



Fonctions trigonométriques

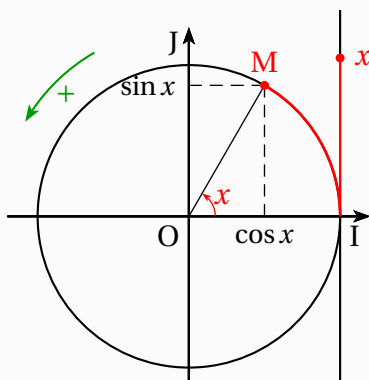
I Définitions et propriétés

Rappel : Intuitivement

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

A tout nombre x , on associe un point unique M du cercle trigonométrique de centre O .

Le point M a pour coordonnées $(\cos(x) ; \sin(x))$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Définition : Définitions des fonctions trigonométriques

- La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x associe $\cos(x)$, $f : x \rightarrow \cos x$
- La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x associe $\sin(x)$, $f : x \rightarrow \sin x$

Remarque : Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

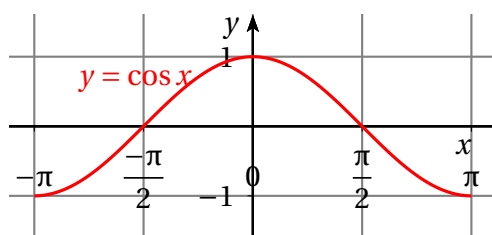


Propriété : parité

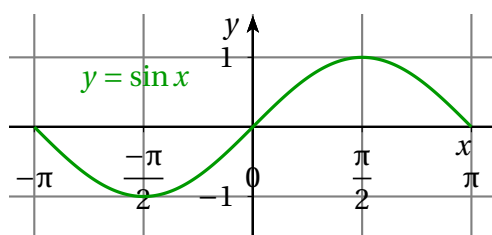
- Pour tout nombre x , $\cos(-x) = \cos(x)$, on dit que la fonction cosinus est paire.
- Pour tout nombre x , $\sin(-x) = -\sin(x)$, on dit que la fonction sinus est impaire.

Graphique :

- Dans un repère orthogonal, le point $M(x, \cos(x))$ et $M'(-x, \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$.



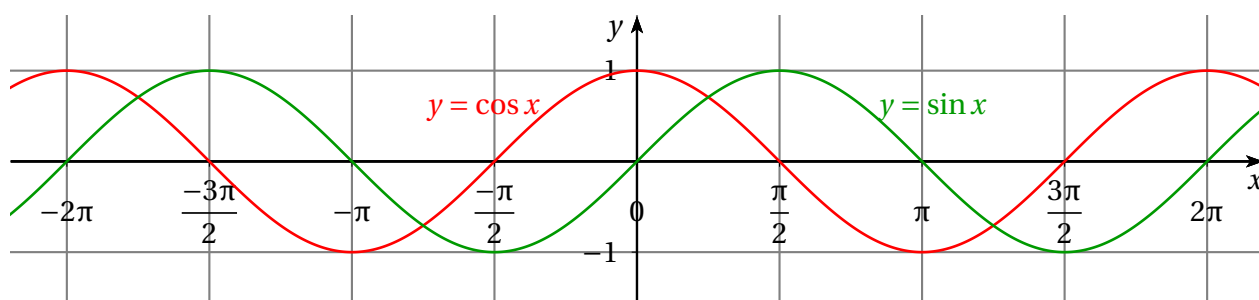
- Dans un repère orthogonal, le point $M(x, \cos x)$ et $M'(-x, \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Propriété : périodicité

- Tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$; $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période 2π
- Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des sinusoïdes.

Graphique : Pour tracer leurs courbes représentatives, il suffit de les tracer sur un intervalle d'amplitude 2π puis de compléter par translation de vecteur $2\pi \vec{i}$ ou $-2\pi \vec{i}$.





Etude de la fonction sinus

- La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\sin'(x) = \cos(x)$
- Tableau de variation

Tableau de variation					
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$\sin'(x) = \cos(x)$	-	0	+	0	-
$\sin(x)$	0			1	
					</

Etude de la fonction cosinus

- La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\cos'(x) = -\sin(x)$
- Tableau de variation

Tableau de variation			
x	$-\pi$	0	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	+	0	-
$\cos(x)$	-1	1	-1

Démonstration :

les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0, de dérivées respectives 0 et 1

c'est dire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Soit x un réel et $h \neq 0$

$$\text{On a } \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos x \sin h + \sin x \cos h - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

$$\text{On a } \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h} \right)$$

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$



Limites

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration : Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Ainsi :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1.$

Exemple : Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

2. $f(x) = \cos^2 x$

3. $f(x) = \sin x (1 + \cos x)$

1. f est de la forme $u(ax + b)$ avec $u(x) = \sin x$, $a = 3$ et $b = \frac{\pi}{4}$.

On a $u'(x) = \cos x$ d'où $f'(x) = au'(ax + b) = 3 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. f est de la forme u^2 avec $u(x) = \cos(x)$.

On a $u'(x) = -\sin x$ d'où $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2(-\sin x)\cos x = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$.

3. f est de la forme uv dont la dérivée est $(u'v + uv')$ avec $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 1 + \cos(x)$.

$$f'(x) = \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Or, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$. D'où $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

Posons $X = \cos x$. Alors, $f'(x) = 2X^2 + X - 1 = (2X - 1)(X + 1)$ après calcul des racines.

Ainsi, $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

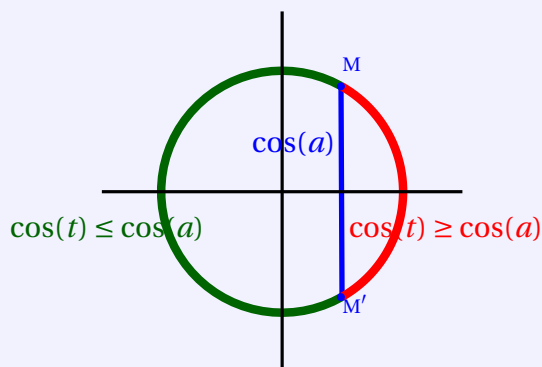


II Inéquations trigonométriques

Résolution d'Inéquations

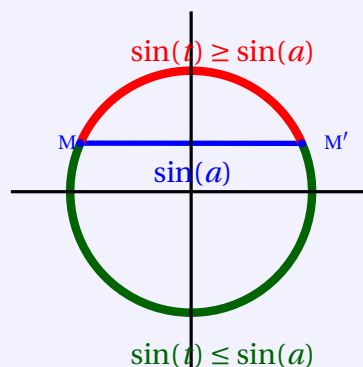
Deux points d'un cercle trigonométrique d'abscisse

- $\cos(a)$ ($a \neq k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\cos(t) \geq \cos(a)$ et $\cos(t) \leq \cos(a)$



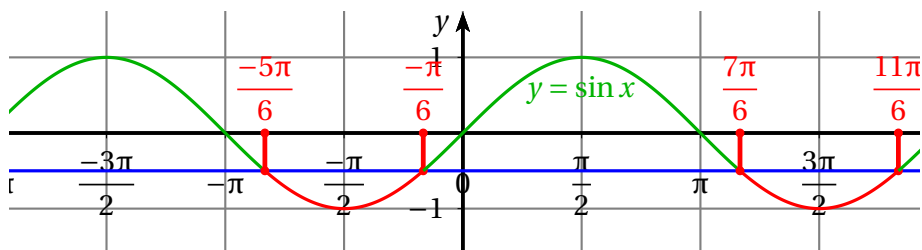
Deux points d'un cercle trigonométrique d'ordonnée

- $\sin(a)$ ($a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\sin(t) \geq \sin(a)$ et $\sin(t) \leq \sin(a)$



Exemple : On veut résoudre : $\sin x < -0,5$ dans $[0 ; 2\pi[$

- **Méthode 1** : Résolution graphique à l'aide de la courbe représentative de la fonction sinus



Sur la courbe, on colorie les points dont l'ordonnée est strictement inférieure à -0,5.

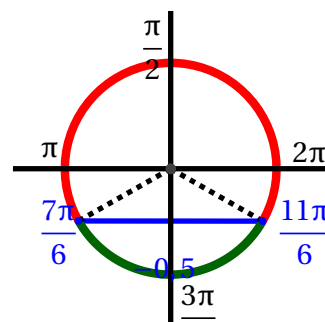
Les abscisses sont les solutions de l'inéquation.

Dans $[0 ; 2\pi[$, $S =]\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}[$

- **Méthode 2** : Résolution graphique à l'aide du cercle trigonométrique

Sur le cercle trigonométrique, on colorie les points associés à un réel dont le sinus est strictement inférieur à -0,5, ceux dont l'ordonnée est strictement inférieure à -0,5.

Dans $[0 ; 2\pi[$, $S =]\frac{7\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}[$





III Exercice d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0 ; \pi]$. En déduire les variations de f sur $[0 ; \pi]$.
2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
3. Montrer que f est 2π -périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-4\pi ; 4\pi]$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $2 + \cos x \neq 0$.

$$f'(x) = \frac{3 \cos x (2 + \cos x) - 3 \sin x (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6 \cos x + 3}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6(\cos x + \frac{1}{2})}{(2 + \cos x)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $\cos x + \frac{1}{2}$ sur $[0 ; \pi]$. Or :

- sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$, $\cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{2} > 0$;
- sur $\left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$, $\cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x + \frac{1}{2} < 0$.

Et $f'(x)$ ne s'annule qu'en $\frac{2\pi}{3}$.

D'où le tableau de variation :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$\sqrt{3}$	0

2. $f(-x) = \frac{3 \sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = \frac{-3 \sin x}{2 + \cos x} = -\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$ donc f est impaire.

On peut donc limiter l'étude de f à $[0 ; \pi]$. On peut en déduire que la fonction f est décroissante sur $[-\pi ; -\frac{2\pi}{3}]$ et sur $[\frac{2\pi}{3} ; \pi]$ et croissante sur $[-\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}]$.

3. $f(x + 2\pi) = \frac{3 \sin(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} = f(x)$ donc f est 2π -périodique.

4. On trace $\mathcal{C}$ sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-\pi ; 0]$ par symétrie centrale puisque f est impaire.

Enfin, comme f est 2π -périodique, on répète le motif tous les 2π par translation.

