Calcul intégral

Un peu d'Histoire...

En mathématiques, l'intégration est le fait de calculer une intégrale. C'est aussi une des deux branches du calcul infinitésimal, appelée également calcul intégral, l'autre étant le calcul différentiel.
Les opérations de mesure de grandeurs (longueur d'une courbe, aire, volume, flux...) et de calcul de probabilités étant souvent soumises à des calculs d'intégrales, l'intégration est un outil scientifique fondamental.
C'est la raison pour laquelle l'intégration est souvent abordée dès l'enseignement secondaire.
Les différents domaines dans lesquels peuvent se rencontrer des intégrales ont conduit à donner des définitions différentes de l'intégrale permettant d'en calculer pour des fonctions de moins en moins régulières.
On rencontre ainsi les intégrales dites de Riemann, de Lebesgue ou de Kurzweil-Henstock. Mais toutes ces définitions coïncident dans le cas des fonctions continues.

Leibniz

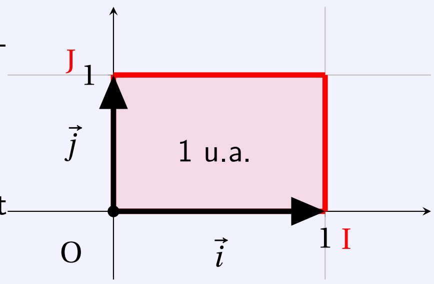
Riemmann

Lebesgue

I Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

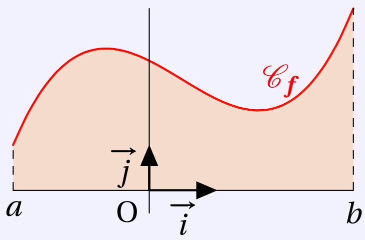
Définition : Unité d'aire

Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un **repère orthogonal** (les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux) du plan.
On note I et J les points tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$.
L'**unité d'aire**, que l'on note **u.a.**, est l'aire du rectangle dont O, I, J sont trois sommets.



Définition : Intégrale de a à b

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.



L'**intégrale de a à b de f** est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Cette aire se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et on prononce « intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,dx$ ».

- a s'appelle la **borne inférieure** de l'intégrale.
- b s'appelle la **borne supérieure** de l'intégrale.

Remarque :

1. La valeur de l'intégrale est ne dépend que de a, b et f. C'est un réel.

   La lettre x est dite *variable muette*. On peut la remplacer par n'importe quelle autre variable.

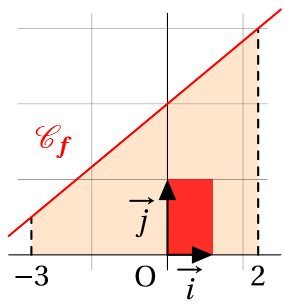
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

2. Pour toute fonction f continue et positive en un réel a, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ puisqu'il s'agit de l'aire d'un segment de hauteur $f(a)$.
3. Le symbole $\displaystyle\int$ est dû à G. W. Leibniz, (1646-1716). Il ressemble à un « s » allongé, rappelant que l'aire peut être calculée comme la somme de petites aires élémentaires.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + 2$ définie sur $[-3;2]$.

Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est :

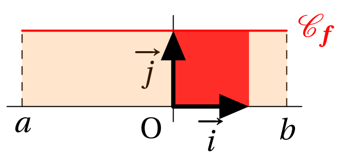
$$\int_{-3}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{0,5+3}{2} \times 5 = 8,75 \text{ u.a.}$$



Les unités graphiques étant $0,6cm$ pour l'axe des abscisses et $1cm$ pour l'axe des ordonnées, 1 u.a. représente $0,6cm^2$ et donc l'aire coloriée représente $5,25cm^2$.

Exemple : Le domaine colorié est un rectangle de longueur $b - a$ et de largeur 1.

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a \text{ u.a.}$$



Théorème : Théorème fondamental de l'analyse pour les fonctions positives

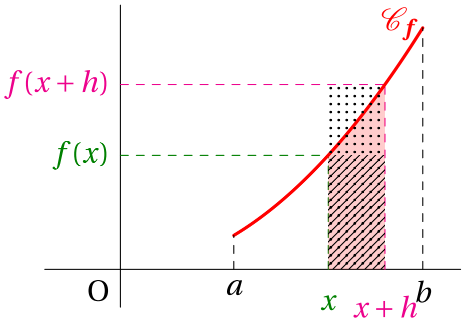
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur $[a;b]$ et on a $\mathrm{F}' = f$.

Démonstration : On démontre ici cette propriété dans le cas d'une fonction f croissante.
Pour tout $x \in [a;b]$, $\mathrm{F}(x)$ existe bien puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;x]$.
Démontrons maintenant que F est dérivable sur $[a;b]$.
On considère alors, pour tous $x \in [a;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a;b]$: $\Psi_x(h) = \dfrac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}$.

- Si $h > 0$

  $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x;x+h]$.
  f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur h et de hauteurs respectives $f(x)$ et $f(x+h)$:

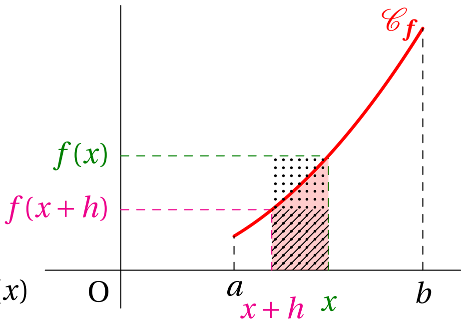
  $$f(x)h \leqslant \mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x) \leqslant f(x+h)h \iff f(x) \leqslant \Psi_x(h) \leqslant f(x+h)$$



- Si $h < 0$

  $\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x+h)$ représente l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[x+h;x]$.
  f étant croissante, cette aire est comprise entre celles des rectangles de largeur $-h$ et de hauteurs respectives $f(x+h)$ et $f(x)$:

  $$f(x+h)(-h) \leqslant \mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x+h) \leqslant f(x)(-h) \iff f(x+h) \leqslant \Psi_x(h) \leqslant f(x)$$



f étant une fonction continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ et dans les deux cas,
d'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{h\to 0} \Psi_x(h) = f(x)$.

Le cas où f est une fonction décroissante pourra être traité en exercice.

II Intégrale d'une fonction continue

Propriété : Calcul pratique d'une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b.$$

Démonstration : Introduisons la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$.

Φ et F étant deux primitives de f sur $[a;b]$, on en déduit d'après le théorème précédent qu'il existe un réel k tel que $\Phi(x) = \mathrm{F}(x) + k$ pour tout $x \in [a;b]$.

Ainsi, $\Phi(b) = \mathrm{F}(b) + k$.

Il nous reste à calculer k : en remarquant que $\Phi(a) = 0$, il vient que $\mathrm{F}(a) = -k$

Ainsi, $\Phi(b) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Exemple : On souhaite calculer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Pour cela, posons $f : x \mapsto x^2$, définie sur $[0;1]$.

$\mathrm{F} : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f sur $[0;1]$, on obtient donc :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Intégrale d'une fonction (cas général)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et de signe quelconque et F une primitive de f sur $[a;b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Exemple : On souhaite calculer $\int_{-1}^2 (x^2-2)\,\mathrm{d}x$. Pour cela, on pose $f : x \mapsto x^2 - 2$ définie sur $\mathrm{I} = [-1;2]$.

Une primitive de f sur I est $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x$ et on obtient alors :

$$\int_{-1}^2 (x^2-2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 2\right) = -3.$$

Remarque :

- Pour toute fonction f continue en a, $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a) = 0$.
- Pour toute fonction f continue sur $[a;b]$, $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

III Propriétés et intégration par parties

Relation de Chasles pour les intégrales

Propriété : Relation de Chasles pour les intégrales

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration : f étant une fonction continue sur I, elle admet une primitive sur cet intervalle.

Notons F une primitive de f sur I.

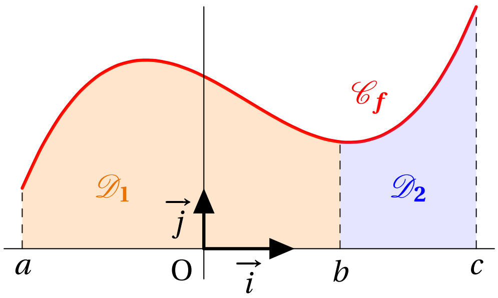
Pour démontrer l'égalité annoncée, calculons séparément chaque membre de l'égalité :

- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a)$ par définition.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a).$

Remarque :

Lorsque f est positive et continue sur $[a;c]$ et que $b \in [a;c]$, la relation de Chasles correspond à l'additivité des aires de deux domaines adjacents :

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} + \mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \mathscr{A}_{\text{totale}}.$$



Linéarité de l'intégrale

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et λ un réel. Alors :

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Inégalités

Propriété : Inégalités

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$. Alors :

- Si f est positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : Les réciproques de ces deux points sont fausses comme le prouvent les exemples suivants.

- $\int_0^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ or, la fonction $x \mapsto x^2-1$ n'est pas positive sur $[0;2]$: l'image de 0 est -1.
- $\int_0^2 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ car $2 \leqslant \frac{8}{3}$ or la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas toujours supérieure à 1 sur $[0;2]$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $a \geqslant 1$, on s'intéresse à l'intégrale $\mathrm{F}(a) = \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

   Une exponentielle étant toujours positive alors $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x d'où pour tout $x \geqslant 1$.

   De plus, si $x \geqslant 1$, alors $x \leqslant x^2 \Leftrightarrow -x \geqslant -x^2$

   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ par croissance de la fonction exponentielle.

   $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant f(x)$

   On en déduit donc que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

2. En déduire que pour tout réel $a \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathrm{F}(a) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

   À partir de l'inégalité obtenue, on utilise (deux fois) le second point de la propriété précédente sur l'intervalle $[1;a]$ et ainsi :

   $$\int_1^a 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^a \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant \mathrm{F}(a) \leqslant \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^a.$$

   Cette dernière quantité est égale à $-\mathrm{e}^{-a}+\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

Intégration par parties

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont leurs dérivées respectives u' et v' sont continues sur I.

Soient a et b deux réels de I.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration : La fonction uv est dérivable sur l'intervalle I avec $(uv)' = u'v + uv'$.

Ainsi $uv' = (uv)' - u'v$.

Puisque (uv'), $(uv)'$ et $u'v$ sont continues sur l'intervalle I,

On en déduit que $\displaystyle\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x) - (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$

Ainsi par linéarité de l'intégration : $\displaystyle\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$

Or uv est une primitive de $(uv)'$ sur l'intervalle I,

On obtient donc : $\displaystyle\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par parties.

On doit calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$

On pose

- $u(x) = \ln(x)$ alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$
- $v'(x) = x$ alors $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned}
\text{Alors } \int_1^4 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2\ln(x)}{2}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2\ln(x)}{2}\right]_1^4 - \left[\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]_1^4 \\
&= \left[\frac{x^2\ln(x)}{2}\right]_1^4 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^4 \\
&= \frac{4^2\ln(4)}{2} - \frac{1^2\ln(1)}{2} - \left(\frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) \\
&= 8\ln(4) - 4 + \frac{1}{4} \\
&= 8\ln(2^2) - \frac{15}{4} = 16\ln(2) - \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

IV Calcul d'aires

Aire dans le cas d'une fonction négative

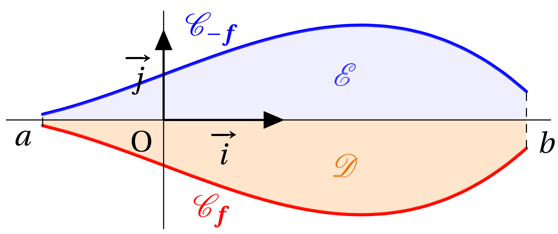
Propriété : Aire dans le cas d'une fonction négative

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$. Alors, l'aire du domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$ est $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration : On note $\mathscr{D}$ le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur $[a;b]$.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{E}$, compris entre la courbe de $-f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;b]$.

Ainsi : $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \mathscr{A}_{\mathscr{E}} = \displaystyle\int_a^b (-f)(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Exemple : Soient $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Pourquoi ne peut-on pas calculer directement I ou J ?

   Aucune des deux fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$ ne correspondent à des dérivées connues et, bien qu'elles soient continues sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on ne peut pas en donner immédiatement des primitives.

2. Calculer $\mathrm{I}+\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}-\mathrm{J}$.

   Par linéarité de l'intégrale, on a :$\mathrm{I}+\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

   De même :$\mathrm{I}-\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

   On reconnaît ici une dérivée de la forme $\dfrac{u'}{u}$, au signe près, puisque la dérivée de la fonction $u : x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$ est $u' : x \mapsto \cos(x)-\sin(x)$.

   Ainsi, étant donné que u est bien positive sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a :$\mathrm{I}-\mathrm{J} = -\Big[\ln(\sin(x)+\cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

3. En déduire les valeurs respectives de I et J.

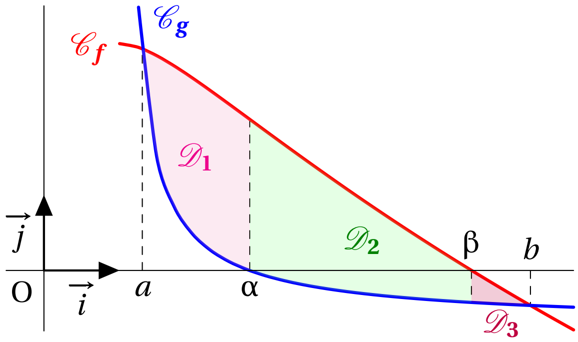
   On doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} \mathrm{I}+\mathrm{J} &= \dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{I}-\mathrm{J} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\mathrm{I} &= \dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{I} &= \mathrm{J} \end{cases} \iff \mathrm{I} = \mathrm{J} = \dfrac{\pi}{4}$

Aire du domaine entre deux courbes

Propriété : Aire du domaine entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Alors, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$ est donnée par $\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration :



Il y a trois cas :

1. les deux fonctions sont positives ;
2. les deux fonctions sont de signes contraires ;
3. les deux fonctions sont négatives.

- Premier cas.

  L'aire de $\mathscr{D}_1$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[a;\alpha]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_1} = \int_a^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\alpha} (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Deuxième cas.

  L'aire de $\mathscr{D}_2$ est la somme de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et de l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\alpha;\beta]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_2} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\beta} (-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Troisième cas.

  L'aire de $\mathscr{D}_3$ est la différence entre l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_g$ et l'axe des abscisses et l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses, sur l'intervalle $[\beta;b]$:

$$\mathscr{A}_{\mathscr{D}_3} = \int_{\beta}^{b} (-g)(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\beta}^{b} (-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\beta}^{b} (f-g)(x)\,\mathrm{d}x.$$

On conclut en utilisant la relation de Chasles, puisque l'aire totale est la somme des aires des trois domaines.

Méthode

1. Commencer par étudier sur I les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ puis décomposer l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $f-g$ garde un signe constant.
2. Sur chaque sous intervalle, calculer, selon les cas, l'intégrale de $f-g$ ou de $g-f$.

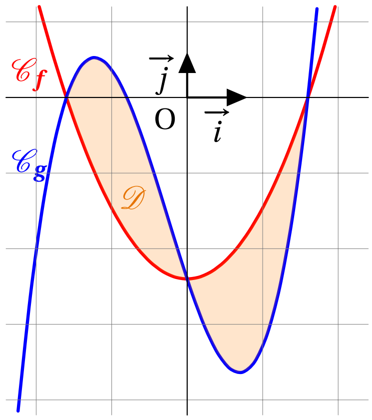
Exemple : Soient $f : x \mapsto x^2-4$ et $g : x \mapsto (x+2)(x-2)(x+1)$ définies sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'aire, en u.a., du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sur l'intervalle $[-2;2]$.

On calcule la différence $f(x)-g(x) = x^2-4-(x+2)(x-2)(x+1)$
et en factorisant, on a $f(x)-g(x) = (x^2-4)(1-x-1) = -x(x^2-4)$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	-2		0		2
x^2-4	0	$-$		$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	0	$-$	0	$+$	0



On décompose donc l'intervalle $\mathrm{I} = [-2;2]$ en deux sous-intervalles $\mathrm{I}_1 = [-2;0]$ et $\mathrm{I}_2 = [0;2]$ sur lesquels on intègre respectivement $g-f$ et $f-g$.

Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x(x^2-4)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} -x(x^2-4)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$.

D'une part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} = \dfrac{(-4)^2}{4} - \dfrac{0^2}{4} = 4$.

D'autre part, $\left[\dfrac{(x^2-4)^2}{4}\right]_{0}^{2} = \dfrac{0^2}{4} - \dfrac{(-4)^2}{4} = -4$.

Ainsi, $\mathscr{A}_{\mathscr{D}} = 8$ u.a.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition : Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

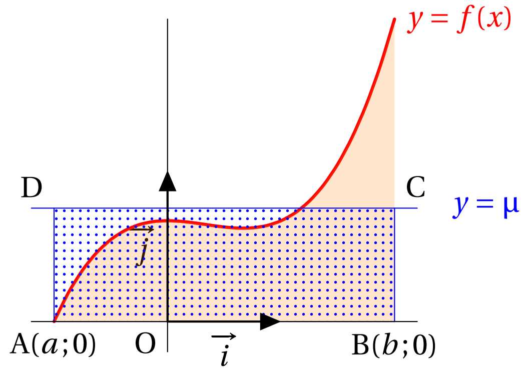
La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque : Dans le cas où f est positive et continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a;b]$.

L'aire du rectangle ABCD est égale, en u.a., à l'aire du domaine coloré car d'après la définition : $\mu(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est donc la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur $[a;b]$.



Exemple : Pour connaître la valeur moyenne de $x \mapsto -x^2+4x$ sur $[0;4]$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4-0}\int_0^4 -x^2+4x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3}+4\times\frac{x^2}{2}\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{4^3}{3}+2\times 4^2-\left(-\frac{0^3}{3}+2\times 0^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{64}{3}+32\right) \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{32}{3} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$