



Fonctions trigonométriques

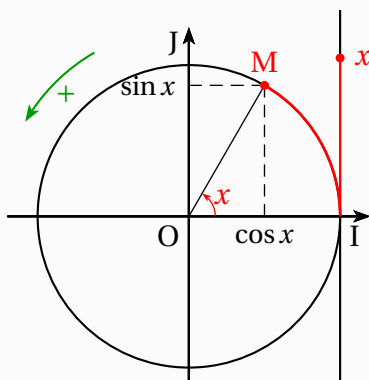
I Définitions et propriétés

Rappel : Intuitivement

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

A tout nombre x , on associe un point unique M du cercle trigonométrique de centre O .

Le point M a pour coordonnées $(\cos(x) ; \sin(x))$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						

Définition : Définitions des fonctions trigonométriques

- La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x associe $\cos(x)$, $f : x \rightarrow \cos x$
- La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x associe $\sin(x)$, $f : x \rightarrow \sin x$

Remarque : Pour tout réel x , $... \leq \cos x \leq ...$ et $... \leq \sin x \leq ...$; $\cos^2 x + \sin^2 x = ...$

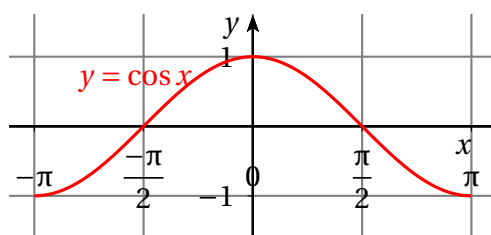


Propriété : parité

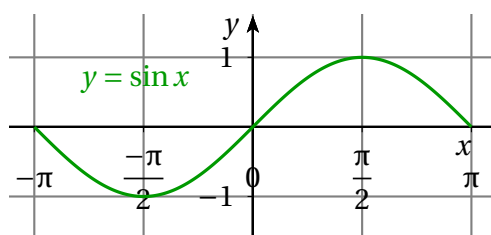
- Pour tout nombre x , $\cos(-x) = \cos(x)$, on dit que la fonction cosinus est
- Pour tout nombre x , $\sin(-x) = -\sin(x)$, on dit que la fonction sinus est

Graphique :

- Dans un repère orthogonal, le point $M(x, \cos(x))$ et $M'(-x, \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$.



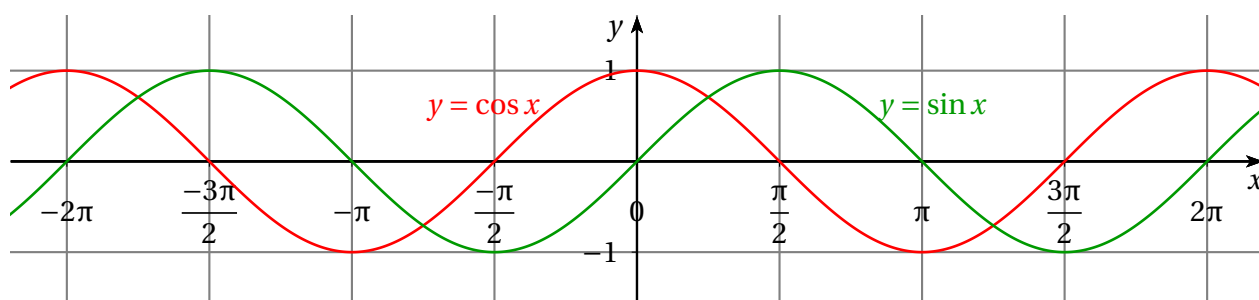
- Dans un repère orthogonal, le point $M(x, \cos x)$ et $M'(-x, \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Propriété : périodicité

- Tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$; $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période
- Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des

Graphique : Pour tracer leurs courbes représentatives, il suffit de les tracer sur un intervalle d'amplitude 2π puis de compléter par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$ ou $-2\pi \vec{i}$.





Etude de la fonction sinus

- La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\sin'(x) = \cos(x)$
- Tableau de variation

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \dots$				
$\sin(x)$				

Etude de la fonction cosinus

- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\cos'(x) = -\sin(x)$
- Tableau de variation

x	$-\pi$	0	π
$\cos'(x) = \dots$			
$\cos(x)$			

Démonstration :

les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0, de dérivées respectives 0 et 1

c'est dire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Soit x un réel et $h \neq 0$

$$\text{On a } \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \dots\dots\dots$$

$$\text{On a } \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right)$$

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \dots\dots\dots$$



Limites

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \dots\dots\dots$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots\dots\dots$

Démonstration : Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Ainsi :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \dots\dots\dots$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \dots\dots\dots$

Exemple : Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

2. $f(x) = \cos^2 x$

3. $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$

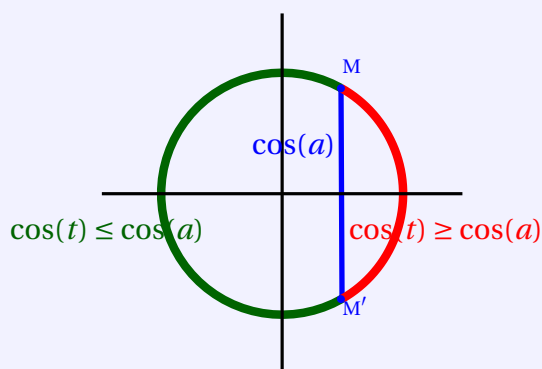


II Inéquations trigonométriques

Résolution d'Inéquations

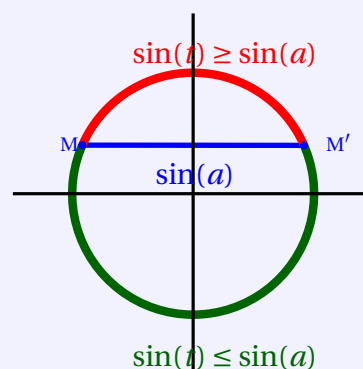
Deux points d'un cercle trigonométrique d'abscisse

- $\cos(a)$ ($a \neq k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\cos(t) \geq \cos(a)$ et $\cos(t) \leq \cos(a)$



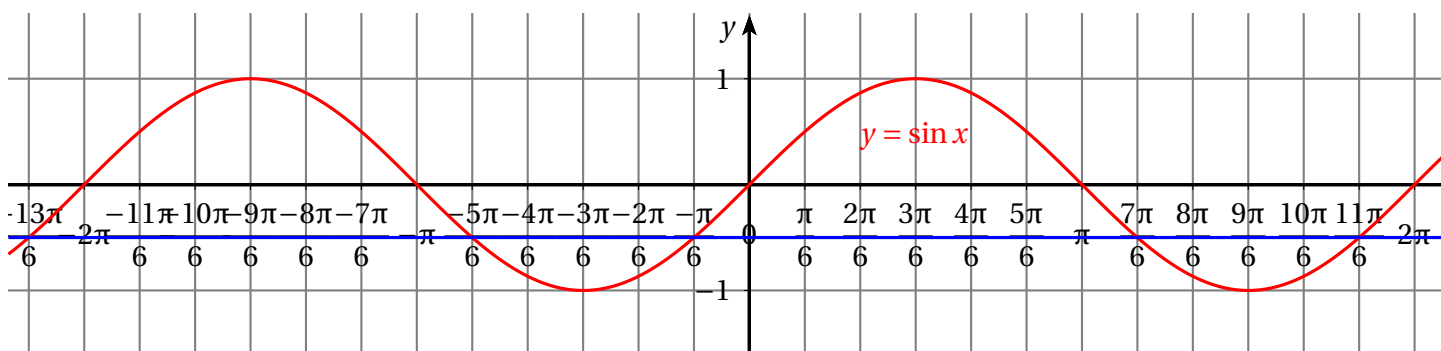
Deux points d'un cercle trigonométrique d'ordonnée

- $\sin(a)$ ($a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\sin(t) \geq \sin(a)$ et $\sin(t) \leq \sin(a)$



Exemple : On veut résoudre : $\sin x < -0,5$ dans $[0 ; 2\pi[$

- **Méthode 1** : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus



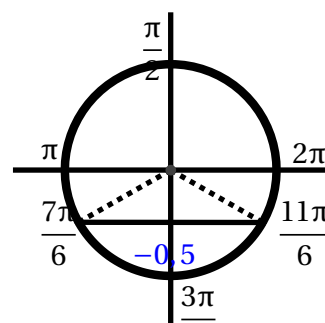
Sur la courbe, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à -0,5.

Les abscisses sont les solutions de l'inéquation :

- **Méthode 2** : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus est strictement inférieur à -0,5, ceux dont l'ordonnée est strictement inférieure à -0,5.

Les solutions sont





III Exercice d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0 ; \pi]$. En déduire les variations de f sur $[0 ; \pi]$.
2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
3. Montrer que f est 2π -périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-4\pi ; 4\pi]$.

