\sin\left(\dfrac{1}{2+3x}\right)$

d) $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$

e) $f'(x) = 3\cos\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

f) $f'(x) = 2\cos(2x) + 3\sin(x)$

43. a) $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\sin(\sqrt{1+x^2})$

b) $f'(x) = -5\cos\left(-5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

c)

$$f'(x)=\frac{(2\sin(2x)-1)(\sin(2x)+x)-(\cos(2x)-x)(\cos(2x)+1)}{(\sin(2x)+x)^2}$$

$$= \frac{2\sin^2(2x) + 2x\sin(2x) - \sin(2x) - \cos^2(2x)}{(\sin(2x) + x)^2}$$

$$+ \frac{-\cos(2x) + x\cos(2x)}{(\sin(2x) + x)^2}$$

d) $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$

Résolution d'équation

44. a) $S = \left\{-\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5}k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{1}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{3}k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{\dfrac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. a) $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3} ; \pi\right\}$

b) $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{-\dfrac{29\pi}{30} ; -\dfrac{19\pi}{30} ; -\dfrac{17\pi}{30} ; -\dfrac{7\pi}{30} ; -\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{30} ; \dfrac{17\pi}{30} ; \dfrac{19\pi}{30} ; \dfrac{29\pi}{30}\right\}$

d) $S = \left\{-\dfrac{3\pi}{4} ; -\dfrac{7\pi}{12} ; -\dfrac{\pi}{12} ; \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

46. a) $S = \left\{-\dfrac{17\pi}{18} ; -\dfrac{5\pi}{18} ; -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{7\pi}{18}\right\}$

b) $S = \left\{-\dfrac{13\pi}{15} ; -\dfrac{11\pi}{15} ; -\dfrac{7\pi}{15} ; -\dfrac{\pi}{15} ; -\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{\pi}{15} ; \dfrac{7\pi}{15} ; \dfrac{11\pi}{15} ; \dfrac{13\pi}{15}\right\}$

) $S = \left\{-\dfrac{11\pi}{12} ; -\dfrac{5\pi}{12} ; -\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{5\pi}{12} ; \dfrac{11\pi}{12}\right\}$

d) $S = \left\{-\dfrac{17\pi}{18} ; -\dfrac{7\pi}{6} ; -\dfrac{5\pi}{18} ; \dfrac{7\pi}{18} ; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

Résolution d'inéquation

47. a) $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4} ; \pi\right[$ **b)** $x \in \left[\pi ; \dfrac{5\pi}{3}\right]$

c) $x \in \left[0 ; \dfrac{4\pi}{3}\right]$ **d)** $x \in \left[0 ; \dfrac{7\pi}{12}\right]$

48. a) $x \in]0 ; \pi[$ **b)** $x \in \left]-\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right[$

c) $x \in \left]\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right[$ **d)** $x \in \left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4}\right]$

49. a) On pose $X = \sin(x)$ et l'inéquation proposée est équivalente à $2X^2 - 1 \leqslant 0$ avec $X \in [-1 ; 1]$

$2X^2 - 1 \leqslant 0$ pour $X \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

donc $x \in \left]-\pi ; -\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4} ; \pi\right]$

b) On pose $X = \cos(x)$ avec $X \in [-1 ; 1]$ et l'inéquation proposée est équivalente à $X^2 - 1 > 0$

$X^2 - 1 > 0$ pour $X \in]-\infty ;-1[\cup]1 ; +\infty[$ c'est-à dire $\cos(x) \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ donc l'inéquation proposée n'a pas de solution.

c) On pose $X = \cos(x)$avec $X \in [-1 ; 1]$ et l'inéquation proposée est équivalente à $4X^2 - 3 \geqslant 0$ avec $X \in [-1 ; 1]$

$4X^2 - 3 \geqslant 0$ pour $X \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2} ; +\infty\right[$

donc $\cos(x) \in \left[-1 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2} ; 1\right]$

donc $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[$

d) $\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$

On pose $X = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $X \in [-1 ; 1]$.

L'inéquation est alors équivalente à $X^2 - \frac{1}{2} < 0$

donc $X \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

D'où : $3x - \frac{\pi}{4} \in \left]\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right[$ c'est-à-dire :

$x \in \left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} ; \frac{2\pi}{3}\right[$.

Exercices d'entraînement p. 94-97

Étude d'une fonction trigonométrique

50. 1. f est 2π périodique par la définition de la fonction cosinus.

2. f est paire puisque la fonction cosinus est paire.

3. $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$

$f'(x)$ est nulle pour $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = \frac{4\pi}{3}$ donc f admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $0, \pi, \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

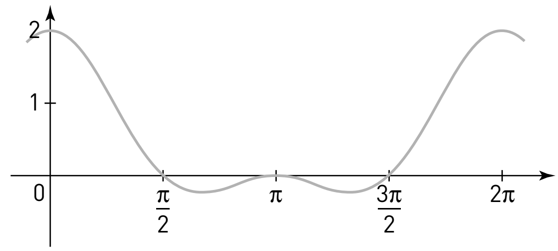
4.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

5.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f'(x)$	2	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

6.



51. 1. a) $f'(x) = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$

b) Pour tout $x \in [0 ; \pi]$,

$(2\sin(x) + 1)(\sin(x) - 1) = 2\sin^2(x) - 2\sin(x) + \sin(x) - 1$
$= 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = f'(x)$

2. Pour tout $x \in [0 ; \pi]$:

$\sin(x) \geqslant 0$ donc $2\sin(x) + 1 \geqslant 1 > 0$.

$\sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

et $\sin(x) \leqslant 1$ donc $\sin(x) - 1 \leqslant 0$.

b)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$2\sin(x) - 1$		$+$		$+$	
$\sin(x) - 1$		$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
Variation de f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

52. 1. f est définie car pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$-1 \leqslant \sin x(x) \leqslant 1$ donc $2 \leqslant \sin(x) + 3 \leqslant 4$.

2. $f'(x) = \frac{-2\cos(x)}{(\sin(x) + 3)^2}$

3. Ainsi, f est croissante sur les intervalles $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$.

53. 1. Pour tout x réels : $0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$ donc $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$ et $f(x + \pi) = x + \pi + (-\sin(x))^2 = f(x) + \pi$

2. Par comparaison de limites, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

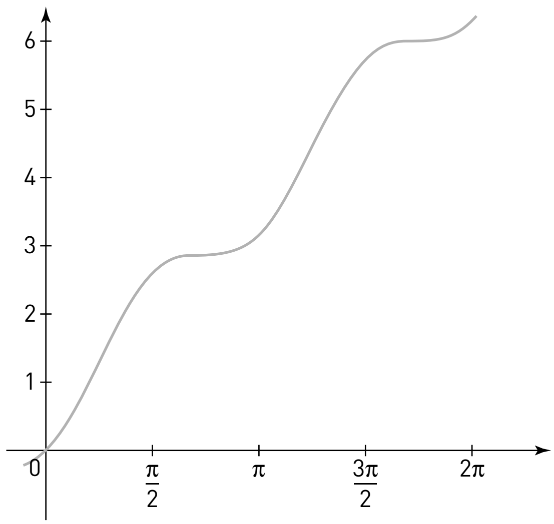
3. $f'(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

4. $f'(x) = 1 + \sin(2x)$ donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(2x) \geqslant -1$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Comme $f(x+\pi) = f(x) + \pi$, pour tracer f à partir de sa représentation sur $[0\ ;\pi]$, on réalise une translation de vecteur $\pi\vec{j}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6.



54. 1. Pour tout x réels : $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $x-1 \leqslant f(x) \leqslant x+1$.

2. Pour tout x réels : $f'(x) = 1 - \cos(x)$ et donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \cos(x) \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Les tangentes horizontales à Γ sont situées aux points d'abscisses $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Équation de la tangente à Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$: $y=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$; $y=x+1$

Équation de la tangente à Γ au point d'abscisse $-\dfrac{\pi}{2}$: $y=f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$; $y=x-1$

On peut en déduire, d'après la question **1**, que la courbe Γ est comprise entre les droites d'équation $y = x + 1$ et $y = x - 1$.

4. Sur calculatrice.

55. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes. L'exercice est à remplacer par l'énoncé suivant.

> On considère dans un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ direct, les points A$(-1\ ;0)$, B$(0\ ;-1)$ et M$(\cos(x)\ ;\sin(x))$ où x est un réel appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\pi\right[$.
>
> **1.** Calculer AB puis exprimer les longueurs AM et BM en fonction de x.
>
> **2.** Déterminer la valeur x_0 pour laquelle ABM est isocèle en M.
>
> **3.** Montrer que $p(x)=\sqrt{2}+\sqrt{2(1+\cos(x))}+\sqrt{2(1+\sin(x)}$
>
> **4.** Calculer $p'(x)$ et vérifier que $p'(x_0) = 0$.
>
> **5.** On admet que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;x_0\right]$, $p'(x) \geqslant 0$ et pour tout $x \in [x_0\ ;\pi[$, $p'(x) \leqslant 0$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABM ?

1. AB$=\sqrt{2}$, AM $=\sqrt{2+2\cos(x)}$ et BM $=\sqrt{2+2\sin(x)}$

2. $x=\dfrac{\pi}{4}$

3.
$p(x)=\text{OI}+\text{OM}+\text{IM}=\sqrt{2}+\sqrt{2(1+\cos(x)}+\sqrt{2(1+\sin(x))}$

4. $p'(x)=\dfrac{-\sin(x)}{\sqrt{2(1+\cos(x))}}+\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2(1+\sin(x))}}$ et $p'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

5. Le périmètre du triangle ABM est maximal en $\dfrac{\pi}{4}$ et sa valeur est $\sqrt{2}+2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ soit environ 5,11 unités de longueur.

56. 1. f est impaire puisque la fonction sinus est impaire.

2. $f(x+4\pi)=4\sin\left(\dfrac{x+4\pi}{2}\right)=4\sin\left(\dfrac{x}{2}+2\pi\right)=f(x))$

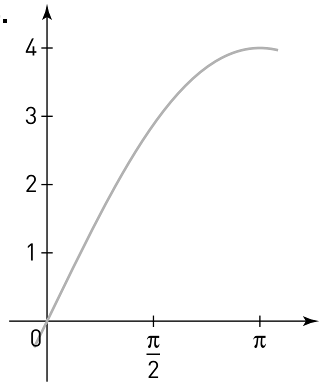
donc f est 4π-périodique.

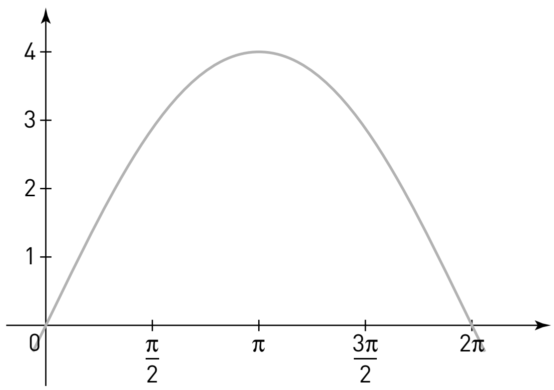
3. a) $f(\pi - x) = 4\sin\left(\dfrac{\pi - x}{2}\right) = -4\sin\left(\dfrac{\pi + x}{2}\right) = f(\pi + x)$

b) La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi$.

4. $f'(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et pour tout $x \in [0\ ;\ \pi]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\ ;\ \pi]$.

5.





57. 1. f est 2π périodique puisque la fonction cosinus l'est.

2. f est paire puisque la fonction cosinus est paire.

3. D'après la question 1, on peut étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π. D'après la question 2, f peut être étudier sur l'ensemble des réels positifs. On peut donc étudier f sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

4. $f(x) = \dfrac{-3\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
Variation de f	1	$\searrow$	-1

5. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ avec $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution α sur $[0\ ;\ \pi]$ avec $\alpha \approx 2{,}094$.

58. 1. Si f est périodique alors on a

$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow 3\cos\left(2x + 2T + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

donc $T = \pi$ et on a bien a $f(x + \pi) = f(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

Donc $|f(x)| \leqslant 3$.

3. $f'(x) = -6sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

4. $-6\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow 6\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \sin 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{8} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{-\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{8} ; \dfrac{7\pi}{8}\right]$, $\dfrac{3\pi}{8} \leqslant x \leqslant \dfrac{7\pi}{8} \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$

f est donc décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{8} ; \dfrac{3\pi}{8}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{8} ; \dfrac{7\pi}{8}\right]$.

5. f admet donc un minimum en $\dfrac{3\pi}{8}$ égal à -3.

6. $y = -6x + \dfrac{3\pi}{4}$

59. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos'(0) = 1$

60. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0$ donc f ne prend que des valeurs strictement positives.

2. $f'(x) = -e^{1-x}(\sin(x) + \cos(x) + 2)$

$$= -e^{1-x}\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\right)$$

$\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2 > 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{2}$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{x}{4}\right) + 2 > 0$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$ donc $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0$

c)

```
i ← 13
u ← 0,1
tant que u > 10⁻⁶ :
   u ← (2 + cos(i)) × e^(1-x)
   i ← i + 0,1
Afficher i
```

Cela signifie que pour tout $x > x_0$, la courbe représentative de f est située en dessous de l'équation $y = 10^{-6}$.

Ainsi, cette courbe est très proche de l'axe des abscisses en restant au-dessus de celui-ci, l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en l'infini.

Résolutions d'équations et d'inéquations

61. a) $S = \left\{-\frac{11\pi}{12} ; -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{12} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{29\pi}{36} ; -\frac{23\pi}{36} ; -\frac{5\pi}{36} ; \frac{\pi}{36} ; \frac{19\pi}{36} ; \frac{25\pi}{36}\right\}$

c) $S = \left\{-\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}\right\}$ **d)** $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$

62. a) On pose $X = \cos(x)$ ($X \in [-1 ; 1]$) et on résout l'équation : $4X^2 - 6X + 2 = 0$.

$X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

et $\cos(x) = \cos(0)$. $S = \left\{0 ; \frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

b) D'après la question précédente : $S = \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right]$.

63. a) On pose $X = \sin(x)$ ($X \in [-1 ; 1]$) et on résout l'équation :$6X^2 + 9X + 3 = 0$.

$X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = -1$. $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

et $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. $S = \left\{\frac{7\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

b) D'après la question précédente : $S = \left[\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right]$.

c) On pose $X = \sin(x)$ ($X \in [-1 ; 1]$) et on résout l'équation :$2X^2 + X + 2 = 0$. $\Delta < 0$ donc cette équation n'a pas de solution réelle.

64. a) Pour vérifier l'indication, on calcule les carrés de chaque expression puis on conclut.

On pose $X = \cos(x)$ ($X \in [-1 ; 1]$) et on résout l'équation : $4X^2 + (2 - 2\sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$.

$X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos(x) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

et $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. $S = \left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

b) D'après la question précédente, on a :

$S = \left[0 ; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[$.

65. Dans cet exercice, il faut se rappeler de la formule vue en première :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

a) $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$.

b) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $S = \left\{\frac{\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)$ d'où : $S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3}\right\}$.

66. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur corrigée sur les éditions suivantes. Remplacer $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

par $2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

1. d)

2. c) la courbe admet deux tangentes horizontales sur cet intervalle.

3. c) la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points sur cet intervalle.

4. c)

67. 1. a) Aucune solution.

b) Trois solutions.

c) Deux solutions (deux tangentes horizontales).

d) Deux solutions.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{\dfrac{3\pi}{4} ; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

68. a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$

$\dfrac{7}{25} = 2\cos^2(a) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(a) = \dfrac{32}{50}$

Comme $-\pi \leqslant a \leqslant 0$, $\cos(a) = \sqrt{\dfrac{32}{50}}$ ou $\cos(a) = -\sqrt{\dfrac{32}{50}}$

et comme $\sqrt{1 - \left(\dfrac{32}{50}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{18}{50}}$, on a dans les deux cas : $\sin(a) = -\sqrt{\dfrac{18}{50}} = -\dfrac{3}{5}$.

L'affirmation 1 est donc vraie.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$. Or , $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

En utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et donc la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

Modélisation

69. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes. Dans la question 1., remplacer $g(x)$ par $g(t)$.

1. a) $g'(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t) + \cos(t)$

$g''(t) = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t) - \sin(t)$

$g''(t) + 9g(t) = 8\sin(t)$

Donc g est solution de (E).

b) g représente la trajectoire du mobile M situé sur le ressort.

2. $g(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $g'(0) = 4 \Leftrightarrow 3B + 1 = 4 \Leftrightarrow B = 1$

Ainsi, $g(t) = \sin(3t) + \sin(t)$.

3. $g(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(3t) + \sin(t) = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin^3(t) + 4\sin(t) = 0 \Leftrightarrow -\sin^3(t) + \sin(t) = 0$

on pose $T = \sin(t)$ et on résout $-T^3 + T^2 = 0$

on alors $T = 0$ ou $T = 1$ ou $T = 1$.

ainsi $\sin(t) = 0$ ou $\sin(t) = 1$ ou $\sin(t) = -1$.

Donc $t = 0 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ou $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

70. 1. a) Sur logiciel.

b) L'aire semble maximale pour un angle de 45°.

2. a) On considère un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, l'abscisse de B est alors $\cos(\alpha)$ et son ordonnée $\sin(\alpha)$.

Ainsi, $AB = \sin(\alpha)$ et $AD = 2\cos(\alpha)$ donc $\mathcal{A}(\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

b) $\mathcal{A}'(\alpha) = -2\sin^2(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) = -4\sin^2(\alpha) + 2$

$\mathcal{A}'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 0 < \sin(\alpha) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. $\mathcal{A}$ est donc croissante sur les intervalles $\left]0 ; \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\dfrac{3\pi}{4} ; \pi\right[$ et décroissante sur $\left]\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{3\pi}{4}\right[$. $\mathcal{A}$ admet donc un maximum en $\dfrac{\pi}{4}$ et l'aire maximale est égale à 1 cm^2.

71. 1. $\tan(\alpha) = \dfrac{EA}{ET} = \dfrac{25}{x}$; $\tan(x) = \dfrac{EB}{ET} = \dfrac{30{,}6}{x}$

2. Pour tout $x \in \left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$\tan'(x) = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} > 0$

Ainsi, la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$ soit $\gamma = \beta - \alpha$

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}}$$

$$= \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2 + 765}{x^2}} = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

4. a) L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ l'est, *avec* $\gamma \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ donc γ est maximal lorsque $\tan(\gamma)$ est maximal.

On pose $g(x) = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$ $g'(x) = \frac{-5,6x^2 + 4\,284}{(x^2 + 765)^2}$

on détermine le signe de $-5,6x^2 + 4\,284$ sur $]0 ; 50]$.

$\Delta = 95\,961,6$ et $x_1 = \frac{\sqrt{95\,961,6}}{-11,2}$; $x_2 = \frac{\sqrt{95\,961,6}}{11,2}$.

g est donc croissante sur $]0 ; x_2]$ et décroissante sur $[x_2 ; 50]$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal pour une unique valeur $x_2 = \frac{\sqrt{95\,961,6}}{11,2}$ m soit au mètre près 28 m.

Une valeur approchée de l'angle $\widehat{ATB}$, à 0,01 radian près est 0,1 soit environ 5,78°.

Déterminer des valeurs de cos et sin

72. Pour tout x réel, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

D'où : $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = 1$

$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2}{16}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ puisque $\frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$.

73. Pour tout x réel, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

D'où : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = 1$

$\sin^{2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}$ puisque $\frac{\pi}{8} \in]0 ; \pi[$

74. 1. $f'(x) = -\sin(x) + x$

$f''(x) = -\cos(x) + 1 \geqslant 0$

Donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$.

Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ et $f(0) = 0$.

Donc pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$.

2. $g'(x) = f'(x) - \frac{x^3}{6}$ $g''(x) = f''(x) - \frac{1}{2}x^2$

$g^{(3)}(x) = \sin(x) - x$

$g^{(4)}(x) = \cos(x) - 1$

Donc $g^{(4)}(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire que $g^{(3)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $g^{(3)}(0) = 0$. Ainsi, g'' est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur$[0 ; +\infty[$ et $g''(0) = 0$. Donc, pour tout réel x, $g''(x) \leqslant 0$. D'où g' est décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $g'(0) = 0$. Donc g est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc, pour tout réel x, $g(x) \leqslant 0$.

3. $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

4. $\varepsilon(x) = \frac{x^4}{24}$ avec $\varepsilon'(x) = \frac{x^3}{6}$ donc ε est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

5. Le minimum de ε est atteint en zéro, il est donc pertinent d'utiliser cet encadrement au voisinage de zéro.

6. $1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \leqslant 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24}$

$1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} \approx 0,802$ et $1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24} \approx 0,809$

La précision est d'environ 0,007.

Déterminer une aire entre deux courbes

75. 1. $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

$0 \leqslant f(x) \leqslant 3$; f est positive sur $[0 ; 2\pi]$.

2. a)

```
from math import *
def aire(n):
   s=0
   for k in range (1,n):
      s=s+(2*pi/n)*(-1.5*cos((k*2*pi)/n)+1.5)
   print ("L'aire est égale à environ")
   print (s)
```

b) L'aire est égale à environ 9,42 unités d'aire.

c)

```
from math import*
def aire(n):
   s=0
   for k in range (1,n):
      s=s+(2*pi/n)*(-1.5*cos((k*2*pi)/n)+1.5)
   print ("L'aire est égale à environ")
   print (2*s)
```

76. 1. a) -1 **b)** 1 **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{3}$

2. a) $f'(x) = -\sin(x) + 2$

b) $g'(x) = -3\cos(x)$

c) $h'(x) = \sin(x) + 5\cos(x) + 10x$

77. $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

On pose $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ $g'(x) = -x\sin(x)$ avec $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0 ; \pi[$ donc g est décroissante sur $]0 ; \pi[$ avec $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \pi} g(x) = \pi$.

Ainsi, pour tout $x \in]0 ; \pi[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0 ; \pi[$ avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \pi} f(x) = 0$.

Exercices bilan p. 98

78. Étudier une fonction

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc par comparaison de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. Pour tout réel $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)$$
$$= \cos(x) - \sin(x)$$

4. a) $f'(x) = e^x\cos(x) - e^x\sin(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$

$$= \sqrt{2}e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

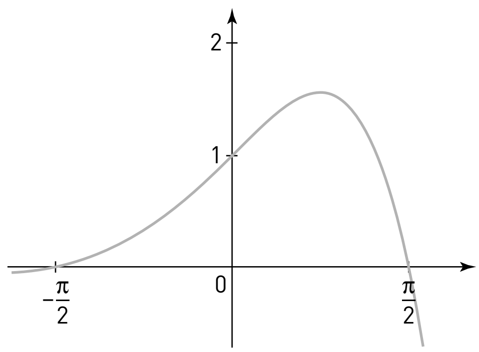
b) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) > \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{4}$

f est donc croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) et **d)**

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	0

5.

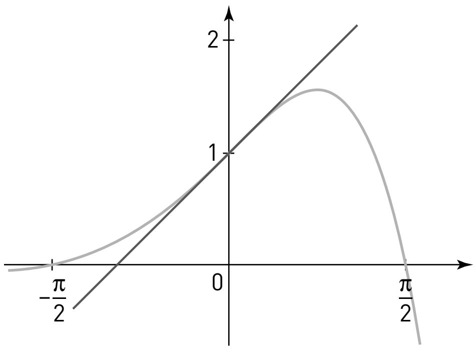


6. f est continue sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

f prend des valeurs strictement supérieur à 0,5 sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Sur $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, f est strictement décroissante avec $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) > 0{,}5$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une solution unique α sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

7. $\alpha \approx 1{,}57$

8. $y = x + 1$



79. Nombre de solutions

1. a) $1-\frac{x}{2}<0 \Leftrightarrow 1<\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2<x$ et $-1-\frac{x}{2}>0$

$\Leftrightarrow -1>\frac{x}{2} \Leftrightarrow -2<x$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $g(x) = 0$ $\Leftrightarrow \sin(x)=\frac{x}{2} \Leftrightarrow -1<\frac{x}{2}<1$

ainsi, d'après la question **1. a)**, cette équation admet des solutions uniquement dans [–2 ; 2].

2. $g'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow \cos(x)<\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+2k\pi,$

$k \in \mathbb{Z} < x < \frac{5\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		–	0	+	0	–	
Variation de g	$\frac{\pi}{2}$ ↘		$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}>0$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}<0$

g est continue sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ et donc sur [–2 ; 2].

g est strictement décroissante sur $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{3}\right]$ avec $f(-\pi)>0$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{3}\right]$ avec $\alpha \approx -1{,}9$.

g est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ avec $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$ Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ avec $\beta = 0$.

g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ avec $f(\pi)<0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0$ Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution γ sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ avec $\gamma \approx 1{,}9$.

Cette équation a donc trois solutions.

4. $\gamma \approx 1{,}895$

80. Suites et fonctions trignométriques

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Donc grâce au théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos(4x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}$

Ce sont les points de coordonnées

$\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,; f\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ou $\left(-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\,; f\left(\frac{\pi}{-4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. a) $u_{n+1} = f\left((n+1)\frac{\pi}{2}\right) = e^{-n\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n\pi + 2\pi)$

$= e^{-n\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n\pi) = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}}$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $e^{\frac{\pi}{2}}$.

b) $e^{\frac{\pi}{2}} > 1$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. a) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$f'(x) = -e^{-x}\cos(4x) - 4\sin(4x)e^{-x} = -e^{-x}(\cos(4x) + 4\sin(4x))$

b) $g'(x) = -e^{-x}$ et $f'\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$

D'après la question **2.**, les deux courbes ont la même tangente en chacun de leurs points communs.

5. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0{,}3$

81. Équations de fonction

1. $f'(x) = -3\sin(3x) - 6\cos(3x)$; $f''(x) = -9\cos(3x) + 18\sin(3x)$

2. $9f(x) + f''(x) = 0$

3. $g'(x) = -3\sin\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right)$; $g''(x) = -9\cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right)$

Donc $g''(x) + 9g(x) = 0$ et $g(0) = \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) = 0 \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} \\ \quad ou \qquad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3} \end{cases}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4} ;; \frac{7\pi}{12} ; \frac{11\pi}{12} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{19\pi}{12} ; \frac{23\pi}{12}\right\}$

5. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

Donc les solutions s'écrivent $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ et forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$.

82. QCM

d)

Préparer le BAC Je me teste p. 100

83. B **84. B**
85. D **86. C**
87. B **88. C**
89. C

Préparer le BAC Je révise p. 101

90. Un lapin qui vit dangereusement

1. $AD = \frac{AB}{\cos(\theta)} = \frac{4}{\cos(\theta)}$; $CD = 7 + 4\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$\frac{60\text{ km}}{\text{h}} = 1000\text{ m/min}$ et $\frac{30\text{ km}}{\text{h}} = \frac{500\text{ m}}{\text{min}}$

$t_1 = \frac{1}{125\cos(\theta)}$; $t_2 = \frac{7 + 4\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1000}$.

2. $t_1 < t_2 \Leftrightarrow \frac{8}{\cos(\theta)} < 7 + 4\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \Leftrightarrow f(\theta) > 0$

$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - 4\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{2(1 - 2\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

f' est du signe de $1 - 2\sin(\theta)$ donc f' est strictement positive sur $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right[$ et strictement négative sur $\left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et s'annule en $\frac{\pi}{6}$. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

le lapin s'en sort si $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}$.

91. Aire maximale d'un trapèze

1. Sur ordinateur.

2. a) $\theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

b) $\mathcal{A}(\theta) = \frac{(1 + AD) \times h}{2} = \frac{(1 + 1 + 2\cos(\theta)) \times \sin(\theta)}{2}$

$= (1 + \cos(\theta))\sin(\theta)$

c) $\mathscr{A}'(\theta) = -\sin^2(\theta) + (1 + \cos(\theta))\cos(\theta)$

$\mathscr{A}'(\theta) = -\sin^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2\theta$

$\mathscr{A}'(\theta) = 2\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1$

On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(\theta)$.

On étudie alors le signe du polynôme $2X^2 + X - 1$ sur $[0 ; 1]$.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$		+	0	−	
Variation de A	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

d) On en déduit que pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, l'aire du trapèze est maximale.

92. Étude de fonctions

1. $f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x)$

2. $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$

3. $\sin(x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0$

$x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

4.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\sin(x)$	0	−		−	0	+		+	
$1 + 2\cos(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	

5.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Variation de f	2,5	↘	0,25	↗	0,5	↘	0,25	↗	2,5

93. Étude de fonctions avec une fonction auxiliaire

A. 1. $f'(x) = \dfrac{9x^4 - 18x^2 + 9}{(3x^2 + 1)^2}$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = x^2$ et on étudie le signe de $9X^2 - 18X + 9$

Comme $\Delta = 0$, ce polynôme est toujours positif.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
Variation de f	$-\infty$	↗	$+\infty$

$y = f'(0)x + f(0) = 9x - 3$

B. 1. $g(x + 2\pi) = g(x)$

2. a. $g(x) = f(\sin(x))$

b. $g'(x) = \cos(x) \times \dfrac{9\sin(x)^4 - 18\sin(x)^2 + 9}{(3\sin(x)^2 + 1)^2}$

La fonction cosinus est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	−	0	+	0	−	
Variation de g	-3	↘	-6	↗	0	↘	-3

Exercices vers le supérieur p. 102-103

94. Représenter une ampoule

1. Pour tout réel $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \frac{\pi}{4} b\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

2. Comme ces tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses, on a : $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} b\cos(c) = 0 \Leftrightarrow \cos(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{2}$ puisque $c \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. On peut vérifier que $f'(4) = 0$ nous permet aussi de trouver $c = \frac{\pi}{2}$.

3. $f(x) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$ avec $f(4) = 3$, $f(0) = 1$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow a + b = 1$; $f(4) = 3 \Leftrightarrow a - b = 3$

On obtient alors $a = 2$ et $b = -1$.

$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$

95. Suite de sinus

Pour tout entier naturel k non nul, on a $-1 \leqslant \sin(k) \leqslant 1$ donc $\frac{-1}{k} \leqslant \frac{\sin(k)}{k} \leqslant \frac{1}{k}$.

On a alors : $\frac{-1}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \ldots - \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \ldots + \frac{\sin(n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

$\frac{-1}{n^2} \times n \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2} \times n\ -\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$

Grâce au théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.

96. Suite de suite

On peut prendre $a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n+1}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

Par composition de limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

97. Variations de fonctions

a) Vrai. **b) Vrai.** **c) Faux.** Sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$ les fonctions cosinus et sinus sont décroissantes puis sur $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$ la fonction cosinus est croissante et la fonction sinus est décroissante.

98. Une formule utile

1. $M(\cos(a) ; \sin(a))$

et $M'\left(\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) ; \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ avec

$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a)$ et $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$

d'où : $M'(-\sin(a) ; \cos(a))$.

2. Dans le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, les coordonnées de N sont : $N(\cos(b) ; \sin(b))$.

3. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $N(\cos(a + b) ; \sin(a + b))$.
De plus, d'après la question **2.**, on a :

$\overrightarrow{ON} = \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'}$.

D'après la question **1.**, on a :

$\overrightarrow{ON} = \cos(b)(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\ \vec{j}) + \sin(b)(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j})$

$\overrightarrow{ON} = (\cos(b)\cos(a) - \sin(b)\sin(a))\ \vec{i}$
$\quad + (\cos(b)\sin(a) + \sin(b)\cos(a))\vec{j}$.

4. Ainsi, on a bien démontré les deux égalités cherchées.

99. Dériver une fonction

a) Faux, elle est décroissante sur cet intervalle.

b) Faux. **c) Vrai.** **d) Vrai.**

100. Déterminer es valeurs exactes

1. $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

Pour tout x réel, on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Donc :

$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16}$

comme $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

D'où : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{4}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} = \frac{4}{8 + 4\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

2. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$- \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Pour tout x réel, on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Donc :

$\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8+4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16}$

comme $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d'où : $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2} = \frac{4}{8-4\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$.

101. Inégalité de Huygens

1. $f'(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 3 = \frac{2\cos^3(x)+1-3\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$

2. a) $(x-1)^2(2x+1) = (x^2-2x+1)(2x+1)$

$= 2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 2x + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 1 = P(x)$

b) Pour tout $x \in]0\,;1]$, $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $2x+1 > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]0\,;1]$, $P(x) \geqslant 0$.

3. a) $f'(x) = \frac{2\cos^3(x)+1-3\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{P(\cos(x))}{\cos^2(x)}$.

b) Comme $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) \in]0\,;1]$.

D'après la question 2. b) on peut en déduire que pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) \geqslant 0$.

La fonction f est donc croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

c) $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\sin(x) - 3x = 2 - \frac{3\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} = +\infty$

avec $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

ainsi, l'inégalité de Huygens est vérifiée.

102. Arc de sinusoïde

1. • l_2 est la ligne brisée qui relie les points $A_0\left(\frac{3\pi}{2}\,;0\right)$ et $A_1(2\pi\,;1)$ puis les points $A_1(2\pi\,;1)$ et $A_2\left(\frac{5\pi}{2}\,;0\right)$.

Distance entre A_0 et A_1 : $\sqrt{\left(2\pi-\frac{3\pi}{2}\right)^2+1^2} = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}$

Distance entre A_2 et A_1 : $\sqrt{\left(2\pi-\frac{5\pi}{2}\right)^2+1^2} = \frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}$

$l_2 = \sqrt{\pi^2+4}$

• l_3 est la ligne brisée qui relie les points $A_0\left(\frac{3\pi}{2}\,;0\right)$ et $A_1\left(\frac{11\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ puis les points $A_1\left(\frac{11\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A_2\left(\frac{13\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et les points $A_2\left(\frac{13\pi}{6}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A_3\left(\frac{5\pi}{2}\,;0\right)$

Distance entre A_0 et A_1 :

$\sqrt{\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{3\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi^2+27}}{6}$.

Distance entre A_2 et A_1 : $\sqrt{\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{13\pi}{6}\right)^2+0^2} = \frac{\pi}{3}$.

Distance entre A_2 et A_3 : $\sqrt{\left(\frac{13\pi}{6}-\frac{5\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{4\pi^2+27}}{6}$. $l_3 = \frac{\sqrt{4\pi^2+27}+\pi}{3}$

2.

```
L←0
Pour i allant de 0 à n :
  L←L+√((π/n)² + (cos(3π/2 + (i+1)π/n) − cos(3π/2 + iπ/n))²)
Fin Pour
Afficher L
```

3.

```
Def Ligne_brisee(n):
   L=0
   for i in range(n):
      L=L+sqrt((pi/n)**2+(cos((3*pi)/2
      +(i+1)*pi/n)-cos((3*pi)/2+(i*pi)/n))**2)
   print(L)
```

```
>>> ligne_brisee(2)
3.724191778237173
>>> ligne_brisee(3)
3.7650074865910144
>>> ligne_brisee(1000)
3.820197296312407
```

103. Résoudre une équation

$\sin(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ ou \\ 1 + 2\cos(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ ou \\ x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

104. Représentation graphique

a) Faux car $\cos(0) = 1$.

b) Faux, la courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

c) Vrai car pas de symétrie non plus par rapport à l'origine du repère.

105. Fonctions hyperboliques

1. $sh(x) = -sh(x)$; $ch(-x) = ch(x)$; $th(x) = -th(x)$.

sh et *th* sont des fonctions impaires et *ch* est une fonction paire.

2. a) $ch^2(x) - sh^2(x) =$

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

b) $ch'(x) = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = sh(x)$

De même, $sh'(x) = ch(x)$

$$th'(x) = \frac{ch(x)^2 - sh(x)^2}{ch(x)^2} = \frac{1}{ch(x)^2} \text{ et } 1 - th^2(x)$$

$$= \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch(x)^2} = th'(x)$$

3. $ch'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$ch'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

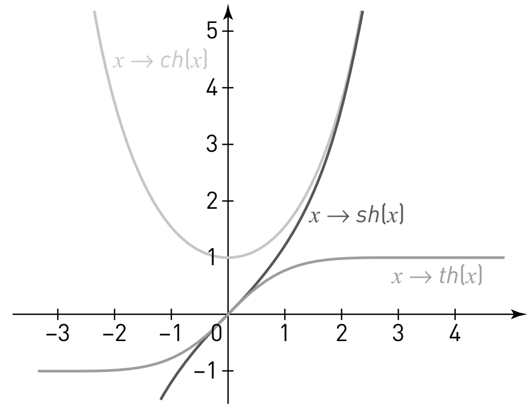
ch est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ avec $ch(0) = 1$.

$sh'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$

Donc *sh* est strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels.

$th'(x) = \dfrac{1}{ch(x)^2} > 0$

th est donc strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels.



106. Équation et algorithme

1. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ avec $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\cos(x) = 0{,}2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2.

```
a←0
b←3
Tant que b-a>0,001 :
   m←(a+b)/2
   Si cos(m)>0
      a←m
   Sinon
      b←m
   Fin si
Fin tant que
Afficher a et b
```

Travaux pratiques p. 104-107

TP 1. Chercher la tangente

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Étudier certaines propriétés de la fonction tangente.

A. Dans le triangle rectangle

1. $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$; $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$; $\tan(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$

2. $\cos(\widehat{ACB}) = \dfrac{AC}{BC}$; $\sin(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{BC}$; $\tan(\widehat{ACB}) = \dfrac{AB}{AC}$

3. Soit x la mesure d'un angle aigu, on a alors : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

B. Avec le cercle trigonométrique

1. a) Comme $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, la droite (OM) ne peut pas être perpendiculaire à l'axe des abscisses. Ainsi, la droite (OM) et la tangente T à C au point A ne sont pas parallèles donc sont sécantes. Le point N est donc bien défini.

b) Soit P le point de coordonnées $(\cos(x) ; 0)$.

Les droites (MP) et (AN) sont parallèles (car toutes les deux perpendiculaires à l'axe des abscisses) et les droites (MN) et (AP) sont sécantes en O.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{AN}{MP} = \dfrac{OA}{OP} \Leftrightarrow \dfrac{y_N}{\sin(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow y_N = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

2. a) $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$

La fonction tangente est π-périodique.

b) $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

La fonction tangente est impaire.

c) La fonction tangente est bien définie sur l'intervalle $-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme le quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

d) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est donc strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. a) La fonction cosinus s'annule pour $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

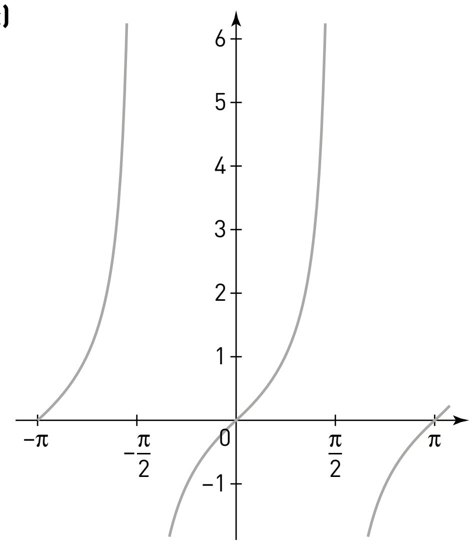
b)

x	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
Variation de $\tan(x)$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	

$\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x<-\frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0$

avec $\cos(x) < 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ x<-\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$

c)



TP 2. De plus en plus proche du sinus et du cosinus

A. Sinus

1. a) 3!=6 ; 5!=120 ; 7!=5 040.

b)

```
a ← 1
Pour i allant de 1 à n faire :
   a = a×i
Fin Pour
Retourner (a)
```

c)

```
def factorielle (n) :
   a = 1
   for i in range (1, n+1):
      a = a*i
return (a)
```

2.

```
def sinusnombre (x,n) :
   s = 0
   if x > 1 or x < -1 :
      print ('Erreur')
      exit
   for i in range (0, n+1, 1) :
      s = s + ((-1)**i)*(x**(2*i+1)/factorial(2*i+1))
   print ('sin(x) =', s)
```

o0u :

```
def sinusnombre2 (x, n) :
   s = 0
   if x > 1 or x < -1 :
      print ('Erreur')
      exit
   for i in range (0, n+1, 1):
      s = s + ((-1)**i)*(x**(2*i+1)/factorial(2*i+1))
   print ('sin(x) =', s)
```

B. Cosinus

1. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

2.

```
def cosinusnombre (x, n) :
   s = 0
   if x > 1 or x < -1 :
      print ('Erreur')
      exit
   for i in range (0, n+1, 1) :
      s = s + ((-1)**i)*(x**(2*i)/factorielle(2*i+1))
   print ('cos(x) =', s)
```

TP 3. Modélisation du son

A. Modélisation d'un son pur

1. a) $f(t + T) = P\sin(2\pi F(t + T)) = P\sin(2\pi Ft + 2\pi FT)$

$f(t) = f(t + T) \Leftrightarrow 2\pi FT = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{1}{F}$

b) La période T est l'inverse de la fréquence d'un son.

2. a) Graphiquement, sa période est environ égale à 0,002 5.

$T = \frac{1}{F} = \frac{1}{440} \approx 0{,}0022$

b) L'amplitude est de 1.

c) $f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{440}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{220}t\right)$

B. Modélisation d'un son

1. a) T_1=0,009 **b)** T_3=0,003

c) La période de la note mi_3 est trois fois plus petite que la période de la note la_1.

2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
from random import *
def modelisationson () :
   n = randint (3, 11)
   a =[0]*n
   f = 0
   x =[]
   y =[]
   pas = 1
   t = 0
   for i in range (n) :
      a[i]= random ()
   for k in range (0, 100) :
      x.append (t)
      for I in range (n) :
         f = f + a[i]*sin(110*pi*(i+1)*t)
      y.append (f)
      t = t + pas
   plt.plot (x, y)
   plt.shox ()
```