CHAPITRE 8 Calcul intégral

Manuel p. 238-273

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre termine la partie Analyse du programme. Il donne les outils du calcul infinitésimal pour les études supérieures en définissant l'intégrale d'une fonction continue en centrant l'étude sur l'interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive puis négative pour terminer par le calcul de l'aire entre deux courbes.

L'accent dans ce chapitre est mis sur le sens de l'intégrale sans étude des propriétés abstraites.

Ainsi, le chapitre présente la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive comme étant la généralisation d'un calcul d'aire. L'existence de primitive permet de généraliser cette définition à toute fonction continue.

La valeur moyenne est introduite comme généralisation de la moyenne d'une série statistique et permet d'accéder rapidement à l'interprétation graphique dans le cas des fonctions continues positives.

Objectifs

- → **Estimer une intégrale par calcul d'aire**
- → **Calcul d'intégrale en utilisant les primitives**
- → **Déterminer la valeur moyenne d'une fonction**
- → **Calculer une aire sous la courbe d'une fonction**
- → **Calculer une aire entre deux courbes**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 139

1. Calculer des aires

a) $11 < \mathcal{A}_A < 25$ et $16 < \mathcal{A}_B < 25$.

b) Rectangle ABCD : AB × AD

Triangle EFG : 0,5(EF × hauteur)

Demi-cercle HI : 0,25 × π × HI

Trapèze JKML : 0,5(LM + JK) × hauteur

2. Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

a) $f > 0$ sur $[-2\ ;\ 2]$ et $f < 0$ sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

b) $g > 0$ sur $]-3\ ;\ -2[\cup]0\ ;\ 3{,}5[$ et $g < 0$ sur $]-2\ ;\ 0[\cup]3{,}5\ ;\ 4[$.

c) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2\ ;\ 1{,}25[$ et en dessous sur $]-3\ ;\ -2[\cup]1{,}25\ ;\ 4[$.

3. Déterminer le signe d'une fonction

1. $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ donc g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$ et négative sinon.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ admet une solution évidente : 1. On en déduit la deuxième : –3. Donc f est positive sur $]-\infty\ ;\ -3]\cup[1\ ;\ +\infty[$ et négative sur $[-3\ ;\ 1]$.

2. On étudie le signe de

$f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 3 - x + 1 = x^2 + x - 2$.

1 est une racine évidente. On en déduit la deuxième : –2. $f(x) - g(x)$ est positif pour $x \in\ ]-\infty\ ;\ -2[\cup]1\ ;\ +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et au-dessus sinon.

4. Justifier qu'une fonction est continue

a) $\mathbb{R}$

b) $]-\infty\ ;\ 0{,}5[\cup]0{,}5\ ;\ +\infty[$

c) $]-\infty\ ;\ 1{,}5]$

5. Déterminerune primitive

a) $F(x) = x^5 - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}$

b) $G(x) = \dfrac{1}{-2(3+x^2)^2}$

c) $K(x) = -\sqrt{3-2x}$

d) $H(x) = \dfrac{1}{3}e^{x^3+1}$

e) $J(x) = \ln(x)$

f) $K(x) = \dfrac{3}{2}\ln(x^2+1)$

Activités p. 240

1 Évaluer l'intégrale d'une fonction continue et positive

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Il s'agit d'introduire la définition de l'intégrale d'une fonction continue positive.

La première partie consiste à déterminer l'aire sous la courbe de fonctions en utilisant des formules.

La deuxième partie consiste à présenter une méthode, celle des rectangles pour approcher l'aire sous la courbe d'une fonction décroissante qui ne se détermine pas par une formule évidente. En utilisant un programme Python, l'élève peut confirmer son intuition : l'aire sous la courbe est encadrée par deux suites qui ont la même limite : l'aire. La notation intégrale est indiquée à la fin de cette partie.

La troisième partie de l'activité est facultative et permet d'expliciter ces suites sur un exemple de fonction continue positive croissante.

A. Aire sous la courbe d'une fonction

a) $\mathcal{A} = \dfrac{AC \times CB}{2} = 8$

b) $\mathcal{A} = \dfrac{(1+3)\times 4}{2} = 8$

c) $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}\times \pi \times 2^2 = 2\pi$

B. Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

[ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur sur la définition de la fonction f. Il faut utiliser :

$f(x) = e^{x\ln\left(\frac{9}{24}\right)+\ln(10)}$.

1. On divise l'intervalle en 4 intervalles de même amplitude. On construit 4 rectangles hachurés de longueurs $f(6)$; $f(12)$; $f(18)$; $f(24)$. On construit 4 rectangles colorés $f(0)$; $f(6)$; $f(12)$; $f(18)$.

2. $U_2 = 12(f(12) + f(24))$

$U_3 = 8(f(8) + f(16) + f(24))$

$V_2 = 12(f(0) + f(12))$

$V_3 = 8(f(0) + f(8) + f(16))$

3. (U_n) est l'aire des rectangles hachurés, elle est contenue dans l'aire sous la courbe. Plus l'intervalle devient petit, plus l'aire hachurée croît et se rapproche de l'aire sous la courbe : (U_n) semble être une suite croissante convergente.

(V_n) est l'aire des rectangles colorés et contient l'aire sous la courbe. Plus l'intervalle devient petit, plus l'aire colorée décroît et se rapproche de l'aire sous la courbe : (V_n) est une suite décroissante convergente.

4. Il s'agit de déterminer (U_n) et (V_n) en fonction de n.

$$U_n = \frac{24}{n}\left(f\left(0+\frac{24}{n}\times 1\right) + f\left(0+\frac{24}{n}\times 2\right) + \dots + f\left(0+\frac{24}{n}\times n\right)\right)$$

$$V_n = \frac{24}{n}\left(f\left(0+\frac{24}{n}\times 0\right) + f\left(0+\frac{24}{n}\times 1\right) + \dots + f\left(0+\frac{24}{n}\times (n-1)\right)\right)$$

Le programme suivant permet de déterminer la valeur de U_n et celle de V_n.

```
def U(f,n):
   S=0
for k in range(1,n+1):
   S=S+f(k*24/n)
return S*24/n
```

```
def V(f,n):
   S=0
for k in range(0,n):
   S=S+f(k*24/n)
return S*24/n
```

On remarque en prenant une valeur de n assez grande que les deux suites convergent vers la même valeur.

C. Déterminer $\int_0^1 x^2 dx$ par la méthode des rectangles

1. Il pourrait être intéressant de modifier le programme pour qu'il s'adapte à toutes les fonctions.

2. a) $U_1 = 1 \times f(0) = 0$

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{8}$$

$$U_3 = \frac{1}{3}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{5}{18}$$

$$V_1 = 1 \times f(1) = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right) = \frac{5}{8}$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right) = \frac{14}{27}$$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur sur l'expression de U_n. L'erreur est corrigée dans les éditions suivantes, il faut utiliser $U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

$$U_n = \frac{1}{n}\left(f\left(0 + \frac{0}{n}\right) + f\left(0 + \frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(0 + \frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$U_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^2}\right)$$

$$U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

c) [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur sur l'expression de V_n. L'erreur est corrigée dans les éditions suivantes, il faut utiliser $V_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

$$V_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f(1)\right)$$

$$V_n = \frac{1}{n} \times \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^2}$$

$$V_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

3. $\int_0^1 x^2 dx$ est l'aire sous la courbe de la fonction carré entre 0 et 1. (U_n) est contenue dans cette aire, (V_n) contient cette aire.

On en déduit $U_n \leqslant \int_0^1 x^2 dx \leqslant V_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

Donc $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

2 Relier les notions d'intégrale et de primitive

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Il s'agit de calculer l'intégrale d'une fonction continue positive de manière différente : par le calcul d'aire et par l'image d'une fonction qui s'avère être celle de la primitive de la fonction intégrée.

La première partie permet de conjecturer la propriété sur un exemple.

La deuxième partie démontre la propriété sur un exemple.

La démonstration dans le cas général est traité dans la rubrique « apprendre à démontrer » p. 252.

A. Intégrale d'une fonction affine

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur sur la définition de la fonction f.

Il faut utiliser $f(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

N est le point d'abscisse $f(x)$.

1. [ERRATUM] La première édition du manuel présente une erreur, corrigée sur les éditions suivantes : $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$.

$$\mathcal{A}(x) = \frac{\left(2 + \left(\frac{1}{2}x + 2\right)\right) \times x}{2} = \frac{1}{4}x^2 + 2x$$

2. L'aire du trapèze est aussi l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et x donc $\mathscr{A}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

3. $\mathscr{A}'(x) = \frac{1}{4} \times 2 \times x^2 + 2 = f(x)$.

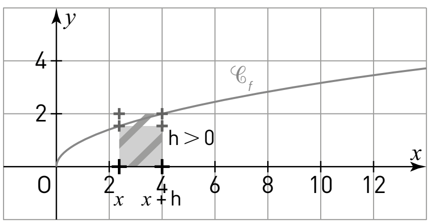
On en déduit que

$\mathscr{A}(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.

B. Intégrale de la fonction racine carrée

1. L'aire sous la courbe racine carrée entre 0 et x est $\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{d}t$.

2.



L'aire sous la courbe racine carrée entre x et $x + h$ est égale à $\mathscr{A}(x + h) - \mathscr{A}(x)$.

Elle est comprise entre l'aire égale à $h \times \sqrt{x}$ et l'aire égale à $h \times \sqrt{x+h}$ d'où :

$h \times \sqrt{x} \leqslant \mathscr{A}(x + h) - \mathscr{A}(x) \leqslant h \times \sqrt{x+h}$

et donc on a bien l'inégalité demandée.

3. $-h\sqrt{x+h} \leqslant \mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(x+h) \leqslant -h\sqrt{x}$

donc $h\sqrt{x} \leqslant \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x) \leqslant h\sqrt{x+h}$.

Ainsi : $\mathscr{A}(x+h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant \mathscr{A}(x)$.

4. $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$

$= \sqrt{x}$.

La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\mathscr{A}'(x) = \sqrt{x}$.

On en déduit que $\mathscr{A}(x) = \int_0^x \sqrt{t}\mathrm{d}t$ est une primitive de la fonction carrée.

3 Introduire l'intégration par parties

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Il s'agit de présenter la formule de l'intégration par parties sur un exemple puis de la démontrer.

1. La forme de f est un produit de deux fonctions qui ne correspond à aucune formule connue.

2. Une primitive de la fonction e^{-x} est $-\mathrm{e}^{-x}$.

Une primitive de f est : $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - f(x)$.

3. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, il faut chercher à montrer que $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'$.

$(uv)' = u'v + v'u$

On en déduit $\int_a^b uv' = \int_a^b (uv)' - \int_a^b vu'$

Donc $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'$.

4 Valeur moyenne d'une fonction

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Il s'agit de définir la valeur moyenne d'une fonction et son interprétation pour ensuite résoudre des problèmes. Ainsi, deux interprétations sont proposées : la première est la généralisation de la moyenne d'une série statistique, la deuxième comme étant la longueur d'un rectangle d'aire la surface sous la courbe.

1. a) La valeur moyenne est 32.

b) 32 est la quantité d'eau qui serait tombée par jour s'il avait plu la même quantité d'eau chaque jour.

C'est aussi la largeur d'un rectangle de côté 5 et d'aire la somme des 5 rectangles constituées par la série.

2. a) $\mathscr{A} = \int_0^5 (1{,}5 + \cos(x))\mathrm{d}x$

b) On cherche le nombre tel que $\mathscr{A} = 5 \times ?$.

On a donc : $? = \frac{1}{5}\int_0^5 (1{,}5 + \cos(x))\mathrm{d}x$.

À vous de jouer p. 243

1. On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 2x$. L'intégrale est l'aire d'un trapèze de hauteur 3 et de bases 4 et 10.

$$\int_2^5 2x\,\mathrm{d}x = \frac{(4+10)\times 3}{2} = 21\,\text{u.a.}$$

2. $\int_{-4}^{-1}(-2u-1)\,\mathrm{d}u = 12$

3. $$\mathcal{A}_{\mathrm{i}} = \frac{5}{10}\left(\ln(1) + \ln\left(1+\frac{5}{10}\right) + \ln\left(1+2\times\frac{5}{10}\right) + \ldots + \ln\left(1+9\times\frac{5}{10}\right)\right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{i}} = \frac{5}{10}\ (\ln(1\times 1{,}5\times 2\times 2{,}5\times \ldots \times 5{,}5)) \approx 5{,}28\ \text{u.a.}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} = \frac{5}{10}\left(\ln\left(1+\frac{5}{10}\right) + \ln\left(1+2\times\frac{5}{10}\right) + \ldots + \ln\left(1+9\times\frac{5}{10}\right) + \ln(6)\right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} = \frac{5}{10}\ (\ln(1{,}5\times 2\times 2{,}5\times \ldots \times 5{,}5\times 6) \approx 6{,}18\ \text{u.a.}$$

4. On choisit une série de rectangles (inférieurs ou supérieurs) et on calcule leur aire $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = 0{,}4\times\sum_{i=0}^{9}(-2+i\times 0{,}4)^2$$

$\mathcal{A} = 5{,}44$ u.a.

5. a) $$\int_{-1}^{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^{4} = \frac{27}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{35}{3}$$

b) $$\int_2^3 \frac{3x^2-1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x^3-x)\right]_2^3$$
$$= \ln(24) - \ln(6) = \ln(4)$$

6. a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, les bornes de l'intégrale ont été modifiées, il faut lire : $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$$

b) $\int_0^1 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$

c) $\int_1^2 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{-\mathrm{e}^{-4}+\mathrm{e}^{-1}}{2}$

7. a) $$\int_0^{\pi} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(-\cos(x)\right)_0^{\pi} = \cos(\pi) - \cos(0) = -2$$

b) $$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-2+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$$

8. a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, dans les éditions suivantes, l'intégrale à chercher est $\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{e}^3+1}{9}$$

b) -4

9. $$\int_0^1\left[2f(t)-g(t)\right]\mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 11$$

10. 1,5

11. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Donc

$$\int_2^4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x$$

donc $2 \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 2{,}5$.

12. $\int_0^1 e^{-n}dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}dx$

Donc $e^{-n} \leqslant \int_0^1 f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$.

La suite converge vers 0.

13. f est négative sur [–5 ; –3] donc

$$\mathscr{A} = \int_{-5}^{-3} -\frac{1}{x}dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

14. 1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 1$ car la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit $x = 2$.

2. g est négative sur]2 ; +∞[donc :

$$\mathscr{A} = \int_{-3}^{2} g(x)dx - \int_{2}^{4} g(x)dx = \frac{8\,811}{256}.$$

15. $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$. Le polynôme a deux racines –1 et 2. Il est négatif sur [–1 ; 2] donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$.

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)dx = 4{,}5.$$

16. $f(x) - g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 12$ donc $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.

$f - g$ est négative sur [–4 ; 4] donc

$$\mathscr{A} = -\int_{-4}^{4} (f(x) - g(x))dx = 64.$$

17. $u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n \cos(t)(t-1)dt$

Or, sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$: $t^n\cos(t) \geqslant 0$ et $t - 1 \leqslant 0$ donc

$t^n\cos(t)(t-1) \leqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$: $t^n\cos(t) \geqslant 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n\cos(t)dt \geqslant 0$ donc (u_n) est minorée par 0. (u_n) est décroissante et minorée, elle converge.

18. $0 \leqslant 1 - t \leqslant 1$ donc $(1-t)^{n+1} \leqslant (1-t)^n$ donc la suite est décroissante et minorée par 0. Elle converge.

19. 1. $F'(t) = f(t)$

2. $\int_0^{10} f(t)dt = -220e^{-10} + 20 < 20$. Ils respectent le cahier des charges (de justesse).

20. 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$f'(x) = -(0{,}5x + 3)e^{-0{,}5x}$.

f' est négative donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. $F'(x) = (x + 8)e^{-0{,}5x} = f(x)$.

Donc $F(x)$ est bien une primitive de $f(x)$.

3. x est exprimé en centaines d'euros donc 200 euros équivaut à $x = 2$.

$f(2) = 10e^{-1} \approx 3{,}678\,794$

$f(2)$ étant exprimé en milliers d'objets, pour un prix unitaire de 200 euros, la demande est de 3 678 objets à l'unité près.

4. $\frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx = \frac{1}{2}(F(4) - F(2))$

$$= \frac{1}{2}(-28e^{-2} + 24e^{-1})$$

$\frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx \approx 5{,}039\,71$ milliers d'objets.

La valeur moyenne de la demande est 5 040 objets à 10 produits près.

Exercices apprendre à démontrer p. 252

Pour s'entraîner

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ Selon le signe de h, on encadre l'aire sous la courbe entre x_0 et $x_0 + h$ par des aires de rectangles, en utilisant la décroissance de f.

Ainsi, si $h > 0$:

$$hf(x_0 + h) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leqslant hf(x_0).$$

Par continuité et en appliquant le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

On obtient de la même manière

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Par définition, F est dérivable en x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

Exercices calculs et automatismes p. 253

21. Calcul d'intégrale (1)

b) et c) : inverser les termes pour reconnaître la relation de Chasles

22. Calcul d'intégrale (2)

a) Vrai : $-\ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

b) Faux : la fonction intégrée est négative sur [–2 ; 2].

23. Calcul d'intégrale (3)

Vrai : la fonction intégrée est impaire et la courbe est symétrique par rapport à O.

$$\int_0^2 \frac{x}{x^4 + 1} dx = -\int_{-2}^0 \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

24. Propriété de l'intégrale

Faux : $3\int_0^\pi 1dx = 3\pi$

25. Inégalité

Faux : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

Donc $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \cos^6(x) \leqslant 1$ et

$$0 \leqslant \int_0^\pi \cos^6(x)dx \leqslant \pi.$$

26. Intégration par parties

a) : appliquer la propriété avec $u'(x) = e^x$.

c) : les bornes de l'intégrale ne sont pas dans l'ordre usuel.

27. Calcul d'intégrale (4)

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, le choix d) doit être $\int_{-4}^{1} (\boldsymbol{x} + \mathbf{1})dx$.

d) : $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -4{,}5$ et c'est l'opposé de l'aire d'un demi carré de côté 3.

28. Calcul d'intégrale (5)

d) : estimer l'intégrale en calculant des aires.

29. Aire sous la courbe

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, le choix d) est :

$$2 \times \int_{-4}^{-3} (0{,}5x^2 + 0{,}5x - 3)dx - \int_{-3}^{2} (0{,}5x^2 + 0{,}5x - 3)dx.$$

d) : on élimine la réponse c) en estimant l'aire sans calculer l'intégrale.

30. Estimer une intégrale

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, les expressions doivent être :

a) $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dx < \int_{-1}^{1} g(x)dx.$

b) $\int_{1}^{2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dx < \int_{1}^{2} g(x)dx.$

a) Vrai.

b) Vrai : on détermine graphiquement la position relative des deux courbes.

31. Aire entre deux courbes

b) : la courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur [–4 ; 0].

Les réponses c) et d) sont éliminées en estimant l'aire entre les deux courbes.

Exercices d'application p. 254

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

32. 1. $\mathscr{A}_f = 6$

2. $\mathscr{A}_g = 12$

33. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on considère le point B sur la droite d'équation $y = -2x$ et d'abscisse **−2**.

$\mathscr{A}_{\text{OAB}} = 5$

34. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on calcule $\int_1^3 (-x+4)\mathrm{d}x$.

$\int_1^3 (-x+4)\mathrm{d}x = 4$

35. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on calcule $\int_{-0,5}^{2} (x+2)\mathrm{d}x$.

$\int_{-0,5}^{2} (x+2)\mathrm{d}x = 4,875$

36. a) $\int_0^1 x\mathrm{d}x = 0,5$

b) $\int_1^3 (2t+1)\mathrm{d}t = 10$

c) $\int_2^4 (-y+3)\mathrm{d}y = 0$

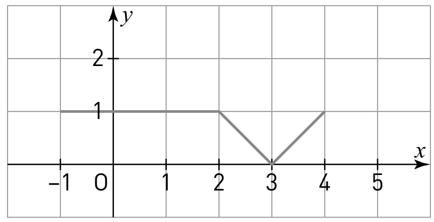
37. a) 4,5

b) 6

c) 4,5

38. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur dans la définition de la fonction, corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire $t - 3$ si $t \in]3\,;4]$.

1.



2. La fonction est continue sur l'intervalle et $f(t) \geqslant 0$ sur l'intervalle.

3. $\int_{-1}^{4} f(t)\mathrm{d}t = 4$

39. a) 8 **b)** 12

Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

40. 1. 0,2

2. Aire colorée = 0,2

Aire hachurée = $0,2 \times \dfrac{1}{1,2} = \dfrac{1}{6}$

3. Aire des 5 rectangles hachurés :

$0,2\left(\dfrac{1}{1,2}+\dfrac{1}{1,4}+\dfrac{1}{1,6}+\dfrac{1}{1,8}+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1627}{2\,520}.$

Aire des 5 rectangles colorés :

$0,2\left(1+\dfrac{1}{1,2}+\dfrac{1}{1,4}+\dfrac{1}{1,6}+\dfrac{1}{1,8}\right) = \dfrac{1879}{2\,520}.$

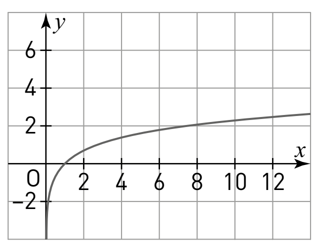
La fonction inverse est décroissante donc

$\dfrac{1627}{2\,520} \leqslant \int_0^1 \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1879}{2\,520}.$

41. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \leqslant \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}$

Donc $4 \leqslant \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6.$

42. 1.



2. $3{,}08 \leqslant \int_5^{10} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant 3{,}88$

Pour réaliser cet encadrement, on peut notamment utiliser un algorithme Python.

```
import numpy as np
def ln(x) :
   return np.log(x)
def U(n) :
   S=0
   for k in range(5,n+1) :
      S=S+ln(k*5/n)
   return S*5/n
def V(n) :
   S=0
   for k in range(5,n) :
      S=S+ln(k*5/n)
   return S*5/n
print("U",U(10),"V",V(10))
```

Calculer des intégrales à l'aide d'une primitive

43. 1. $F'(x) = 3x^2 - 6x - 4 = f(x)$ donc F est une primitive de f.

2. $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \left[x^3 - 3x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = -12$

44. a) $\frac{7}{3}$ **b)** 20 **c)** ln(5)

45. a) 4 **b)** $-\frac{99}{2}$

c) 1 **d)** $\frac{85}{2}$

46. a) $1 - \ln(4)$

b) $\frac{e^2 - 1}{2e}$

c) $\frac{2}{3}$

47. a) $\int_0^1 2te^{t^2}\mathrm{d}t = (e - 1)$

b) $\int_0^{\ln(2)} 3t^2e^{t^3}\mathrm{d}t = e^{\ln(2)^3} - 1$

c) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire : $\int_1^{e} \frac{2}{2t^3}\mathrm{d}t$.

$\int_1^{e} \frac{2}{2t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$

d) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire : $\int_1^{e} (t^2 - 1)\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\mathrm{d}t$.

$\int_1^{e} (t^2 - 1)\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{e^3 - 3e}{2}\right)$

e) $\int_{-1}^{2} (1 - 2t)e^{-t^2+t+1}\mathrm{d}t = 0$

48. a) $\frac{e^2(e - 1)}{2}$

b) 0

c) $-\frac{9}{4}$

d) $3 - \sqrt{6}$

49. a) $\frac{1}{2}(\ln(1 + e^2) - \ln(2))$

b) 3ln(11)

c) $\frac{1}{4}\ln(8)$

d) $\ln\left(\frac{e^3 + 2}{3}\right)$

50. La fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$ est une primitive de f.

$\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6}$

51. a) $\int_{-1}^{2} 4t(2t^2 + 3)^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}(2x + 3)^3\right]_{-1}^{2} = 402$

b) $\int_{-7}^{-2} \frac{t}{(t^2 - 1)^5}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{8}\frac{1}{(x^2 - 1)^4}\right]_{-1}^{2} = -\frac{65\,535}{42\,467\,328}$.

52. 1. On a $f'(x) = (2x + 2)e^x$.

2. Ainsi, $I = \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{e}$.

3. La fonction $x \mapsto (2x + 2)e^x$ est continue et positive sur $[-1 ; 0]$.

Calculer une intégrale avec une intégration par parties

53. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire : « en posant $\boldsymbol{u(x)} = e^x$ et $v'(x) = x$. »

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

54. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire : « Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x^2}{x} dx$ en posant $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $u(x) = \ln x$. »

On a $\int_1^2 \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \ln(2)^2$.

55. a) $\int_0^{10} (2t + 1)e^{-t} dt = 3 - 23e^{-10}$

b) $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} (4 - 3t)e^{3t+1} dt = 39e - 42$

56. a) -6π

b) $\pi + 2$

57. a) On effectue deux intégrations par parties successives pour trouver $\frac{(\pi - 1)^2 + 1}{3}$.

b) $\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

58. a) $\frac{(\pi - 1)^2 + 1}{3}$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes. Il faut lire $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \boldsymbol{t + \frac{\pi}{2}\cos}\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t + \frac{\pi}{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt = 1{,}196$$

59. 1. $\int_1^5 \ln(x) dx = \left[x\ln(x) - x\right]_1^5 = 5\ln(5) - 4$.

2. La fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On obtient en effectuant une intégration par parties et en utilisant la question précédente $5\ln(5)^2 - 10\ln(5) + 8$.

Utiliser la linéarité de l'intégrale

60. $I + J = \int_0^{\pi} x(\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx = \frac{\pi^2}{2}$

61. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire $\int_a^b \boldsymbol{tf(t)} dt = 2e$.

a) $9 + 4e$

b) $30 + 9e$

c) $29 + 10e$

d) $4e + \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

62. 1. Si $t \in [0 ; 1]$, $t^3 \leqslant t^2$; on passe ensuite à l'intégrale.

2. Sur $[2 ; 3]$, $t^2 \leqslant t^3$.

63. Il suffit de constater que pour $t \in [0 ; 2]$, $2t(t - 2) \leqslant 0$ et sur $[2 ; 3]$, $0 \leqslant t^3$. L'intégrale négative est ainsi plus petite que l'intégrale positive.

64. 1. $\int_a^d f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}$

2. $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = 5\left(\sqrt{2} - 1\right)$

3. $\int_b^c f(t)\mathrm{d}t = -1$

4. $\int_b^c f(t)\mathrm{d}t = -1$

65. a) $' = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{\mathrm{e}} + 1$

b) $J = 0$

Encadrer une intégrale

66. a) La fonction est négative sur [−2 ; −1] donc

$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant 0.$

b) La fonction est positive sur [−3 ; −1] donc

$\int_{-3}^{-1} (2x^2 + 1)\mathrm{d}x \geqslant 0.$

c) La fonction est positive sur [0 ; 11] donc

$\int_0^1 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \geqslant 0.$

d) La fonction est négative sur [0,5 ; 1] donc

$\int_{0,5}^1 \ln(x)\mathrm{d}x \leqslant 0.$

67. a) $f(t) = \cos(t)$

b) $f(t) = -(t + 1)(t - 2)$

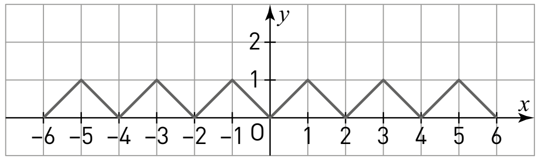
c) $f(t) = 3|t|$

Utiliser la relation de Chasles

68. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes, il faut lire $t - 3$ si $t \in\,]3 ; 4]$.

$\int_{-1}^4 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 (-t + 3)\mathrm{d}t + \int_3^4 (t + 3)\mathrm{d}t = 4$

69. 1. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, l'ensemble de définition est [−6 ; 6].



2. 0,5

3. $\int_{-1}^1 g(t)\mathrm{d}t = 1$

$\int_{-6}^6 g(t)\mathrm{d}t = 6$

70. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire $\frac{-x + 3}{2}$ si $2 \leqslant x \leqslant 3$.

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \ln 2 + \frac{11}{12}$

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

71. a) $\frac{13}{3}$

La fonction f est positive sur [−2 ; 2] donc la valeur moyenne est la largeur d'un rectangle de longueur 4 et d'aire $\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x$.

b) $\frac{1}{4 - \mathrm{e}}\left(-\frac{1}{26} + \frac{1}{2\mathrm{e}^2 - 6}\right)$

La fonction g est positive sur [e ; 4] donc la valeur moyenne est la largeur d'un rectangle de longueur 4 − e et d'aire $\int_{\mathrm{e}}^4 g(x)\mathrm{d}x$.

72. 2ln2

73. La fonction étant paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc

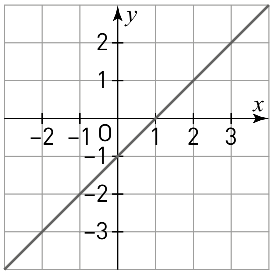
$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)\mathrm{d}t = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\mathrm{d}t.$

Or $\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$

74. Soit $k \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = kx$ alors la valeur moyenne de la fonction sur $[a\,;\,b]$ est $\dfrac{k(a+b)}{2}$.

Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

75. 1.



2. a) −4,5

b) 2

3. $f \leqslant 0$ sur $[-2\,;\,1]$ et $f \geqslant 0$ sur $[1\,;\,3]$.

4. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5$

5. $\mathscr{A}' = \displaystyle\int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5 + 2 = 6{,}5$ u.a.

76. 1. h est négative sur $[-3\,;\,-2] \cup [1\,;\,4]$ et positive sinon.

2. $\dfrac{81}{8}$ u.a.

3. $-\dfrac{81}{8} + \dfrac{81}{8} = 0$ u.a.

77. 1. f est positive sur $[-5\,;\,-3] \cup [5\,;\,6]$, négative sinon.

2. $\dfrac{167}{6}$ u.a.

3. $-\dfrac{187}{12}$

4. L'aire sous la courbe d'une fonction de signe non constant n'est pas égale à l'intégrale de la fonction.

78. a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x+3)^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}(x+3)^3\right]_{-2}^{-1} = \frac{7}{3}.$

b) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (x^3 + 2x^2 - 3x + 3)\mathrm{d}x = \frac{343}{12}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{9} \left(-\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x = \frac{81}{4}$

d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \left(-x - \frac{2}{x} + 3\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 2\ln(2)$

Calculer une aire entre deux courbes

79. 1. $f(x) > g(x)$ si $x \in \left]2\,;\,+\infty\right[$

2. $\displaystyle\int_{-4}^{2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = 18$ u.a.

3. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-4}^{2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x + \int_{2}^{7} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = 30{,}5$ u.a.

80. 1. Les abscisses sont 2 et −2.

2. L'inégalité est vraie sur $[-2\,;\,2]$.

3. $\dfrac{16}{3}$ u.a.

81. Pour $x \in [0\,;\,1]$, on a : $1 - x^2 > x^2 - 1$.

Ainsi, l'aire voulue est donnée par :

$$\int_{-1}^{1} (-2x^2 + 1)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

82. 1. $f - g \leqslant 0$ sur $[2\,;\,4]$.

2. $\displaystyle\int_{2}^{4} (-2x^2 + 10x - 9 - (x^2 - 8x + 15))\mathrm{d}x = 4$

Exercices d'entraînement p. 258

Calcul intégral à l'aide d'une primitive

83. On reconnaît des fonctions usuelles dont on connaît des primitives :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4t(2t^2 + 3)^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}(2x^2 + 3)^3\right]_{-1}^{2} = 402$

b) $\displaystyle\int_{-7}^{2} \frac{t}{(t^2 - 1)^5}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{8(t^2 - 1)^4}\right]_{-7}^{2} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3^4} - \frac{1}{48^4}\right)$

84. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x = \left[\sin^3(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\sin(x)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}\right)$

85. a) $\int_0^1 \mathrm{e}^t(\mathrm{e}^t - 1)^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}(\mathrm{e}^t - 1)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}(\mathrm{e} - 1)$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes, il faut lire : $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} + 2}{\mathrm{e}^{-t} - 2t}\mathrm{d}t$.

$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t} + 2}{\mathrm{e}^{-t} - 2t}\mathrm{d}t = \left[t - \ln(1 - 2\mathrm{e}^t t)\right]_0^1$ impossible à calculer sur l'intervalle car pour $t = 1$, l'expression $1 - 2\mathrm{e}^t t$ est négative, hors de l'intervalle de définition de ln.

86. 1. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in [-1 ; 0]$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + f(x)$.

2. La question précédente nous donne une primitive de la fonction que l'on veut intégrer :

$$\int_{-1}^0 (2x + 2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_{-1}^0 = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

3. La fonction considérée est positive sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ et continue. Son intégrale correspond donc à l'aire sous la courbe.

87. 1. $u_0 = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$; $u_1 = \int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5}$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n + 1}$$

3. On a $u_4 = \frac{1}{9}$.

88. 1. Pour tout réel x, on a :

$$1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{-x} + 1 - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} = f(x)$$

2. $\int_0^{\ln(2)} f(t)\mathrm{d}t = \left[x + \ln(\mathrm{e}^{-x} + 1)\right]_0^{\ln(2)} = \ln(3)$

89. 1. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$.

Pour $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4}\frac{\frac{4}{(2 - x)^2}}{\frac{2 + x}{2 - x}} = \frac{1}{4 - x^2}$$

2. La question précédente nous fournit une primitive de la fonction à intégrer.

$\int_0^1 \frac{1}{4 - t^2}\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = \frac{\ln(3)}{4}$

90. 1. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction $t \mapsto 4t + 2$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable de dérivée $t \mapsto 4t + 2$.

2.On a, pour tout réel x :

$$\int_1^x (4t + 2)\mathrm{d}t = \left[2t^2 + 2t\right]_1^x = 2x^2 + 2x - 4$$

3. $2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$

L'équation admet exactement deux solutions.

Intégration par parties

91. Les fonctions concernées dans cet exercice sont produits de fonctions infiniment dérivables, le calcul d'intégration par parties est donc possible.

a) $\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \left[2x\mathrm{e}^x\right]_0^1 + \int_0^1 2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 2$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\cos(t)\mathrm{d}t = \left[x^2\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[2x\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(t)\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} + 1\right)$$

92. On peut mener cette exercice par primitivation par parties ou alors en intégrant par parties avec une variable en borne.

$$\int_0^x t^2e^t dt = \left[t^2e^t\right]_0^x - \int_0^x 2te^t dt = \left[t^2e^t\right]_0^x - \left[2te^t\right]_0^x + 2\int_0^x e^t dt$$

$$= e^x(x^2 + x + 2) + 2.$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^x(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive qui convient.

93. On pose $I = \int_0^\pi e^t \sin(t)dt$ et $J = \int_0^\pi e^t \cos(t)dt$.

1. On intègre un produit de fonctions infiniment dérivables, on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$I = \int_0^\pi e^t \sin(t)dt = \left[e^x \sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos(t)dt = -J.$$

De plus : $\int_0^\pi e^t \cos(t)dt = \left[e^x \cos(x)\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^t \sin(t)dt$

$$= -e^\pi - 1 + I.$$

2. Ainsi, I et J sont solutions du système :

$$\begin{cases} I + J = 0 \\ J - I + 1 + e^\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = -\dfrac{1+e^\pi}{2} \\ J = \dfrac{1+e^\pi}{2} \end{cases}$$

94. 1. On a :

$((ax^2 + bx + c)e^x)' = e^x(ax^2 + (2a + b)x + c + b)$

2. On déduit de la question précédente qu'une primitive de f peut être donnée par $x \mapsto e^x(x^2 - x + 2)$.

3. On écrit par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x (t^2 + t + 1)e^t dt = \int_0^x t^2e^t dt + \int_0^x te^t dt + \int_0^x e^t dt$$

On retrouve ensuite le résultat.

95. On pose $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{e^t + 1}$ et $g(t) = \dfrac{1}{(e^t + 1)^2}$.

1. On a pour tout réel t :

$$1 - \frac{e^t}{e^t + 1} - \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} = \frac{(e^t + 1)^2 - e^t(e^t + 1) - e^t}{(e^t + 1)^2} = g(t).$$

2. a) On a $\int_0^1 \dfrac{e^t}{e^t + 1}dt = \left[\ln(e^x + 1)\right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$

et $\int_0^1 \dfrac{e^t}{(e^t + 1)^2}dt = \left[-\dfrac{1}{e^x + 1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e + 1}.$

b) Ainsi, d'après les questions précédentes et par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{e + 1} + \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right)$$

3. a) La fonction f est infiniment dérivable comme quotient bien défini et dérivable. On peut utiliser une intégration par parties en dérivant le terme inverse et en primitivant l'exponentielle décroissante :

$$\int_0^1 f(t)dt = \left[\frac{-e^{-x}}{e^x + 1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-t}e^t}{(e^t + 1)^2}dt$$

$$= -\frac{1}{e^2 + e} + \frac{1}{2} - \int_0^1 g(t)dt$$

b) Finalement, $\int_0^1 f(t)dt = -e^{-1} + \ln\left(\dfrac{e + 1}{2}\right).$

c) La fonction f est positive sur son ensemble de définition. Ainsi, l'aire, en unités d'aire, sous la courbe représentative de f sur [0 ; 1] est égale à

$$-e^{-1} + \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right).$$

96. On pose $f(t) = t^3e^{-\frac{t^2}{2\pi}}$ pour $t \geqslant 0$.

1. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = \mathbf{2\pi^2}$

La fonction f est un produit de fonctions infiniment dérivables. On peut effectuer une intégration par parties en primitivant la partie composée par exponentielle et en dérivant la fonction carrée restante : soit $x > 0$,

$$\int_0^x t^2 \times te^{-\frac{t^2}{2\pi}}dt = \left[-\pi t^2e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\right]_0^x + \int_0^x 2\pi te^{-\frac{t^2}{2\pi}}dt$$

$$= \left[-\pi t^2e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\right]_0^x - \left[2\pi^2e^{-\frac{t^2}{2\pi}}\right]_0^x = -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}}(x^2 + 1) + 2\pi^2.$$

Une utilisation correcte du théorème des croissances comparées nous donne :

$$\lim_{x\to+\infty} -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}}(x^2+1)=0\,;$$

et finalement, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 2\pi^2.$$

2. L'intégrale dite impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie et correspond, la fonction étant positive, à l'aire sous la courbe de la fonction sur $[0\,;+\infty[$.

Étudier une fonction définie par une intégrale

97. La fonction $t\mapsto 2e^{-3t}$ est continue et positive. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F est son unique primitive qui s'annule en 0.

On a $F'(x)=2^{e^{-3x}}$.

98. 1. La fonction $t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F est son unique primitive qui s'annule en 0. On a $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. F est dérivable sur $[2\,;+\infty[$ d'après le théorème d'existence d'une primitive. Pour déterminer le sens de variations d'une fonction dérivable, on étudie sa dérivée.

On a $F'(x)=\dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$, pour $x\geqslant 2$. Sur cet intervalle cette dérivée est positive, la fonction F est donc croissante sur $[2\,;+\infty[$.

99. 1. F est définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

2. On a $F'(x)=2x\times\dfrac{1}{\ln(x^2)}-\dfrac{1}{\ln(x)}=\dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

Calculer l'aire d'une surface

100. 1. Le signe de $f(x)$ s'obtient en étudiant le signe d'un produit. Pour tout réel x, $e^{1-x^2}>0$ et pour tout $x\in[-2\,;0]$, $-2x>0$.

Ainsi $f(x)>0$ sur $[-2\,;0]$.

2. La fonction f est continue comme produit et composée de fonctions polynomiales et exponentielles. Ainsi, f est continue et positive, l'aire sous sa courbe représentative est donc l'intégrale suivante :

$$\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\left[e^{1-t^2}\right]_{-2}^{0}=e-e^{-3}$$

101. 1. La fonction f est dérivable sur $[e^{-1}\,;1]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$f'(x)=-(\ln(x)+1).$$

Or $\ln(x)+1>0 \Leftrightarrow x>e^{-1}$. La fonction f est donc décroissante sur $[e^{-1}\,;1]$, avec $f(1)=0$ et $f(e^{-1})=e^{-1}$. Remarquons que ceci nous donne ainsi la positivité de la fonction f.

2. La fonction g est dérivable sur $[e^{-1}\,;1]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$g'(x)=4x\ln(x)+2x.$$

On en déduit qu'une primitive de f est donnée par la fonction :

$$x\mapsto -\frac{1}{4}(g(x)+x^2).$$

3. D'après la première question, la fonction f est donc continue et positive sur l'intervalle $[e^{-1}\,;1]$. Ainsi :

$$\int_{e^{-1}}^{1} f(t)\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{4}(g(x)+x^2)\right]_{e^{-1}}^{1}=-\frac{1}{2}e^{-2}.$$

102. 1. Les fonctions $x\mapsto e^{x-2}$ et $x\mapsto e^{2-x}$ sont respectivement continues sur $]-\infty\,;2]$ et $]2\,;+\infty[$ comme composées de fonctions continues. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

Ensuite, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} e^{2-x}=1\,;$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} e^{x-2}=1\,;$$

$f(2)=1$.

La fonction est donc continue pour $x=2$.

2. $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 e^{x-2}\mathrm{d}x+\int_0^2 e^{2-x}\mathrm{d}x=e^2-e^{-2}$

103. a) Déterminons les points d'intersection de ces courbes. On résout :

$x^2 + 3x - 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0.$

Ainsi il s'agit de regarder l'intégrale :

$$\int_{-2}^{1}(2t+1-(t^2+3t-1))\mathrm{d}t = -\int_{-2}^{1}(t^2+t-2)\mathrm{d}t$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-2}^{1} = \frac{35}{6}.$$

b) [ERRATUM] La première édition contient une erreur sur la figure corrigée dans les éditions suivantes.

On recherche :

$$\int_{1,5}^{3}(-10\mathrm{e}^{-t}+t^2)\mathrm{d}t = \left[10\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{3}x^3\right]_{1,5}^{3}$$

$$= 10(\mathrm{e}^{-3}-\mathrm{e}^{-1,5})+\frac{63}{8}.$$

104. 1. On procède par intégration par parties avec une fonction logarithme qui est dérivable et de dérivée continue sur [1 ; e] :

$$J = \left[x(\ln(x))^2\right]_1^{\mathrm{e}} - 2\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 2I.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$\ln(x) > (\ln(x))^2 \Leftrightarrow 0 > (\ln(x))^2 - \ln(x)$

$\Leftrightarrow 0 > \ln(x)(\ln(x) - 1) \Leftrightarrow x \in [1 ; \mathrm{e}].$

3. $A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(\ln(t) - (\ln(t))^2)\mathrm{d}t$

$= I - \mathrm{e} + 2I = 3I - \mathrm{e}$

Or $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)\mathrm{d}t = 1$ d'où $A = 3 - \mathrm{e}$.

105. 1. Déterminons les points d'intersection de ces courbes. On résout :

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$$

$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$.

On a $A(-2 ; 0)$ et $B(3 ; 0)$.

2. La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de celle de g sur l'union $]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$.

3. $$-\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3+\frac{1}{2}(x-3)(x+2)\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-2}^{3} = \frac{125}{6}$$

106. 1. a) On calcule $N(2) = 0$.

b) On développe puis on identifie :

$(x - 2)(bx^2 + cx + d) = bx^3 + (c - 2b)x^2 + (d - 2c)x - 2d.$

On a $b = 1$; $c = 4$ et $d = 8$.

c) On a $f(x) - g(x) = \dfrac{N(x)}{2(x+2)} = \dfrac{(x-2)(x^2+4x+8)}{2(x+2)}$.

Or pour tout réel, $x^2 + 4x + 8 > 0$. Ainsi, pour $x \in [0; 2]$, $f(x) - g(x) \leqslant 0$ et pour $x > 2$, $f(x) - g(x) > 0$.

2. Si $a < 2$, $A(D) = \displaystyle\int_0^a(g(t)-f(t))\mathrm{d}t = -\frac{a^3}{6}+8\ln\left(\frac{a+2}{2}\right)$.

3. Si $a \geqslant 2$, $A(D) = \displaystyle\int_0^2(g(t)-f(t))\mathrm{d}t + \int_2^a(f(t)-g(t))\mathrm{d}t$

$$= \frac{a^3}{6}-\frac{8}{3}+8\ln\left(\frac{8}{a+2}\right).$$

107. 1. a) $a = 2{,}1$

b) On peut donner le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	$-$		$+$

2. a) h est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$. On a : $h'(x) = \ln(x) + 2$.

On a $f(x) - g(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{x\ln(x)+x-1}{x} = \dfrac{h(x)}{x}$.

La fonction h et son signe permettent d'étudier les positions des deux courbes.

b) On a : $\ln(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-2}$. h est décroissante sur $]0 ; \mathrm{e}^{-2}[$ et croissante sur $]\mathrm{e}^{-2} ; +\infty[$. Les variations de h nous permettent d'avoir $x = 1$ comme unique solution de $h(x) = 0$.

c) La courbe représentative de f est au-dessus de celle de g sur $[1 ; +\infty[$.

3. L'aire est donnée par :

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\left(\frac{1}{t}-1-\ln(t)\right)\mathrm{d}t = \left[(1-x)\ln(x)\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}.$$

4. a) $\int_1^a \left(-\frac{1}{t}+1+\ln(t)\right)dt=(a-1)\ln(a)$

b) La fonction k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

On a $k'(x)=\ln(x)+1-\frac{1}{x}=f(x)-g(x)$. La fonction k est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c) La continuité de k, avec $k(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=+\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires, nous donne une unique solution $a \in [1 ; +\infty[$ à l'équation $\frac{e-1}{e}=k(x)$.

La calculatrice nous donne l'encadrement suivant : $1{,}94 < a < 1{,}95$.

Utiliser les propriétés de l'intégrale

108. 1. Pour $x \in [0 ; 1]$, $1 + x^2 > 0$. La fonction f est donc continue comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $[0 ; 1]$. f est positive comme inverse d'une quantité positive.

Enfin, en utilisant une composée de fonctions ou une étude de dérivée, on démontre que la fonction f est décroissante sur $[0 ; 1]$. L'aire sous la courbe représentative de f sur $[0 ; 1]$ correspond donc à l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle.

2. a) On a $f(0) = 1$ et $f(1)=\frac{1}{2}$.

Par décroissance de f sur $[0 ; 1]$:

$$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0).$$

b) On obtient par inégalité d'intégrale :

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant 1.$$

3. On a $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}$ d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$

et $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi : $\frac{13}{20} \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{9}{10}$

4. On partage l'intervalle considéré en cinq intervalles de la forme $\left[\frac{k}{5} ; \frac{k+1}{5}\right]$. On encadre alors la fonction puis son intégrale sur chacun de ces intervalles pour obtenir :

$$0{,}7337 \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant 0{,}8337.$$

109. 1. On a : $u_0 = 0$;

$u_1=\int_0^1 f(t)dt = 1$;

$u_2=\int_0^2 f(t)dt = 4$;

$u_3=u_2+\int_2^3 f(t)dt = 8.$

2. Pour tout $n > 2$, on a $u_n = 4(n-1)$.

110. 1. Il s'agit de regarder la continuité de la fonction en $x = 2$. En effet, les deux expressions données sont continues sur leurs ensembles de définition par composées, et opérations usuelles sur les fonctions continues.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{4}{\sqrt{x+1}}=2\sqrt{2}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} 2x\sqrt{x^2+1}=2\sqrt{2}=f(2)$.

La fonction f est donc continue sur $[0 ; 3]$.

2. D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^3 f(t)dt=\left[8\sqrt{x+1}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$

$$=8\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{2}{3}\left(10^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right).$$

111. 1. On peut traiter l'encadrement en prenant chaque inégalité à part. Pour la première, on peut déterminer la tangente de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui est convexe, au point d'abscisse 0 : $y = 1 - x$.

Pour la deuxième, il s'agit de constater que

$\frac{x^3}{1+x} > 0$ pour $x > 0$.

2. On primitive l'inégalité :

$$\int_0^x (1-t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(1+x) \leqslant \int_0^x (1-t+t^2)\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

112. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire :

$$f(x) = \begin{cases} -\boldsymbol{x}\mathbf{e}^{x^2} \text{ si } x \leqslant \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}\mathbf{e}^{x^2} \text{ si } x > \mathbf{0} \end{cases}$$

1. Les fonctions $x \mapsto xe^{x^2}$ et $x \mapsto -xe^{x^2}$ sont respectivement continues sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et $]0\ ;\ +\infty[$ comme produit composé de fonctions continues. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$. Ensuite, on a :

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} xe^{x^2} = 0$;

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} -xe^{x^2} = 0$;

$f(0) = 0$.

La fonction est donc continue pour $x = 0$.

2. [ERRATUM] Les bornes de l'intégrale sont –2 et 2.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x = e^4 - 1$$

113. 1. On calcule :

$$I - 3J = \int_0^{\ln(8)} \frac{e^t}{e^t+4}\mathrm{d}t = \left[\ln(e^x+4)\right]_0^{\ln(8)} = \ln\left(\frac{12}{5}\right).$$

De plus $I + J = \ln(8)$.

2. On résout le système :

$$\begin{cases} I - 3J = \ln\left(\frac{12}{5}\right) \\ I + J = \ln(8) \end{cases}$$

On obtient $I = \ln(8) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{3}\right)$ et $J = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{10}{3}\right)$.

114. 1. Par définition de la valeur absolue :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 \text{ si } x \geqslant 2 \\ 4 - 2x \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

2. a) On a :

$$\int_{-1}^{2} (4-2x)\mathrm{d}x = 9\ ;\ \int_2^3 (2x-4)\mathrm{d}x = 1.$$

b) Finalement $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 10$.

115. 1. Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} x^2\mathrm{d}x = n^2 + n + \frac{1}{3}.$$

2. On a $n^2 + n + \frac{1}{3} > 0$ pour tout entier naturel.

La suite (I_n) est donc croissante.

115.1. Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} x^2\mathrm{d}x = n^2 + n + \frac{1}{3}.$$

2. On a $n^2 + n + \frac{1}{3} > 0$ pour tout entier naturel.

La suite (I_n) est donc croissante.

116. 1. La fonction f est dérivable sur $[e\ ;\ e^2]$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas. On a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}$.

f est donc décroissante sur $[e\ ;\ e^2]$.

2. On a $f(e^2) \leqslant f(t) \leqslant f(e)$ pour tout $t \in [e\ ;\ e^2]$.

3. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire $\frac{2(e-1)}{e^3}$.

Finalement, on obtient l'encadrement :

$$(e^2 - e)f(e^2) \leqslant \int_e^{e^2} f(t)\mathrm{d}t \leqslant (e^2 - e)f(e)$$

D'où :

$$\frac{2(e-1)}{e^3} \leqslant \int_e^{e^2} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{e-1}{e}.$$

117. 1. Pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$,

$$f(t) - t = \frac{-t^3}{1+t^2} \leqslant 0.$$

2. L'inégalité précédente nous donne, par passage à l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

118. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables. On a alors $f'(t) = -2te^{-t^2} < 0$ sur $[0\ ;\ 1]$. La fonction est donc décroissante sur cet intervalle.

On dresse alors l'encadrement suivant :

$$f(1) \leqslant f(t) \leqslant f(0).$$

Qui donne par passage à l'intégrale :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 1.$$

Étudier une suite d'intégrales

119. Les fonctions monôme et exponentielle sont toutes deux infiniment dérivables donc on peut appliquer le calcul d'intégration par parties :

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{e}} + (n+1)I_n.$$

120. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^2 ((2-t)^{n+1} - (2-t)^n)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \int_1^2 (2-t)^n\mathrm{e}^t(1-t)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [1\ ;\ 2]$, $1 - t < 0$ et $(2-t)^n\,\mathrm{e}^t > 0$. Ainsi, en tant qu'intégrale d'une fonction continue et négative, $u_{n+1} - u_n$ est négative. La suite (u_n) est décroissante.

121. 1. Pour tout entier naturel n, $f_n(0) = 1$.

2. a) Sur $[0\ ;\ 1]$, la fonction est positive et continue pour tout entier. L'intégrale I_n correspond donc à l'aire sous la courbe de f_n sur $[0\ ;\ 1]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 -x(1-x)^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

La suite (I_n) est ainsi décroissante.

c) La suite converge comme suite décroissante et minorée par 0.

122. 1. a) Pour tout entier naturel n et $t \in [0\ ;\ 1]$, $(1-t)^n\mathrm{e}^t \geqslant 0$.

Comme intégrale d'une fonction continue et positive, u_n est positif pour tout entier n.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\int_1^2 t(1-t)^n\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

La suite (u_n) converge car elle est décroissante et minorée par 0.

2. a) Par croissance de la fonction exponentielle :

$$t \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n et $t \in [0\ ;\ 1]$:

$$(1-t)^n\mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}(1-t)^n.$$

Ainsi : $u_n \leqslant \mathrm{e}\int_0^1 (1-t)^n\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.

b) Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Interpréter une intégrale

123. 1. Les fonctions polynomiale et exponentielle sont infiniment dérivables, on peut utiliser une intégration par parties.

Pour tout réel positif x :

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \left[-4t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + 4\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= -4\mathrm{e}^{-x}(x+1) + 4.$$

On pose alors $F(x) = -4\mathrm{e}^{-x}(x+1)$.

F est une primitive de f.

2. On obtient alors : $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = F(1) - F(0) = 4 - \frac{8}{\mathrm{e}}$.

124. Il s'agit de calculer la valeur moyenne de la fonction :

$$\frac{1}{70}\int_0^{70} f(t)\mathrm{d}t = \frac{45}{70}\int_0^{70} \mathrm{e}^{0{,}01t}\mathrm{d}t = \frac{450}{7}(\mathrm{e}^{0{,}7} - 1).$$

Le débit moyen est donc environ de $65{,}17 \times 10^6$ m³.

125. 1. Si $x = 0$, alors $y = 4$, d'où $c = 4$.

Si $x = 3$, alors $y = 0$, d'où $a = -\frac{4}{9}$.

2. On a $\int_{-3}^{3}\left(-\frac{4}{9}t^2 + 4\right)dt = 16$.

3. L'aire de la façade est égale à trois fois l'aire de l'ouverture.

126. A. Étude du prix proposé par le fournisseur

1. Par limite d'une fonction fractionnelle :

$\lim_{x\to+\infty} P(x) = 1$.

2. La fonction P est dérivable sur $[100 ; +\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

$P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}$.

3. Pour $x \in [100 ; +\infty[$, $P(x) < 0$ donc P est décroissante avec $P(100) = 2$.

B. Étude de la somme à dépenser par le supermarché

1. Par produit de limites : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.

2. La fonction S est dérivable sur $[100 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$S'(x) = P(x) + xP'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x+100)^2}$

3. $S(x) = \frac{(x+100)(x+200) - 20\,000}{x+100}$

$= x + 200 - \frac{20\,000}{x+100}$

4. Pour tout $x \in [100 ; +\infty[$, on pose

$T(x) = \frac{x^2}{2} + 200x - 20\,000\ln(x+100)$.

C. Étude de différentes situations

1. On résout l'inéquation :

$S(x) \leqslant 900 \Leftrightarrow x^2 - 60x - 90\,000 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \left(x - 300 - 300\sqrt{2}\right)\left(x - 300 + 300\sqrt{2}\right) \leqslant 0$

On peut ainsi considérer que l'on peut acheter jusqu'à 724 kg de fruits.

2. On calcule la valeur moyenne de la fonction S :

$\frac{1}{200}\int_{400}^{600} S(x)dx = \frac{1}{200}(T(600) - T(400)) = 700 + 100\ln\left(\frac{5}{7}\right)$.

La somme moyenne est donc environ de 666 euros.

127. Travail de l'élève.

128. Travail de l'élève.

Exercices bilan p. 262

129. Aire et intégrale

1. a) $f'(x) = 2ax + b + d(1 - x)e^{-x}$

b) On a $f(0) = 0$ d'où $c = 0$.

Les données $f(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$; $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$ nous donnent ensuite $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$ et $d = 1$.

2. a) On a $\int_{-1}^{1{,}59} xe^{-x}dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{1}^{1{,}59} = \frac{2}{e} - 2{,}59e^{-1{,}59}$.

b) $A = 0{,}3 \times 2{,}59 - \int_{-1}^{1{,}59} f(x)dx \approx 1{,}23$

130. Suite et intégrale

1. a) Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue et positive sur $[0 ; 1]$. Les valeurs u_1, u_2, u_3 sont respectivement les aires sous la courbe de f_1, f_2, f_3 entre 0 et 1.

b) L'aire sous la courbe semble de plus en plus en grande. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\left(e^{-\frac{t}{n+1}} - e^{-\frac{t}{n}}\right)dt.$$

Pour $t \in [0 ; 1]$, $-\frac{t}{n+1} > -\frac{t}{n} \Rightarrow e^{-\frac{t}{n+1}} > e^{-\frac{t}{n}}$.

Ainsi, par positivité de l'intégrale d'une fonction positive : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est croissante.

3. On a, pour $t \in [0 ; 1]$:

$$1 - \frac{1}{t+2} = \frac{t+2-1}{t+2} = \frac{t+1}{t+2}.$$

4. On peut alors déterminer une primitive de la fonction :

$$J = \int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\mathrm{d}t = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

5. Pour $t \in [0\ ;\ 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t+1}{t+2}$$

$$\Leftrightarrow J\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant J.$$

6. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} = 1$. Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que la convergence (u_n) se fait vers $1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

131. Suite d'intégrales

1. a) La fonction $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$. Ainsi, par composée de fonctions f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$. Ainsi, pour $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$$

d'où l'encadrement : $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1.$

b) En passant cet encadrement à l'intégrale :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

2. On utilise une primitive usuelle ainsi :

$$u_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

3. a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n f(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout entier naturel, $u_n \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^n(x-1)f(x)\mathrm{d}x.$$

Or $x - 1 \leqslant 0$ sur $[0\ ;\ 1]$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout entier naturel et ainsi la suite est décroissante.

c) En tant que suite décroissante et minorée par 0, la suite (u_n) converge.

4. a) Pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$,

$$f(x) \leqslant 1 \Rightarrow x^n f(x) \leqslant x^n.$$

Ainsi : $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$

b) Le théorème des gendarmes nous permet de conclure sur la convergence de la suite vers 0.

Préparer le BAC
Je me teste p. 264

132. B et **D**

133. A

134. B et **D**

135. A et **C**

136. A

137. B et **D**

138. C

139. C

140. C

Préparer le BAC
Je révise p. 265

141. Aire sous la courbe

1. $F(x) = -\mathrm{e}^{-kx}$

2. $\mathrm{A}_{\mathrm{OCB}} = \frac{1 \times k\mathrm{e}^{-k}}{2}$

$$\mathscr{A}_{\mathrm{D}} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \mathscr{A}_{\mathrm{OCB}} = -\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{k\mathrm{e}^{-k}}{2}$$

3. $-\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{k\mathrm{e}^{-k}}{2} = k\mathrm{e}^{-k}$ équivaut à

$$\left(-\frac{3}{2}k - 1\right)\mathrm{e}^{-k} + 1 = 0.$$

On étudie la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(k) = \left(-\frac{3}{2}k - 1\right)\mathrm{e}^{-k} + 1.$$

$g'(k) = \ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k\ \ \mathrm{e}^{-k}$. g admet un minimum en $k = \frac{1}{3}$ et elle est continue et strictement croissante de $\left]\frac{1}{3}\ ; +\infty\right[$ dans $\left]g\left(\frac{1}{3}\right) ; 1\right[$. $0 \in]-1\ ;\ 1[$ donc il admet un unique antécédent dans $\left]\frac{1}{3}\ ; +\infty\right[$.

Sur $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$, la fonction g est strictement décroissante et continue de $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$ dans $\left]g\left(\frac{1}{3}\right);0\right[$.

0 n'appartient pas à ce dernier intervalle, il n'a pas d'antécédent par la fonction g sur $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$.

Ainsi, il existe une unique valeur de k strictement positive qui annule g et donc telle que l'aire de la surface $\mathcal{D}$ soit le double de celle du triangle OCB.

142. Bénéfice d'une entreprise

Vérifier que $f(1) = f(e^2) = 0$.

1. F est la primitive de f donc $F' = f$. f est positive sur [1 ; 7,2], négative sinon donc F est croissante sur [1 ; 7,2], décroissante sinon. C'est la courbe 2 qui correspond.

2. L'aire correspond à F(7,2) – F(1) soit 12,5.

3. a) $(x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

b) $F(x) = -x^2 + (e^2 - 1)(x\ln(x) - x) + 2x$

c) $\frac{1}{e^2 - 1}\int_1^{e^2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{F(e^2) - F(1)}{e^2 - 1} = \frac{(e^2 - 2)(e^2 + 1)}{e^2 - 1}$

143. Aire entre deux courbes

1. $f(x) - g(x) = e^x(\sin(x) + 1)$ donc $f - g$ est positive sur $\mathbb{R}$ et la courbe de f est en dessous de la courbe de g.

2. a)

$$H'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\right)e^{-x} - \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right)e^{-x}$$
$$= (\sin(x) + 1)e^{-x}$$

b) $$D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -0{,}5\left(e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right) \text{ u.a.} \approx 55{,}55 \text{ u.a.}$$

1 u.a. = 4 cm² donc $D \approx 222$ cm².

144. Suite d'intégrale

1. a) $f_1(x) = \ln(1 + x)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) $I_1 = \int_0^1 \ln(1 + x)\mathrm{d}x = [x\ln(1 + x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x + 1}\mathrm{d}x$
$= 2\ln(2) - 1$

2. a) $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln(2)$ et $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \ln\left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n}\right)\mathrm{d}x$

$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ donc $0 < \frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n} \leqslant 1$ donc

$\ln\left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n}\right) < 0$ et $I_{n+1} - I_n < 0$.

La suite (I_n) est décroissante.

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

3. a) $g'(x) = \frac{-x}{1 + x}$. g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $g(0) = 0$ et g est décroissante donc g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

$x > 0$ donc $x^n > 0$. On en déduit $g(x^n) < 0$ et donc $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.

c) $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$ donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n + 1}$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercices vers le supérieur p. 266

145. Intégration par parties et linéarité

1. a) On travaille sur les fonctions avant de travailler sur les intégrales :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}} - \sqrt{t^2 - 3} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}} - \frac{t^2 - 3}{\sqrt{t^2 - 3}} = \frac{3}{\sqrt{t^2 - 3}}.$$

Ainsi

$$J - K = \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}}\mathrm{d}t - \int_2^3 \sqrt{t^2 - 3}\mathrm{d}t$$
$$= \int_2^3 \left(\frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}} - \sqrt{t^2 - 3}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_2^3 \frac{3}{\sqrt{t^2 - 3}}\mathrm{d}t = 3I.$$

b) La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t^2 - 3}$ est dérivable sur $[2 ; 3]$ avec $u'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 3}}$. u' est donc continue sur $[2 ; 3]$. On peut effectuer une intégration par parties sur K.

$$K = \int_2^3 \sqrt{t^2 - 3}\mathrm{d}t$$

$$= \left[x\sqrt{x^2 - 3}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}}\mathrm{d}t \; = 3\sqrt{6} - 2 - J$$

2. On considère $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 3}\right)$.

a) La fonction $\ln(v)$ est dérivable à la condition où v est dérivable et ne s'annule pas. $v : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 3}$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $[2 ; 3]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi f est dérivable sur $[2 ; 3]$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}}{x + \sqrt{x^2 - 3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

b) La question précédente nous fournit une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 3}}$.

Ainsi :

$$I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3}}\mathrm{d}t = f(3) - f(2) = \ln\left(3 + \sqrt{6}\right) - \ln(3).$$

3. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} J - K = 3\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) (L1) \\ J + K = 3\sqrt{6} - 2 \qquad (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J = \dfrac{1}{2}\left(3\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) + 3\sqrt{6} - 2\right) (L1) + (L2) \\ J + K = 3\sqrt{6} - 2 \qquad (L2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J = \dfrac{1}{2}\left(3\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) + 3\sqrt{6} - 2\right) \\ K = -\dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) + \dfrac{1}{2}(3\sqrt{6} - 2) \end{cases}$$

146. Linéarité

1. On travaille, comme dans l'exercice précédent, sur les fonctions avant de travailler sur les intégrales :

$$\frac{t^2}{t^2 - 9} = \frac{t^2 - 9 + 9}{t^2 - 9} = 1 + \frac{9}{t^2 - 9}.$$

Ainsi on obtient, en intégrant sur $[0 ; 1]$:

$$J = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 - 9}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{t^2 - 9}\right)\mathrm{d}t = 1 + 9\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 9}\mathrm{d}t$$

$$= 1 + 9I.$$

2. On considère $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3 + x}{3 - x}\right)$.

a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut utiliser l'intervalle **[0 ; 1]**.

La fonction $\ln(v)$ est dérivable à la condition où v est dérivable et ne s'annule pas.

$v : x \mapsto \dfrac{3 + x}{3 - x}$ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas, et ne s'annule pas sur cet intervalle.

Ainsi f est dérivable sur $[0 ; 1]$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{9}{(3 - x)^2}}{\dfrac{3 + x}{3 - x}} = \frac{9}{(3 - x)(3 + x)} = \frac{-9}{x^2 - 9}.$$

b) Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 9}$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{1}{9}f(x)$.

Ainsi $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 9}dt = -\frac{1}{9}(f(1) - f(0)) = -\frac{\ln(2)}{9}$.

Finalement $J = 1 - \ln(2)$.

147. Fonctions rationnelles

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x + 1}$.

a) On part du membre à identifier :

$$a + \frac{b}{x + 1} = \frac{ax + a + b}{x + 1}$$

Ainsi, par identification des numérateurs polynômiaux :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle est donc :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

b) Cette décomposition nous permet, par linéarité de l'intégrale, d'effectuer le calcul suivant :

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = 1 - \ln(2)$$

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) On part du membre à identifier :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

Ainsi, par identification des numérateurs polynômiaux :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle est donc :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

b) Cette décomposition nous permet, par linéarité de l'intégrale, d'effectuer le calcul suivant.

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$= 2\ln(3) - \ln(8)$$

3) C'est à nous de refaire la décomposition en éléments simples sans guide cette fois !

L'idée amorcée dans les deux dernières questions était de factoriser le dénominateur de la fonction afin de faire apparaître des termes polynomiaux de degré 1 qui seront nos éléments simples dans la décomposition.

On considère alors $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$.

Ainsi, on cherche deux réels a et b tels que

$h(x) = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$. On a :

$$\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x + a + b}{(1-x)(1+x)}.$$

L'identification des coefficients des numérateurs nous donne le système :

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Nous obtenons les valeurs $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Finalement :

$$\int_2^3 h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_2^3 \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Big[\ln(|1-x|)\Big]_2^3 + \Big[\ln(1+x)\Big]_2^3\right).$$

On peut présenter les choses ainsi si l'on veut généraliser les primitives de fonctions inverses ou alors jouer avec les signes dans l'intégrale de départ.

$$\int_2^3 h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3) + \ln(2)) = \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

148. Dérivée d'une fonction intégrale

Soit la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$.

1. On découpe l'intégrale en passant par 1 en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_1^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$= F(2x) - F(x).$$

2. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F est dérivable et sa dérivée est donnée par $F'(x) = \dfrac{\cos(x)}{x} - \cos(1)$. De plus, la fonction $x \mapsto F(2x)$ est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est dérivable et

$f'(x) = \dfrac{\cos(2x)}{2x} - \dfrac{\cos(x)}{x}.$

149. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{-t} \ln(1+e^t) dt.$$

1. a) On a, pour tout réel t:

$$\frac{1}{1+e^t} = \frac{1+e^t - e^t}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}.$$

b) Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt = x - \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

$$= x + \ln(2) - \ln(1 + e^x)$$

2. La fonction f: $t \mapsto e^{-t}\ln(1 + e^t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème d'existence d'une primitive, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$F'(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x) - \ln(2) = f(x) - \ln(2)$.

La fonction dérivée est donc bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. On est confronté à l'intégrale d'un produit de fonctions dérivables à dérivées continues. On peut donc effectuer une intégration par parties, en intégrant le terme exponentiel et en dérivant le terme logarithmique.

$$\int_0^x e^{-t} \ln(1+e^t) dt = \left[-e^{-t} \ln(1+e^t)\right]_0^x + \int_0^x e^{-t} \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

$$= \ln(2) - e^{-x} \ln(1+e^x + \int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$$

$$= -e^{-x}\ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^x) + x + 2\ln(2)$$

On a de plus :

$$-\ln(1 + e^x) + x = -\ln(1 + e^x) + \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right).$$

Finalement : $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln(2)$.

4. On détermine les limites de chaque terme.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) = 0$$

par limite de composée de fonctions continues.

Concernant la fonction f, si l'on factorise :

$f(x) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$

Ainsi, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées et

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

par produit de limites,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par somme de limites.

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln(2)$.

Reste à étudier $F(x) - x$ en $-\infty$:

$$F(x) - x = -(e^{-x} + 1)\ln(1 + e^x) + 2\ln(2)$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x} + 1)\ln(1+e^x) = 0$.

Ainsi, la droite d'équation $y = x - 2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$ et la droite $y = 2\ln(2)$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

150. Suite et aire

1. Soit $g : x \mapsto 1 - x + 2\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) g est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$g'(x) = \frac{-x+2}{x}.$$

Sur $]0 ; 2]$, g' est positive donc g est croissante.

Sur $[2 ; +\infty[$, g' est négative donc g est décroissante.

b) On commence par travailler sur $]0 ; 2]$. La fonction g est continue et strictement croissante sur cet intervalle. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(2) = -1 + 2\ln(2)$. Comme $0 \in]-\infty ; -1 + 2\ln(2)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (version strictement monotone), il existe une unique solution sur $]0 ; 2[$ à l'équation $g(x) = 0$.

On rédige de la même manière sur $]2 ; 4[$ avec $g(2) > 0$ et $g(4) < 0$; g est décroissante sur cet intervalle et le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone nous donne une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur $]2 ; 4[$.

2. a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1+2\ln(x)}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) D'après la question 1, $g(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 4$ donc $f(x) - \frac{1}{x} \leqslant 0$. La stricte positivité de f est immédiate.

D'où l'encadrement, pour $x \geqslant 4$:

$$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

3. L'aire $\mathscr{A}(\alpha)$ correspond à l'aire de la surface sous la courbe représentative de f fonction positive, entre 1 et α. Ainsi :

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(t)\mathrm{d}t = \int_1^\alpha \frac{1+2\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^\alpha \frac{1}{t^2} \times (1+2\ln(t))\mathrm{d}t.$$

L'intégrale opère sur un produit de fonctions dérivables, de dérivées continues sur [1 ; α]. On peut donc effectuer une intégration par parties, cela en intégrant le terme inverse et en dérivant le terme logarithmique.

$$\int_1^\alpha \frac{1}{t^2} \times (1+2\ln(t))\mathrm{d}t$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \times (1+2\ln(x))\right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{2}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1-\alpha+2\ln(\alpha)}{\alpha} + 2 - \frac{2}{\alpha}$$

$$= 2 - \frac{2}{\alpha'}$$

sachant que $g(\alpha) = 0$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

a) Pour $x \geqslant 4$, $0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}$

en intégrant sur [n ; n + 1], pour $n \geqslant 4$:

$$0 < \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

or $\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln \frac{n+1}{n}$ d'où l'encadrement

$$0 < I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

b) Tout d'abord, on a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 \\ \lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

par limite de composées.

Le théorème d'encadrement nous permet de conclure quant à la convergence de (I_n) avec $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{n+2\ln(n+1)}{n+1} + 2 - \frac{2}{n+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n+1)}{n+1} = 0$ par croissances comparées. Au final $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

151. Encadrer une intégrale

Soit $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-t}$ définie sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

1. Ici, il est simple d'étudier la fonction sur l'intervalle. f est dérivable avec $f'(t) = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1-t)^2}$ qui est un produit et quotient de termes positifs sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

Ainsi, f est croissante sur cet intervalle et on obtient l'encadrement :

$$f(0) \leqslant f(t) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'où $1 \leqslant f(t) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ pour $t \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

2. a) On réduit l'expression :

$$(1+x)\mathrm{e}^{-x} + x^2 f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

b) On est confronté à l'intégrale d'un produit de deux fonctions : une fonction polynomiale et une fonction exponentielle ; toutes deux dérivables et de dérivées continues. Une intégration par parties, afin de faire baisser le degré du polynôme, est donc envisageable :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-(1+t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 2.$$

3. [ERRATUM] Les questions **3** et **4** ont été inversées à partir de la deuxième édition du manuel. La correction ci-dessous correspond à l'encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t$.

De la question 1 on obtient, en intégrant l'encadrement sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

4. [ERRATUM] Les questions **3** et **4** ont été inversées à partir de la deuxième édition du manuel. La correction ci-dessous correspond à l'encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

On a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{2}} (1+t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{7}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

152. Une suite définie par une intégrale

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Si $t \geqslant 0$, $\ln(1+t) \geqslant 0$ et une fonction exponentielle est strictement positive. Ainsi la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\ln(1+t)$ est positive donc son intégrale sur $[0\,;n]$ est positive.

2. u_n est l'intégrale d'un produit de deux fonctions dérivables à dérivées continues, on peut alors effectuer une intégration par parties. La question précédente suggère de dériver la partie exponentielle et d'intégrer la partie inverse pour faire apparaître une fonction ln.

$$\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{1+t}\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\ln(1+t)\right]_0^n + \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\ln(1+t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(n+1) + \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\ln(1+t)\mathrm{d}t$$

D'après la question **1.**

$\frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}\ln(1+t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ d'où l'inégalité :

$$u_n \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(n+1).$$

3. On a d'une part $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et d'autre part l'inégalité précédente donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

153. Convergence d'une suite

1. Pour se faire une idée de la manière de procéder, regardons le terme central de l'encadrement demandé :

$$\ln(n!) = \ln(2 \times 3 \times \ldots \times n) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k).$$

Travaillons alors sur un indice k avant d'effectuer une somme. On a, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^{n+1}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction *ln* étant croissante, on a, pour tout $t \in [k\,;k+1]$:

$$\ln(k) \leqslant \ln(t) \Leftrightarrow \int_k^{k+1}\ln(k)\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\ln(t)\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \ln(k) \leqslant \int_k^{k+1}\ln(t)\mathrm{d}t$$

On somme alors l'inégalité pour $k \in \{1\,;\ldots;n\}$.

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\ln(t)\mathrm{d}t$$

D'où : $\ln(n!) \leqslant \int_1^{n+1}\ln(t)\mathrm{d}t$.

On raisonne de la même manière pour le deuxième morceau : on a, pour tout $t \in [k-1\,;k]$,

$$\ln(t) \leqslant \ln(k) \Leftrightarrow \int_{k-1}^{k}\ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k)$$

On somme alors l'inégalité pour $k \in \{2\,;\ldots;n\}$.

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n}\ln(k)$$

D'où $\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(n!)$.

2. Commençons par noter que $\ln(n^n) = n\ln(n)$.

Ensuite, on a eu l'occasion de la calculer plus d'une fois dans ce chapitre, une primitive de la fonction ln est connue.

D'où $\int_1^n \ln(t)dt = n\ln(n) - n + 1$

et $\int_1^{n+1} \ln(t)dt = (n+1)\ln(n+1) - n$.

Ainsi $\dfrac{\int_1^n \ln(t)dt}{n\ln(n)} = 1 - \dfrac{n+1}{n\ln(n)} = 1 - \dfrac{1+\frac{1}{n}}{\ln(n)}$.

On détermine alors la limite de cette suite :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty.$$

Par quotient de limite, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{\ln(n)} = 0$.

De même, on a $\dfrac{\int_1^{n+1} \ln(t)dt}{n\ln(n)} = \dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} - \dfrac{1}{\ln(n)}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} = 1$.

On conclut finalement l'exercice par le théorème d'encadrement pour obtenir :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = 1.$$

154. Dérivées

On pose $g(x) = \int_{x+a}^{x+b} f(t)\cos(t-x)dt$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Attention, la variable de dérivabilité est à l'intérieur de l'intégrale, on ne peut pas appliquer directement le théorème fondamental. On commence par utiliser les formules de sommation des fonctions trigonométriques :

$$g(x) = \cos(x)\int_{x+a}^{x+b} f(t)\cos(t)dt + \sin(x)\int_{x+a}^{x+b} f(t)\sin(t)dt$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(t)$ et $t \mapsto f(t)\sin(t)$ sont continues, d'après le théorème fondamental, les fonctions $x \mapsto \int_{x+a}^{x+b} f(t)\cos(t)dt$ et $x \mapsto \int_{x+a}^{x+b} f(t)\sin(t)dt$ sont dérivables.

g est alors dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

Enfin, nous obtenons :

$$g'(x) = -\int_{x+a}^{x+b} f(t)\sin(t-x)dt + f(x+a)\cos(a) - f(x+b)\cos(b).$$

2. L'hypothèse de continuité de la dérivée nous suggère l'utilisation d'une intégration par parties dans l'intégrale présente dans la dérivée. Les hypothèses sont bien vérifiées et l'on a :

$$g'(x) = \int_{x+a}^{x+b} f'(t)\cos(t-x)dt.$$

155. Étude de la fonction cosh

On pose $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. La fonction cosh est dérivable de dérivée continue comme somme de fonctions dérivables de dérivées continues. Commençons, pour voir comment avancer, par calculer la dérivée de cette fonction puis sa dérivée seconde :

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ;$$

$$\cosh''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Partons alors de l'intégrale $\int_0^x (x-t)\cosh(t)dt$

afin de dériver la partie polynomiale et intégrer le cosinus hyperbolique :

$$\int_0^x (x-t)\cosh(t)dt = \left[(x-t)\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{2}dt$$

$$= \left[\cosh(t)\right]_0^x = \cosh(x) - \cosh(0).$$

Or $\dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1$ d'où $\cosh(x) = 1 + \int_0^x (x-t)\cosh(t)dt$.

2. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes, le résultat à démontrer est bien :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\mathbf{cosh(t)}dt.$$

On mène cette fois une double intégration par parties sur le terme $\int_0^x \dfrac{(x-t)^3}{6}\cosh(t)dt$. On obtient ainsi :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}\cosh(t)dt = -\frac{x^2}{2} - 1 + \cosh(x).$$

D'où le résultat.

156. Suite récurrente

La relation entre I_p et I_{p+1} est déterminée par une intégration par parties. On intègre un produit de fonctions polynomiales, donc dérivables et de dérivées continues. L'idée est de faire monter le degré de l'un et de baisser l'autre ce qui se fait naturellement dans une intégration par parties.

$$I_p = \int_0^1 x^p(1-x)^{n-p}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^{n-p}\right]_0^1 + \frac{(n-p)}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{n-p-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{p+1} + \frac{(n-p)}{p+1}I_{p+1}.$$

157. Constante d'Euler

1. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Si $k \leqslant x \leqslant k+1$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$ on obtient

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}.$$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on calcule $\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Commençons par calculer la partie intégrale du terme :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(t)\Big]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k).$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$$
$$= \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).$$

Voici un exemple classique de somme télescopique.

c) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on montre

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

On reprend l'encadrement du **a)** et l'on l'intègre sur $[k\,;k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$$

Puis l'on somme pour $k \in \{1\,;\ldots;n-1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

2. On pose $u_n = S_n - \ln(n)$.

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \geqslant 0$ d'après la question précédente.

On a aussi $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} - \ln(n) \leqslant 0$.

Reprenons la somme $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

De plus :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - 1$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - 1 - \ln(n) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) \leqslant 1$.

D'où l'encadrement $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b) Plusieurs manières de démontrer ce résultat. Si les élèves sont rassuré·e·s dans l'idée d'une étude de fonction ; il est plus pratique d'utiliser la concavité de la fonction ln. On vérifie aisément que la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0. Cette fonction étant concave, elle est en dessous de toutes ses tangentes. D'où le résultat.

c) $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1)$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or pour $X > 0$, $\ln(1-X) < \ln(1+X) \leqslant X$, d'après la question précédente.

Ainsi $u_n - u_{n-1} < 0$ et la suite (u_n) est ainsi décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

e) En utilisant un tableur, la calculatrice ou un programme, on obtient $\gamma \approx 0{,}577$.

158. Intégrale impropre

On pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. a) On a, pour $n > 1$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 2$

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ l'intégrale impropre sur le semi-ouvert]0 ; 1] correspond à l'aire de la surface sous la courbe sur cet intervalle. La convergence de cette aire signifie que la surface que l'on rajoute en se rapprochant de 0 finit par être négligeable.

2. a) $\int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_{1}^{n} = 2\sqrt{n} - 2$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{1}^{n} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$ ainsi l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ n'est pas définie. La surface ajoutée plus on s'approche de $+\infty$ est non négligeable et l'aire grandit infiniment.

3. a) On calcule tout d'abord, pour $n > 0$

$$\int_{0}^{n} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{0}^{n} = 1 - \mathrm{e}^{-n}.$$

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{0}^{n} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

L'intégrale impropre est bien définie et on écrit alors $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

b) On calcule tout d'abord, pour $n > 0$,

$$\int_{-n}^{0} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\mathrm{e}^{x}}\right]_{-n}^{0} = 2 - \sqrt{\mathrm{e}^{-n}} \text{ alors :}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{0} \frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}}}\mathrm{d}x = 2$$

L'intégrale impropre est bien définie et on écrit alors $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}}}\mathrm{d}x = 2$.

c) On calcule tout d'abord, pour $n > 0$,

$$\int_{0}^{n} \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{0}^{n}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(n^2+1).$$

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{0}^{n} \dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = +\infty$.

L'intégrale impropre n'est donc pas définie et on ne peut pas écrire $\int_{0}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

159. Irrationalité de e

On pose $I_n = \int_{0}^{1} t^n \mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer un encadrement d'une intégrale, c'est intégrer un encadrement de fonctions.

Notons f la fonction définie par $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ pour $x \in [0\ ;\ 1]$. f est dérivable avec $f'(x) = -\mathrm{e}^{1-x} < 0$. f est donc décroissante sur [0 ; 1] d'où, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$ l'encadrement :

$$f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$$

et ainsi $1 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}$.

De cela on obtient, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $x^n \leqslant x^n f(x) \leqslant \mathrm{e}x^n$.

On intègre alors l'encadrement sur [0 ; 1] :

$$\int_{0}^{1} t^n\mathrm{d}t \leqslant \int_{0}^{1} t^n\mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_{0}^{1} \mathrm{e}t^n\mathrm{d}t$$

or $\int_{0}^{1} t^n\mathrm{d}t = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{0}^{1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

2. Une relation de récurrence avec des intégrales suggère une intégration par parties. On souhaite faire baisser le degré de la partie polynomiale, on va donc la dériver et intégrer la partie exponentielle. Les fonctions sont toutes les deux dérivables de dérivées continues, cette intégration par parties est donc réalisable. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_{0}^{1} t^{n+1}\mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1-t}t^{n+1}\right]_{0}^{1} + \int_{a}^{b} (n+1)t^n\mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t$$

$$= -1 + (n+1)\int_{0}^{1} t^n\mathrm{e}^{1-t}\mathrm{d}t$$

On obtient donc la relation de récurrence recherchée, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

3. On pose $J_n = e \times n! - I_n$.

a) Le point précédent nous fournit une relation de récurrence sur I_n, on peut alors obtenir une relation de récurrence sur J_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= e \times (n+1)! - I_{n-1} \\ &= (n+1)(e \times n! - I_n) + 1 \\ &= (n+1)J_n + 1. \end{aligned}$$

On multiplie les termes par des entiers étapes par étapes, pourquoi ne pas se lancer dans un raisonnement par récurrence ?

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que J_n est un entier naturel.
Initialisation : pour $n = 0$,

$$J_0 = e \times 0! - I_0 = e - \int_0^1 e^{1-t}dt = 1.$$

Ainsi, $J_0 \in \mathbb{N}$.
Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel $n > 0$ tel que J_n soit entier.

$$J_{n+1} = (n+1)J_n + 1.$$

Par hypothèse de récurrence, J_n est entier donc J_{n+1}, comme produit et somme d'entiers, est un entier naturel.

Conclusion : on a $J_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout entier naturel n, si l'on suppose J_n entier alors J_{n+1} est un entier. Ainsi, par raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ J_n est un entier naturel.

b) Si $n \geqslant 2$, alors $0 < \dfrac{1}{n+1} < 1$ et $0 < \dfrac{e}{n+1} < 1$. Ainsi, d'après la première question, $0 < I_n < 1$. I_n n'est donc pas un entier pour $n \geqslant 2$.

c) On a $I_n = e \times n! - J_n$. Si $e \times n!$ était un entier, alors, comme $J_n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier. Mais ceci contredirait la question précédente, donc $e \times n!$ n'est pas entier.

4. Effectuons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe p et q premiers entre eux tels que $e = \dfrac{p}{q}$. Considérons alors, pour

$n \geqslant 2 e \times n! = \dfrac{p}{q} \times n!$ et choisissons un tel n supérieur à q. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \times n! &= \frac{p}{q} \times 1 \times 2 \times \ldots \times (q-1) \times q \times (q+1) \times \ldots \times n \\ &= p \times 1 \times 2 \times \ldots \times (q-1) \times (q+1) \times \ldots \times n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $n \geqslant q$, $e \times n!$ est un entier ; ce qui est absurde d'après la question précédente.

e est donc irrationnel.

Lemme pour les exercices 160 et 161

On démontre un résultat fondamental qui aurait sa place dans le cours.

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a\ ;b]$. On a :

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0, t \in [a\ ;b].$$

Considérons la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. D'après le théorème d'existence d'une primitive, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Par hypothèse, on a

(i) f est positive sur $[a\ ;b]$;

(ii) $F(b) = 0$.

De (i), on tire $\int_a^x f(t)dt \geqslant 0$, donc F est positive $[a\ ;b]$.

De plus on tire que F est croissante sur $[a\ ;b]$. Ainsi, pour $x \in [a\ ;b]$, $F(x) \leqslant F(b)$.

De (ii), on tire $F(x) = 0$ pour $x \in [a\ ;b]$. On obtient $F'(x) = f(x) = 0$ pour $x \in [a\ ;b]$.

160. Valeur moyenne

La fonction f est continue sur le segment $[a\ ;b]$. Les hypothèses sont sur les valeurs moyennes de la fonction sur ce segment et de sa fonction carrée. On considère l'intégrale de la fonction g.

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &= \int_a^b (1 - f(x))^2 dx \\ &= \int_a^b (1 - 2f(x) + f^2(x))dx \\ &= \int_a^b dx - 2\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \end{aligned}$$

On a alors par hypothèse $\int_a^b g(x)dx = 0$. De plus, la fonction g est positive et continue sur $[a\ ;b]$. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in [a\ ;b]$. Ainsi $f(x) = 1$ pour tout $x \in [a\ ;b]$.

161. Égalités en puissances

La fonction f est continue sur le segment $[a\ ;b]$. Les hypothèses font intervenir des résultats sur trois puissances successives de cette fonction. L'idée est de penser de quelle manière l'on peut introduire ensemble ces trois puissances.

La question suggère alors de développer :

$(f^2 - f)^2 = f^4 - 2f^3 + f^2$. Utilisons alors la linéarité de l'intégrale afin de voir ce que les hypothèses vont impliquer :

$$\int_a^b (f^2(t) - f(t))^2 \mathrm{d}t = \int_a^b f^4(t)\mathrm{d}t - 2\int_a^b f^3(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Les intégrales qui interviennent alors sont toutes égales par hypothèse, ainsi

$$\int_a^b (f^2(t) - f(t))^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Or, la fonction $t \mapsto (f^2(t) - f(t))^2$ est positive et continue, son intégrale sur $[a\ ;\ b]$ étant nulle, cela signifie que la fonction est nulle.

Pour tout $t \in [a\ ;\ b]$:

$$f^2(t) - f(t) = f(t)(f(t) - 1) = 0.$$

Ce produit nul est équivalent à l'un des deux facteurs nuls. Ainsi, pour $t \in [a\ ;\ b]$:

$$f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1.$$

Mais là n'est pas la fin car cela ne fournit pas directement la réponse et la constance de la fonction.

La fonction f est continue donc elle ne peut être constante par morceaux. C'est donc que f est constante sur $[a\ ;\ b]$, soit nulle, soit égale à 1.

162. Lemme de Riemann-Lebesgue

1. La fonction f est dérivable, de dérivée continue et sin est une fonction circulaire donc infiniment dérivable. On peut alors considérer le calcul de $\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n}f(t)\cos(nt)\right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1}{n}\right) f'(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)}{n}.$$

2. a) f' est continue sur un segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a\ ;\ b]$, $|f'(x)| < M$.

b) Nous obtenons alors, par inégalité triangulaire:

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,|\cos(nt)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b M \times 1\mathrm{d}t.$$

On utilise dans la dernière ligne la majoration usuelle d'une fonction cosinus ainsi que la majoration de la question précédente. Or, $\int_a^b M \times 1\mathrm{d}t = M(b - a)$.

Finalement, nous obtenons :

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M(b-a)}{n}.$$

3. Commençons par démontrer la convergence de la suite (u_n). $u_n = (f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)) \times \frac{1}{n}$ est un produit d'un terme borné par un terme qui tend vers 0. Ainsi par produit de limites, (u_n) converge vers 0.

De même, la suite de terme général $\frac{M(b-a)}{n}$ converge vers 0.

On démontre ensuite que la suite de terme général $\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$ converge vers 0. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant u_n + \frac{M(b-a)}{n}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\right| = 0$$

On en déduit ensuite le résultat.

163. Série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Si $k \leqslant x \leqslant k + 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\ ;\ +\infty[$ on obtient $0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ d'où, en intégrant sur $[k\ ;\ k + 1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}.$$

b) On somme l'inégalité précédente pour $k \in \{1 ; ... ; n\}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

d'où $\displaystyle\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant H_n$.

c) On commence par calculer le membre de gauche :

$$\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

Ensuite, on précise sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$$

Finalement, d'après le théorème de comparaison, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

2. a) Si $k-1 \leqslant x \leqslant k$, pour $2 \leqslant k$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ on obtient $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{x}$ d'où, en intégrant sur $[k-1 ; k]$:

$$\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

b) On somme l'inégalité précédente pour $k \in \{2 ; ... ; n\}$:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

d'où $H_n - 1 \leqslant \displaystyle\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

c) On a :

$$\int_{1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(n)$$

3. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, on cherche bien

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(\boldsymbol{n}).$$

On obtient alors $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n)$.

4. On complète le programme et on calcule les valeurs.

```
import math
def H(n) :
   s=0
   for i in range(1,n+1) :
      s=s+1/i
   return s
def U(n) :
   return H(n)-math.log(n)
print(H(2))
print(U(100))
print(U(1000))
print(U(10000))
```

La suite semble converger vers une valeur dont une approximation peut être donnée par 0,577.

164. Intégrale de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

1. Les premiers calculs sont directs :

$$W_0 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} ;$$

$$W_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\mathrm{d}t = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2. a) [ERRATUM] Une erreur a été imprimée sur la première édition du manuel, corrigée dans les éditions suivantes. On cherche bien à montrer que : $W_n = (\boldsymbol{n-1})\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$.

Si $n > 1$, on peut écrire

$\sin^n(t) = \sin^{n-1}(t)\ \sin(t)$ ce qui permet de considérer W_n comme intégrale d'un produit de fonctions infiniment dérivables. On peut donc effectuer une intégration par parties.

$$W_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

$$= \Big[-\sin^{n-1}(t)\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Or $\Big[-\sin^{n-1}(t)\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, d'où le résultat.

b) Une égalité trigonométrique classique nous donne :

$$(n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t = (n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(t)(1-\sin^2(t))\mathrm{d}t$$

$$= (n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t - (n-1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n}(t)\mathrm{d}t$$

On obtient ainsi :

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n$$

et on en déduit la relation de récurrence.

3. La démonstration par récurrence utilisera la relation démontrée précédemment. On mènera les deux démonstrations dans une unique récurrence.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \; ; W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = 1 = \frac{2^0(0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n pour lequel les deux égalités soient vraies. On a alors, par la relation de récurrence :

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

par hypothèse de récurrence. Or

$$\frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \times \frac{2n+2}{2n+2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}.$$

On obtient donc la première égalité vraie au rang $n + 1$. Ensuite :

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui correspond à la deuxième égalité vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : les deux égalités sont vraies au rang $n = 0$; de plus, si on les suppose vraies à un certain rang quelconque, elles le restent au rang suivant. Ainsi par raisonnement par récurrence elles sont vraies pour tout entier naturel.

165. Développement en série de l'exponentielle

1. Pour $x > 0$, on note :

$$f_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} e^t, \; t \in [0 \; ; x].$$

a) La fonction exponentielle est croissante sur $[0 \; ; x]$ donc pour $t \leqslant x$, $e^t \leqslant e^x$. Ainsi, pour $t \in [0 \; ; x]$:

$$\frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leqslant \frac{(x-t)^n}{n!} e^x.$$

De plus $x - t \geqslant 0$, finalement on a

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{(x-t)^n}{n!} e^x, \; t \in [0 \; ; x].$$

b) On intègre sur $[0 \; ; x]$ l'inégalité précédente :

$$\int_0^x f_n(t) dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x dt.$$

Calculons alors le membre de droite sans oublier que l'on intègre par rapport à t.

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x dt = \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt$$

$$= \frac{e^x}{n!} \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

On obtient $\int_0^x f_n(t) dt \leqslant \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}$.

c) Il s'agit de déterminer tout d'abord la limite de la suite de terme général $\frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}$. Ce résultat est un résultat de croissance de la puissance comparée au factoriel. Rappelons ici une manière de procéder en considérant la suite définie par :

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, \; x > 0.$$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$ qui converge vers 0. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon$. Choisissons alors un $\varepsilon \in]0 \; ; 1[$. Un raisonnement par récurrence nous donne alors $u_n < \varepsilon^{n-N} u_N$ le terme de droite tend vers 0 donc, d'après le théorème d'encadrement, avec $0 < u_n < \varepsilon^{n-N} u_N$, (u_n) converge vers 0.

Revenons alors à l'objet de la question. La suite de terme général $\frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} = u_n e^x$ converge vers 0, donc d'après le théorème d'encadrement sur

$0 \leqslant \int_0^x f_n(t) dt \leqslant \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}$, on obtient $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = 0$.

2. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} e^t dt = \int_0^x e^t dt = e^x.$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n pour lequel l'égalité est vraie. Considérons alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = e^x,$$

par hypothèse de récurrence.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et pour tout entier naturel n, si on la suppose vraie au rang n alors elle est vraie au rang suivant. Ainsi, par raisonnement par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après la première question, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = 0.$$

Ainsi, $e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

166. Suite d'intégrales

On pose $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Rappelons le théorème des croissances comparées : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$.

Donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \times \lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} - 4 \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ par linéarité des limites.

Ensuite, il suffit d'effectuer un produit de limites infinies avec règles des signes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 4x^2) \times \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = -\infty.$$

2. La fonction f est dérivable comme produit de fonction polynomiale avec une fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = -2x(x^2 - 5x + 4)e^{-x}.$$

3. On continue la factorisation amorcée de $f'(x)$ afin de déterminer son signe :

$$f'(x) = -2x(x-1)(x-4)e^{-x}.$$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

4. On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Calculons I_1 à l'aide d'une intégration par parties, on intègre un produit de fonctions infiniment dérivables:

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{2}{e} + 1.$$

5. Une intégration par parties sur I_n permet d'obtenir la relation de récurrence, en faisant baisser le degré du monôme :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^1 + n\int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{e} + nI_{n-1}.$$

6. La relation de récurrence permet ainsi d'obtenir $I_2 = -\frac{5}{e} + 2$; $I_3 = -\frac{16}{e} + 6$.

7. Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la fonction f est positive. Ainsi, l'aire de la surface du plan sous la courbe représentative de f entre 0 et 1 correspond à l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x)dx = 2I_3 - 4I_2$$

par linéarité de l'intégrale.

L'aire est donnée par $-\frac{12}{e} + 4$ cm².

167. Placements avec taux d'intérêt instantané variable

A. Somme de départ

On s'intéresse au système différentiel $\begin{cases} y'(t) = i(t)y(t) \\ y(0) = S_0 \end{cases}$

1. Si $i(t) = b$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors les solutions de l'équation différentielle homogène $y'(t) = by(t)$ sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{bt}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On détermine cette constante avec la condition initiale. Finalement, $S(t) = S_0e^{bt}$.

2. a) D'après le théorème d'existence d'une primitive, on a $I(t) = \int_0^t i(x)\mathrm{d}x$. De plus I est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

b) [ERRATUM] La première édition comporte une erreur. La fonction ϕ est bien définie par :

$\phi(t) = e^{-I(t)}S(t)$.

On pose $\phi(t) = e^{-I(t)}S(t)$. La fonction $t \mapsto e^{-I(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables. Par hypothèse, la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc, par produit de fonctions dérivables, la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

On a :

$$\phi'(t) = e^{-I(t)}(-I'(t)S(t) + S'(t)).$$

Or, $I'(t) = i(t)$ et $S'(t) = i(t)S(t)$.

Ainsi $\phi'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et la fonction ϕ est constante, égale à $\phi(0) = S_0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement $S(t) = S_0e^{I(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

B Application numérique

On pose $i(t) = b(1 + a\sin(t)e^{-t})$.

1. Pour calculer cette intégrale de produit de fonctions infiniment dérivables, on va effectuer deux intégrations par parties pour utiliser le caractère cyclique de la dérivée des fonctions circulaires :

$$\int_0^t \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \left[-\sin(x)e^{-x}\right]_0^t + \int_0^t \cos(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\sin(x)e^{-x}\right]_0^t + \left[-\cos(x)e^{-x}\right]_0^t - \int_0^t \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_0^t \sin(x)e^{-x}\mathrm{d}x = -\frac{e^{-t}}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + \frac{1}{2}$$

2. D'après la partie précédente, on a

$$S(t) = S_0e^{I(t)},$$

avec $I(t) = -\dfrac{ae^{-t}}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + \dfrac{a}{2} + bt$, pour $t \in \mathbb{R}_+$.

168. Série et intégrale

On pose $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ pour $x > 0$.

1. La fonction f est quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Or $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$. Ainsi, f est croissante sur $]0 ; e]$ puis décroissante sur $[e ; +\infty[$.

2. $f(e) = \dfrac{1}{e}$; $f(e^2) = \dfrac{2}{e^2}$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = -e$.

3. On donne l'équation réduite de la tangente en $\dfrac{1}{e}$:
$y = 2e^2x - 3e$.

4. Pour $x \geqslant k \geqslant 3$, la fonction f étant décroissante sur $[e ; +\infty[$, on a :

$$\frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

Ainsi, en intégrant sur $[k ; k + 1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$$

puis en sommant pour $k \in \{1 ; ... ; n\}$:

$$\int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$

Reste à calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$.

On a :

$$\int_1^n \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_1^n = \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)^2}{2} = +\infty,$$

et, par théorème de comparaison, on obtient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

5. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on cherche le couple tel que $e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)}$.

On raisonne par équivalence en utilisant la stricte croissance de l'exponentielle avec $1 < x < y$:

$$e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)} \Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Il s'agit de déterminer qu'il existe une unique valeur $\alpha \in f(\mathbb{R}_+^*)$ qui admet exactement deux antécédents entiers.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la stricte décroissante de f sur $[e ; +\infty[$ nous permet de travailler avec un antécédent dans $[e ; +\infty[$ et un antécédent dans $]0 ; e]$. On teste alors $x = 1$ ou $x = 2$. On a $f(1) = 0$ et $f(2) = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

On résout alors $f(y) = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et l'on obtient ainsi le couple $(2 ; 4)$.

Travaux pratiques p. 270

TP 1. Méthodes numériques de calcul intégral

- **Durée estimée :** 55 min

• **Objectifs :** On s'intéresse dans ce TP à deux méthodes numériques pour approcher le calcul d'intégrales : les méthodes des rectangles et des trapèzes.

On programmera en langage Python ces deux méthodes et on étudiera l'efficacité de chacune d'entre elles dans les exemples choisis.

Ce TP permet de s'entraîner avec les boucles, les listes et leur représentation graphique sous Python.

On commence par programmer la fonction f : $x \mapsto (x+1)e^{-x} + 1$.

```
def test(x) :
   y=(x+1)*exp(-x)+1
   return y
```

On calcule alors avec une intégration par parties $I = 3\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$.

A. Méthode des rectangles

1. Soit n un entier naturel non nul. On découpe l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles de même longueur. On construit alors des rectangles dans le but d'approximer l'aire sous la courbe d'une fonction f. L'aire du k-ième rectangle est donnée par le produit de la longueur $f(x_k)$ par la largeur $\dfrac{b-a}{n}$.

Finalement :

$$I_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

2. La fonction `rectangle(f,0,1,10)` renvoie la valeur I_{10} où l'intervalle que l'on découpe en 10 sous-intervalles est $[0 ; 1]$.

On obtient $I_{10} \approx 1{,}909\,3$ qui fournit un arrondi de I à 10^{-1} près ; $I_{100} \approx 1{,}897\,7$ qui est égal à I à 10^{-2} près et $I_{1\,000} \approx 1{,}896\,5$ qui est égal à I à 10^{-3} près.

B. Méthode des trapèzes

1. L'aire du k-ième trapèze est donnée par la somme des deux bases de la longueur $f(x_k) + f(x_{k+1})$ multiplié par la demi hauteur $\dfrac{b-a}{2n}$.

Finalement :

$$J_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(x_{k+1})$$

2. La fonction `trapeze(f,0,1,10)` renvoie la valeur J_{10} où l'intervalle que l'on découpe en 10 sous-intervalles est $[0 ; 1]$.

On programme cette fonction :

```
def test(x) :
   y=(x+1)*exp(-x)+1
   return y
```

On obtient $J_{10} \approx 1{,}896\,0$ qui est égal à I à 10^{-1} près ; $I_{100} \approx 1{,}896\,358$ qui est égal à I à 10^{-4} près et $I_{1\,000} \approx 1{,}896\,361$ qui est égal à I à 10^{-7} près.

C. Comparaison des méthodes

1. On programme la fonction `gauss` :

```
def gauss(x) :
   y=exp(-x**2)/2
   return y
```

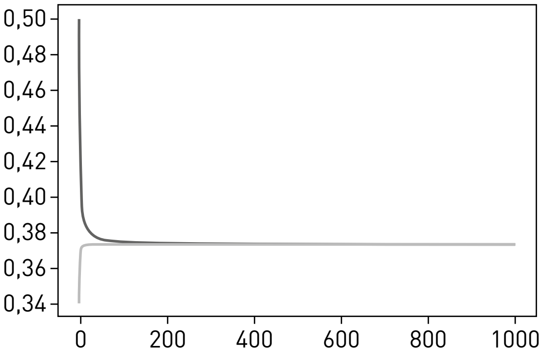
On obtient alors $I_{10} \approx 0{,}388\,9$; $I_{100} \approx 0{,}375\,0$ et $I_{1\,000} \approx 0{,}373\,6$, puis $J_{10} \approx 0{,}373\,1$; $J_{100} \approx 0{,}373\,4$ et $J_{1\,000} \approx 0{,}373\,4$.

2. La liste des valeurs approchées de J_n est donnée par la fonction `liste_trapeze(f,a,b,N)` :

```
def liste_trapeze(f,a,b,N) :
   L=[]
   for k in range(1,N+1):
      L=L+[trapeze(f,a,b,k)]
   return L
```

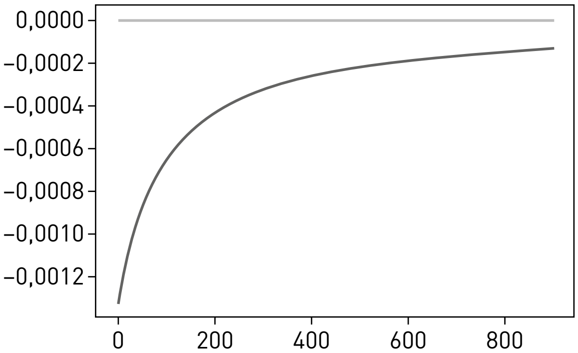
3. On représente les deux listes :

```
I=liste_rectangle(gauss,0,1,1000)
J=liste_trapeze(gauss,0,1,1000)
print(I)
print(J)
x=np.array([k for k in range(1000)])
y=np.array(I)
z=np.array(J)
plt.plot(x, y)
plt.plot(x,z)
plt.show()
```



4. On choisit d'évaluer l'erreur par rapport à l'intégrale calculée en début de TP. On programme les listes des erreurs commises pour chacune des deux méthodes et on représente ces listes. Pour se faire, on ne s'intéresse pas aux 100 premières valeurs :

```
def liste_erreurs_rect(f,a,b,E,N):
   L=[]
   for k in range(100,N+1):
      L=L+[E-rectangle(f,a,b,k)]
   return L
def liste_erreurs_trap(f,a,b,E,N):
   L=[]
   for k in range(100,N+1):
      L=L+[E-trapeze(f,a,b,k)]
   return L
ex=3*(1-1/exp(1))
X=np.array(liste_erreurs_rect(test,0,1,ex,1000))
Y=np.array(liste_erreurs_trap(test,0,1,ex,1000))
plt.plot(x,X)
plt.plot(x,Y)
plt.show()
```



La méthode des trapèzes converge plus rapidement vers la solution. On choisit cette méthode pour approcher une valeur de l'intégrale.

TP 2. Méthode de Monte Carlo

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** La méthode numérique présentée dans ce TP nous familiarise avec l'utilisation d'un procédé aléatoire afin d'obtenir une valeur numérique approchée. Bien que son utilisation dans le calcul d'intégrale en dimension 1 ne soit pas des plus pertinents, le TP permet son introduction de manière simple et en lien avec le programme de terminale spécialité. Il y sera travaillé la bibliothèque random sous Python ainsi que la loi des grands nombres.

A. Aire d'un quart de cercle

1. On a $A = \frac{\pi}{4}$.

2. a) $x, y \in [0\ ;\ 1]$ donc $M(x\ ;\ y) \in [0\ ;\ 1] \times [0\ ;\ 1]$ qui est le carré C.

b) On peut décrire le quart de disque comme l'ensemble $\{(x\ ;\ y) \in [0\ ;\ 1]^2\ ;\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

c) La probabilité que le point M se trouve sur le quart de disque est donnée par $\frac{\pi}{4}$ soit l'aire de cette surface.

3. On complète la fonction `monteCarlo` :

```
from math import *
import random
def monteCarlo1(n):
   C=0
   for k in range(n):
      x=random.random()
      y=random.random()
      if x**2+y**2<=1:
         C=C+1
   return C/n
print(monteCarlo1(10000))
```

4. La fonction ainsi programmée simule une détermination de fréquence d'appartenance au quart de disque. Lorsque n augmente, cette fréquence tend vers la fréquence théorique soit la probabilité que le point se trouve sur la surface donnée ; de par la loi des grands nombres. Cette probabilité est égale au quotient de l'aire de la surface par l'aire du carré, soit donc égale à l'aire de la surface.

B. Généralités et application à d'autres calculs d'aire

1. La fonction continue est supposée positive, ainsi, son aire est donnée par $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Cette valeur est égale à la probabilité qu'un point M du carré de côté 1 se trouve sur la surface correspondante.

2. On décrit alors la surface concernée par l'ensemble : $\{(x\,;y) \in [0\,;1]^2\,;\, y \leqslant f(x)\}$.

3. On programme enfin une fonction Python afin d'obtenir `monteCarlo2` et `monteCarlo3` :

```
def monteCarlo(n,f):
    C=0
    for k in range(n):
        x=random.random()
        y=random.random()
        if y<=f(x):
            C=C+1
    return C/n
def carre(x):
    y=x**2
    return y
def gauss(x):
    y=1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2)
    return y
print(monteCarlo(10000,carre))
print(monteCarlo(10000,gauss))
```

TP 3. Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** La résolution de la quadrature de la parabole par Archimède marque un point culminant dans l'étude des mesures d'aire durant l'Antiquité. En faisant intervenir une suite géométrique, Archimède parvient à rendre possible un calcul d'aire en utilisant comme acquis des résultats de limites d'encadrement.

A. Construction du triangle de base [AB] d'aire maximale

1. Construction sur Geogebra.

2. GeoGebra affiche la valeur de 15,625 pour l'aire du triangle ABC.

4. L'aire $\mathcal{A}$ se calcule par une intégrale.

Une équation réduite de la droite (AB) est donnée par $y = x + 8$.

$$\mathcal{A} = \int_{-4}^{1} x + 8 - (x+2)^2 \mathrm{d}x = \frac{125}{6}.$$

On remarque que $\frac{4}{3}a_0 = \mathcal{A}$.

B. Démonstration de l'égalité $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$ Aire (ABC)

1. a) Les deux triangles ACD et CBE ont la même aire, égale à 1,95.

b) $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.

c) Les quatre triangles ont une aire égale à 0,24 d'après GeoGebra.

On a $\frac{a_1}{a_2} = 4$.

d) Si l'on utilise les résultats donnés et que l'on exagère une conjecture, on peut considérer que la suite est géométrique.

e) La somme des termes correspond à la somme des aires de tous les triangles construits. On peut conjecturer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{n} a_n \leqslant \mathcal{A}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \mathcal{A}$$

2. a) Si l'on admet les résultats donnés, on peut considérer $q = \frac{1}{4}$ et $a_n = \frac{a_0}{4^n}$ pour tout entier naturel n.

b) C'est le résultat de somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} a_n = a_0 \frac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}}.$$

c) La raison vérifiant $0 < q < 1$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \frac{4}{3}a_0.$$

Le TP admet ici que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n = \mathcal{A}$.

Rappelons que sans cette donnée il n'est pas possible de conclure.

TP 4. Calculer une surface

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** Manipuler l'interpolation polynomiale avec GeoGebra.

A. 1^e^ approximation: la courbe est une parabole

1. Si l'on suppose que $f(x) = b - ax^2$, alors, des conditions $f(0) = 20$ et $f(20) = 0$, on tire $b = 20$ et $a = \frac{1}{20}$.

2. Finalement, on obtient :

$\int_{-20}^{20} f(t)\mathrm{d}t = \left[20x - \frac{1}{60}x^3\right]_{-20}^{20} = \frac{1600}{3}$ soit une aire de façade d'environ 533 m².

B. 2^e^ approximation : la courbe est une fonction du type $f(x) = (ax + b)e^{2x}$

1. On trouve, en réalisant l'interpolation polynomiale avec GeoGebra, $a = -2$ et $b = 1$.

2. La fonction f est produit de fonctions polynomiale et exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.
f est donc dérivable avec $f'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x}$.

Si $f(x) = (ax + b)e^{2x}$, les conditions nous donnent $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$.

On retrouve alors $a = -2$ et $b = 1$.

Finalement $f(x) = (-2x + 1)e^{2x}$.

3. Il s'agit de calculer l'intégrale suivante, au moyen d'une integration par parties. On vérifie les hypotheses de dérivées continues.

$\int_{-1,2}^{0,4} f(t)\mathrm{d}t = 0,6e^{0,8} - 2,2e^{-2,4}$

Soit une aire environ égale à 454 m².