Nom et prénom : ....

Exercice 1. (3 points)

Répondre aux questions suivantes avec rigueur :

1. Calculer l' intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^4 -x+5-\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$

2. En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^2 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$

<u>Correction :</u>

Répondre aux questions suivantes avec rigueur :

1. Calculer l' intégrale : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^4 -x+5-\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int_1^4 -x+5-\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ -\frac{1}{2}x^2+5x-4\ln(x)\ \right]_1^4 \\
&= -\frac{1}{2}4^2+5\times4-4\ln(4)-\left(-\frac{1}{2}1^2+5\times1-4\ln(1)\right) \\
&= -8+20-4\ln(2^2)+\frac{1}{2}-5 \\
&= \frac{15}{2}-8\ln(2)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^4 -x+5-\frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{15}{2}-8\ln(2)}$

2. En utilisant l'intégration par parties, calculer l'intégrale : $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^2 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$

Les fonctions polynomiale et exponentielle sont infiniment dérivables, on peut utiliser une intégration par parties.

On pose : $u(x) = x \quad u'(x) = 1$

et $v'(x) = e^{2x} \quad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \mathrm{J} &= \int_0^2 xe^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ \frac{1}{2}xe^{2x}\ \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\ \frac{1}{2}xe^{2x}\ \right]_0^2 - \left[\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}e^{2x}\ \right]_0^2 \\
&= e^4-0-\frac{1}{4}e^4+\frac{1}{4}e^0 \\
&= \frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^2 xe^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}e^4+\frac{1}{4}}$

Exercice 2. (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x(1 - \ln x)$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. **a.** Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$

   b. Calculer les limites de la fonction f en 0, on pourra developper l'expression de f .

   c. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).

   d. Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

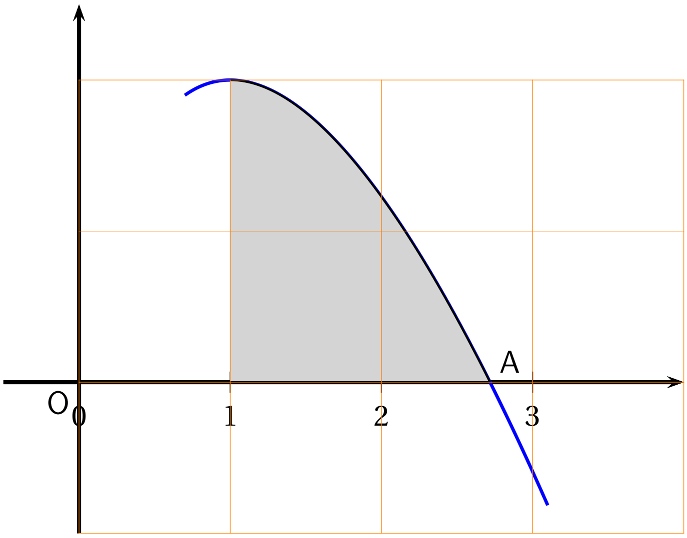
2. Résoudre sur $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.

3. **a.** Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

   b. Montrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = x^2\left(\frac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. On désigne par $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.



   Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{D}$ puis, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction :

Sujet : Baccalauréat ES Polynésie juin 2009

1. **a.** En $+\infty$: on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ d'où finalement par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x(1-\ln x) = -\infty}$

b. En 0 : On a $f(x) = 2x - 2\times x\ln x$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

Alors par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0}$

c. On sait f , définie par $f(x) = 2x(1-\ln x)$, est dérivable sur $x \in]0\ ;\ +\infty[$

On a $f(x) = u(x)\times v(x)$, avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = 1-\ln x$.

D'où $f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) = 2(1-\ln x) + 2x\times\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 2-2\ln x - 2 = -2\ln x$.

Donc $\boxed{f'(x) = -2\ln x}$

d. On sait que si $0 < x < 1$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$;

Si $1 < x$, $\ln x >$, donc $f'(x) < 0$.

D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
Variation de f	$\|\|$ 0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. $f(x) = 0 \iff 2x(1-\ln x) = 0 \iff 1-\ln x = 0$, car sur $]0\ ;\ +\infty[$, $2x > 0$.

Donc $f(x) = 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln \mathrm{e} = \ln x \iff \mathrm{e} = x$.

$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et A(e ; 0)}}$

3. **a.** Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant 0 \iff 2x(1-\ln x) > 0$.

Un produit de facteurs est positif si les deux facteurs sont de même signe ;

or sur $]0\ ;\ +\infty[$, $2x > 0$: les deux facteurs ne peuvent être tous les deux négatifs.

$$\text{Donc } f(x) \geqslant 0 \iff \begin{cases} 2x & > 0 \\ \text{et} & \\ 1-\ln x & > 0 \end{cases} \iff 1 > \ln x \iff \ln \mathrm{e} > \ln x \iff x < \mathrm{e}.$$

Conclusion $\boxed{f(x) > 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}}$

Géométriquement ceci signifie que $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est au dessus de l'axe des abscisses entre O et A}}$

b. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction F , définie par $\mathrm{F}(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$, est dérivable et :

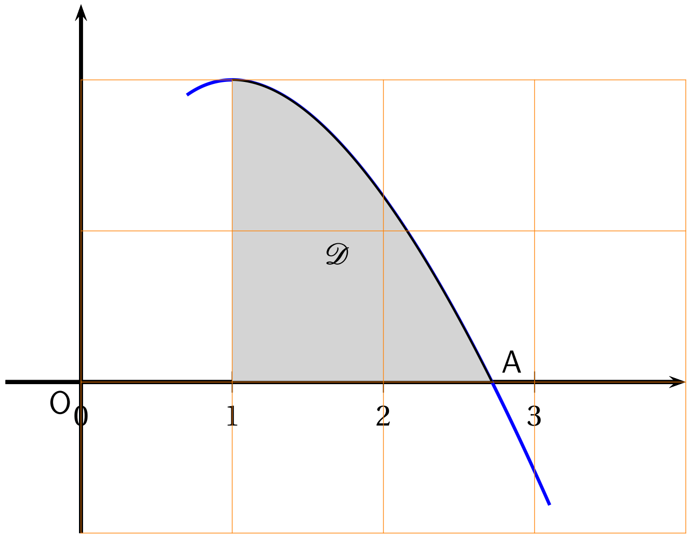
$\mathrm{F}'(x) = 2x\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right) + x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\|nx = 2x(1 - \ln x).$

Donc $\boxed{\text{F est bien une primitive de } f \text{ sur }]0\ ;\ +\infty[}$

c. On a vu à la question précédente que pour $x < \mathrm{e}$, $f(x) > 0$, donc l'aire de la surface $\mathscr{D}$ est égale (en unité d'aire) à l'intégrale :

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{F}(\mathrm{e}) - \mathrm{F}(1) = \mathrm{e}^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln \mathrm{e}\right) - 1\left(\dfrac{3}{2} - \ln 1\right) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 3}{2}.$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 3}{2}.}$



On a $\boxed{\mathscr{A}(\mathscr{D}) \approx 2,19 \text{ u. a.}}$ (ce que confirme approximativement la figure).