Nom et prénom : ....

Exercice 1. (3 points)

Répondre aux questions suivantes avec rigueur :

1. Calculer l' intégrale : $\mathrm{I} = \int_1^3 x^2 + 7 + \frac{4}{x+3}\,\mathrm{d}x$

2. En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $\mathrm{J} = \int_0^3 xe^{3x}\,\mathrm{d}x$

<u>Correction :</u>

Répondre aux questions suivantes avec rigueur :

1. Calculer l' intégrale : $\mathrm{I} = \int_1^3 x^2 + 7 + \frac{4}{x+3}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_1^3 x^2 + 7 + \frac{4}{x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= [\ \frac{1}{3}x^3 + 7x - 4\ln(x+3)\ ]_1^3 \\
&= \frac{1}{3} \times 3^3 + 7 \times 3 + 4\ln(6) - \left(\frac{1}{3} \times 1^3 + 7 \times 1 + 4\ln(4)\right) \\
&= 9 + 21 + 4\ln(6) - \frac{1}{3} - 7 - 4\ln(4) \\
&= \frac{68}{3} + 4\ln(6) - 4\ln(4) \\
&= \frac{68}{3} + 4\ln\left(\frac{6}{4}\right) \\
&= \frac{68}{3} + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{I} = \int_1^3 x^2 + 7 + \frac{4}{x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{68}{3} + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

2. En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $\mathrm{J} = \int_0^3 xe^{3x}\,\mathrm{d}x$

Les fonctions polynomiale et exponentielle sont infiniment dérivables, on peut utiliser une intégration par parties.

On pose : $u(x) = x \quad u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{3x} \quad v(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \mathrm{J} &= \int_0^3 xe^{3x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ \frac{1}{3}xe^{3x}\ \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ \frac{1}{3}xe^{3x}\ \right]_0^3 - \left[\ \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}e^{3x}\ \right]_0^3 \\
&= e^9 - 0 - \frac{1}{9}e^9 + \frac{1}{9}e^0 \\
&= \frac{8}{9}e^9 + \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{J} = \int_0^3 xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{9}e^9 + \frac{1}{9}}$

Exercice 2. (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. **a.** Déterminer la limite de f en 0 ; en donner une interprétation graphique.

   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$; en donner une interprétation graphique.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f, puis étudier son signe.

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f. On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(\mathrm{e})$.

3. **a.** Montrer que la fonction F définie sur $]0~;~+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{5}{2}(\ln x)^2 + 3x$ est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

   b. En déduire la valeur exacte de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.

4. **a.** Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2~;~4]$.

   b. Donner une interprétation graphique de I.

5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.

   En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

Correction :

Sujet : baccalauréat ES Pondichéry 2007

On a $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

1. **a.** $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$,

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

Géométriquement $\boxed{\text{la droite d'équation } x = 0 \text{ est asymptote verticale à la courbe } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage}}$ $\boxed{\text{de } 0}$

b. On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$.

Géométriquement $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 3 \text{ est asymptote à la courbe } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage}}$ $\boxed{\text{de plus l'infini}}$

2. **a.** On a $f(x) = 5\dfrac{\ln x}{x} + 3$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

De plus $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{5(1 - \ln x)}{x^2} \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$

b. Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff x < \text{e}$: donc sur $]0\ ;\ \text{e}[$, la fonction est croissante de moins l'infini à $f(\text{e}) = 5 \times \dfrac{1}{\text{e}} + 3 = \dfrac{5}{\text{e}} + 3 \approx 4,84$.
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff x > \text{e}$: sur $]\text{e}\ ;\ +\infty[$ la fonction est décroissante de $f(\text{e})$ à 3.
- $1 - \ln x = 0 \iff x = \text{e}$: la fonction a un maximum $f(\text{e})$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variation de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$5e^{-1}+3$	$\searrow$	3

3. **a.** Sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction F , définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{5}{2}(\ln x)^2 + 3x$, est dérivable et :

On a sait que $(u^2(x))' = 2u' \times u$, avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

et on peut écrire $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{5}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x + 3$

$$\mathrm{F}'(x) = 5\frac{\ln x}{x} + 3 = f(x)$$

Donc $\boxed{\text{F est bien une primitive de } f \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$

b. On a donc :

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)]_2^4 = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2)$

$= \dfrac{5}{2}(\ln 4)^2 + 3 \times 4 - \left(\dfrac{5}{2}(\ln 2)^2 + 3 \times 2\right)$

$= \dfrac{5}{2} \times (2\ln 2)^2 - \dfrac{5}{2}(\ln 2)^2 + 6 = \dfrac{15}{2}(\ln 2)^2 + 6$

Donc $\boxed{\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{15}{2}(\ln 2)^2 + 6}$

4. **a.** On a vu que :

- sur [2 ; e] la fonction est croissante de $f(2) = 5\dfrac{\ln 2}{2} + 3 \approx 4,73$ à $f(\mathrm{e})$: elle est donc positive sur cet intervalle.
- sur [e ; 4], la fonction est décroissante de $f(\mathrm{e})$ à $f(4) = \dfrac{5}{4}\ln 4 + 3 \approx 4,7$: elle est donc positive sur cet intervalle.

Finalement $\boxed{f \text{ est positive sur } [2\,;\,4]}$

b. D'après la question précédente I est donc l'aire en un cités d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$.

5. La valeur moyenne égale à : $\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$

Alors $\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{15}{2}(\ln 2)^2 + 6\right] = \dfrac{15}{4}(\ln 2)^2 + 3 \approx 4,8017$

D'où soit environ 4,8017 milliers d'euros soit environ 4 801,70 € et à 100 euros près : 4 800 €.

Donc $\boxed{\text{une valeur approchée de ce bénéfice est d'environ 4800 €à 100 euros près}}$