

CHAPITRE 13 Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

Manuel p. 402-437

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre poursuit le travail initié en classe de Première sur les variables aléatoires, notamment sur l'espérance et la variance. Il se décompose en deux parties.

Dans un premier temps sont présentées la notion de somme de variables aléatoires, les propriétés de linéarité de l'espérance et d'additivité de la variance (dans le cas de variables aléatoires indépendantes). Ces résultats permettent la modélisation et la simplification de situations diverses (par exemple lancers d'un très grand nombre de dés). Les exercices proposés peuvent varier de la simple application de formule à la modélisation de problèmes pour obtenir la valeur d'une espérance par exemple. Cette première partie sera aussi l'occasion d'un retour sur la loi binomiale et la découverte des notions d'échantillon de variables aléatoires et de variable aléatoire moyenne.

Le second temps de ce chapitre concerne la découverte et l'utilisation des inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration. Le travail, là aussi varié entre l'application simple de formule et l'analyse de situations plus complexes, porte surtout sur la manipulation d'inégalités afin de minorer ou majorer des probabilités. Enfin, comme conséquence de ces résultats, la loi des grands nombres est (ré)abordée.

On rappelle enfin que la partie sur concentration et loi des grands nombres ne figure pas dans les sections abordables par un sujet de bac d'après le BO du 23 février 2020.

Objectifs

- Travailler avec $X + Y$ ou aX .
- Travailler avec un échantillon.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Utiliser l'inégalité de concentration.
- Comprendre et visualiser la loi des grands nombres.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 403

1. Connaître et utiliser la loi de Bernoulli

- a) 0,32
 b) 0,68
 c) 0,32
 d) $0,32 \times 0,68 = 0,2176$

2. Connaître et utiliser la loi binomiale

a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,25$.

b) $p(X = 6) \approx 0,145$ et $p(X \leq 9) \approx 0,803$.

c) $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0,197$

3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

$$E(X) = \frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{3} \times 7 + \frac{1}{12} \times 12 + \frac{1}{2} \times 20 = 3$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times (-4 - 3)^2 + \frac{1}{3} \times (7 - 3)^2 + \frac{1}{12} \times (12 - 3)^2 + \frac{1}{2} \times (20 - 3)^2 = \frac{182}{3} \approx 60,7$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{182}{3}} \approx 7,8$$

4. Faire une simulation avec Python

```

import random
def jeu() :
    a = random.random()
    if a <= 0.01 :
        k = 45
    if a > 0.01 and a <= 0.05 :
        k = 5
    if a > 0.05 :
        k = -5
    return k
    
```

5. Utiliser une valeur absolue

1. a) $|x - 4| \geq 3$ traduit le fait que la distance entre x et 4 est supérieure ou égale à 3.
- b) $|x - 5| \leq 0,5$ traduit le fait que la distance entre x et 5 est inférieure ou égale à 0,5.
2. a) $2 \leq X \leq 5 \Leftrightarrow |X - 3,5| \leq 1,5$
- b) $X < 1\,000$ ou $x > 1\,500 \Leftrightarrow |X - 1\,250| > 250$.

Activités
 p.404-405

1 Découvrir la linéarité de l'espérance

- **Durée estimée** : 25 min
 - **Objectif** : Découvrir la linéarité de l'espérance sur un exemple simple.
1. X peut prendre les valeurs 5 ou 10 et :

x_i	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y peut prendre les valeurs 5, 2 ou 0 et :

y_i	5	2	0
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

2. $E(X) = 7,5$ et $E(Y) = 2$.
3. a) On gagne $5 + 5 = 10$ euros.
- b) Si on fait 1, on gagne 10 euros.
Si on fait 2, on gagne 15 euros.
Si on fait 3, on gagne 7 euros.
Si on fait 4, on gagne 10 euros.
Si on fait 5, on gagne 5 euros.

Si on fait 6, on gagne 10 euros.
 Z peut prendre les valeurs 15, 10, 7 ou 5 et :

z_i	5	7	10	15
$p(Z = z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c) $E(Z) = 5 \times \frac{1}{6} + \dots + 15 \times \frac{1}{6} = 9,5$

On remarque que $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

4. a) D peut prendre les valeurs 10, 4 ou 0 et :

d_i	10	4	0
$p(D = d_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

On en déduit que $E(D) = 4$.

b) On remarque que $E(D) = 2 \times E(Y)$.

2 Décomposer une variable aléatoire suivant une loi binomiale

- **Durée estimée** : 20 min
- **Objectif** : Au travers d'un exercice de programmation, utiliser la somme de plusieurs variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli.

1.

```

def bernoulli(p) :
    a = random.random()
    if a <= p :
        r = 1
    else :
        r = 0
    return r
    
```

2. ...

3. Les résultats de `bernoulli(p)` à l'intérieur de la boucle sont indépendants et on somme pour obtenir s . Cela revient donc à additionner n (nombres de boucles) valeurs aléatoires identiques suivant une loi $\mathcal{B}[p]$ et indépendantes. X est la variable aléatoire donnant le résultat de s à la fin de l'exécution suit donc une loi binomiale de paramètres n et p .

3 Découvrir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

- **Durée estimée** : 25 min
- **Objectif** : Introduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur un exemple.

A. S'éloigner de l'espérance

1. $E(X) = 0 \times 0,682 + \dots + 25000 \times 10^{-7} = 1,423\ 03$ (on peut aussi utiliser la calculatrice).

2. a) $p(|X - E(X)| \geq 15) = p(|X - 1,423| \geq 15)$
 $= p(X \in]-\infty; -13,577] \cup [16,423; +\infty[)$
 $= p(X \geq 16,423)$ puisque $X \geq 0$ donc
 $p(|X - E(X)| \geq 15) = p(X = 20) + p(X = 100)$
 $+ p(X = 1000) + p(X = 25000) = 0,0127$.

b) De même $p(|X - E(X)| \geq 100)$
 $= p(X = 1000) + p(X = 25\ 000) = 2,7 \times 10^{-6}$.

c) De même $p(|X - E(X)| \geq 10000) = p(X = 25\ 000)$
 $= 7 \times 10^{-7}$.

3. $p(|X - E(X)| \geq \delta)$ se rapproche de 0 quand δ devient grand.

B. Comparer $p(|X - E(X)| \geq \delta)$ et $\frac{V(X)}{\delta^2}$

1. • Pour $\delta = 15$, $\frac{V(X)}{\delta^2} = 2$.

• Pour $\delta = 100$, $\frac{V(X)}{\delta^2} = 0,045$.

• Pour $\delta = 10\ 000$, $\frac{V(X)}{\delta^2} = 4,5 \times 10^{-6}$.

2. Dans ces trois cas, $p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

3. On peut conjecturer que $p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ pour tout δ .

4 Découvrir la loi des grands nombres

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Introduire l'inégalité de concentration sur un exemple.

1. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$ donc $E(X_i) = p = 0,5$ et $V(X_i) = p \times (1 - p) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

2. Pour δ non nul, d'après l'inégalité de concentration, on a $p(|M_n - 0,5| \geq \delta) \leq \frac{0,25}{n \times \delta^2}$.

3. a) Comme $p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{0,25}{n \times 0,1^2} = \frac{25}{n}$,

il suffit de trouver n tel que $\frac{25}{n} \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 2\ 500$.

b) Il suffit de trouver n tel que

$$\frac{25}{n} \leq 0,001 \Leftrightarrow n \geq 25\ 000.$$

c) $0 \leq p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{25}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{n} = 0$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) = 0.$$

d) Il est peu probable que la valeur de M_n ne soit pas dans $]0,4; 0,6[$ après un grand nombre de lancers.

4. $0 \leq p(|M_n - 0,5|) \leq \frac{0,25}{n\delta^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,25}{n\delta^2} = 0$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - 0,5|) = 0.$$

5. a) C'est le nombre de PILE obtenu sur le total de lancers c'est-à-dire la proportion de PILE obtenue.

b) C'est la loi qui dit que quand on réalise un grand nombre de fois (de manière indépendante) une même expérience, la fréquence d'un événement (ici « obtenir PILE ») dans l'échantillon s'approche de la probabilité de cet événement quand on réalise l'expérience (ici 0,5).

À vous de jouer

p. 407

1. a. $E(X + Y) = 3 + 5 = 8$

b. $E(2,5X) = 2,5 \times 3 = 7,5$

c. $V(2X) = 2^2 \times 0,5 = 2$

2. $E(X + Y) = 15 + 15 = 30$ et $V(X + Y) = 1,2 + 0,3 = 1,5$ car X et Y indépendantes.

3. X est la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis par Jean sur ses 10 lancers et Y est la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis par Sophie sur ses 20 lancers.

4. On pose X la variable aléatoire donnant le gain au premier jeu, Y celle au deuxième et Z celle au troisième. Alors $X + Y + Z$ correspond au gain total de Numa.

5. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent toutes une même loi $\mathcal{B}(0,5)$ car la probabilité d'obtenir PILE est 0,5.

$X_1 + X_2 + \dots + X_{40}$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,5$. Elle correspond au nombre de PILE obtenu sur les 40 lancers.

6. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,34$ donc $E(X) = n \times p = 2,72$.

7. $E(X_1) = 12 \times 0,48 = 5,76$

Donc $E(S) = 3E(X_1) = 17,28$.

8. 1.

x_i	1	4	-2
$p(X = x_i)$	0,25	0,25	0,5

2. $E(X) = 0,25$ donc $E(Z) = 15E(X) = 3,75$.

9. 1. a) $p(|P - 32| < 6) = p(|P - 32| \geq 6)$
 $= 1 - p(|P - 32| \geq 6)$

or $p(|P - 32| \geq 6) \leq \frac{9}{6^2} = 0,25$ donc :

$-p(|P - 32| \geq 6) \geq -0,25$ puis $1 - p(|P - 32| \geq 6) \geq 0,75$
 c'est-à-dire $p(|P - 32| < 6) \geq 0,75$.

b) La probabilité que ce médecin voie entre 26 et 38 patient(e)s (exclus) c'est-à-dire entre 27 et 37 patient(e)s est supérieure ou égale à 0,75.

2. $21 = 32 - 9$ et $41 = 32 + 9$ donc on cherche

$p(|P - 32| \geq 9) \text{ or } p(|P - 32| \geq 9) \leq \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$.

10. $1 = 2 - 1$ et $3 = 2 + 1$

On veut donc minorer $p(|I - 2| < 1)$.

$p(|I - 2| < 1) \geq 1 - \frac{0,25}{1^2} = 0,25$.

11. On appelle X_i pour i entier entre 1 et 100 le gain du i -ème joueur. On a alors $\{X_1; X_2; \dots; X_{100}\}$ qui est un échantillon associé à une loi d'espérance 10 et de variance 2 et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$ sa moyenne.

On cherche $p(|M - 10| < 3) \geq 1 - \frac{2}{100 \times 3^2}$ avec

$1 - \frac{2}{100 \times 3^2} \approx 0,998$.

12. Pour tout i entier entre 1 et 30,

$E(X_i) = 20 \times 0,6 = 12$

et $V(X_i) = 20 \times 0,6 \times 0,4 = 4,8$. On a donc

$p(|M - 12|) \geq 4 \leq \frac{4,8}{30 \times 4^2} = 0,01$.

13. Quand sa taille augmente, la moyenne d'un échantillon associé à une loi se rapproche de l'espérance associée à cette loi donc, ici, de :

$0,4 \times 1 + 0,5 \times 10 + 0,1 \times 30 = 8,4$.

14. On peut estimer que $\mu = 50$.

15. 1. Comme il y a 20 000 billes, ce qui est grand, on peut considérer que le prélèvement de 3 billes ne changera pas les probabilités et donc que le prélèvement peut être considéré comme un tirage avec remise de 3 billes.

2. a) La loi de X_1 est donnée par :

$p(X_1 = 1) = 0,7$, $p(X_1 = 2) = 0,25$ et $p(X_1 = 9) = 0,05$.

Les lois de X_2 et X_3 sont considérées identiques.

b) $E(X_1) = 1,65$ donc $E(S) = 3E(X_1) = 4,95$.

$V(X_1) = 3,0275$ donc $V(S) = 3V(X_1) = 9,0825$.

16. 1. On peut avancer l'argument que la production est grande.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de défauts d'une vis prise au hasard. La loi de X est donnée par :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,97	0,02	0,01

On a $E(X) = 0,04$ en posant X_i le nombre de défauts de la i -ème vis de l'échantillon, les X_i sont considérés comme indépendants et de même loi (celle de X).

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{200}$ donc $E(S) = 200E(X) = 8$.

17. 1. $E(R) = 2,5$ et $V(R) = 1,25$.

2. Les lancers étant identiques et indépendants, les variables aléatoires $\{X_1; \dots; X_n\}$ donnant les résultats de n lancers successifs forment un échantillon de variables aléatoires d'espérance 2,5 et de variance 1,25.

Appelons M la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

On cherche à trouver n tel que

$p(|M - 2,5| \geq 0,5) \leq 0,01$

or $p(|M - 2,5| \geq 0,5) \leq \frac{1,25}{n \times 0,5^2} = \frac{5}{n}$ donc une condi-

tion suffisante est

$\frac{5}{n} \leq 0,01 \Leftrightarrow \frac{5}{0,01} \leq n$ c'est-à-dire $n \geq 500$.

18. Les parties étant indépendantes, les variables aléatoires $(X_1 ; \dots ; X_n)$ donnant les nombres de lignes réalisées lors de n parties successives forment un échantillon de variables aléatoires d'espérance 125 et de variance 10

Appelons M la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

On cherche à trouver n tel que

$$p(|M - 125| \geq 5) \leq 0,05$$

or $p(|M - 125| \geq 5) \leq \frac{100}{n \times 5^2} = \frac{4}{n}$ donc une condition suffisante est

$$\frac{4}{n} \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{4}{0,05} \leq n \text{ c'est-à-dire } n \geq 80.$$

Exercices

apprendre à démontrer

p.416

Pour s'entraîner

Soit $p \in]0 ; 1[$.

On va utiliser le raisonnement par récurrence.

Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la propriété $P(n)$: si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$ alors on a $V(X) = np(1 - p)$.

Initialisation : pour $n = 1$, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (car il n'y a qu'une seule répétition).

Alors $V(X) = p(1 - p) = 1 \times p(1 - p)$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit un entier $n \geq 1$. Supposons que la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $V(X) = np(1 - p)$ si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$.

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $V(X) = (n + 1)p(1 - p)$ si X suit $\mathcal{B}(n + 1 ; p)$.

Soit Y une variable aléatoire qui suit $\mathcal{B}(n + 1 ; p)$.

Y peut-être décomposée sous en une somme de variables aléatoires indépendantes $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n + X_{n+1}$ où chacun des X_i suit la loi $\mathcal{B}(p)$.

Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit $\mathcal{B}(n ; p)$ donc

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np(1 - p).$$

De plus $V(Y) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n + X_{n+1}) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + V(X_{n+1})$ car d'après le prérequis $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

Donc $V(Y) = np(1 - p) + p(1 - p)$ car X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Donc $E(Y) = (n + 1)p(1 - p)$ en factorisant.

Conclusion : on en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. Par récurrence, si X suit $\mathcal{B}(n ; p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 417

19. Espérance d'une somme (1)

Non.

20. Espérance d'une somme (2)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\Leftrightarrow E(Y) = E(X + Y) - E(X)$$

$$= 0,45 - 3 = -2,55$$

21. Espérance d'une somme (3)

$$b) \{0,2 + 10 \times 0,1\}$$

22. Linéarité d'une espérance

$$2E(X) + 3E(Y)$$

23. Variance d'une somme (1)

X et Y doivent être indépendantes.

24. Variance d'une somme (2)

d) Il n'est pas précisé que les variables aléatoires sont indépendantes.

25. Variance d'une somme (3)

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \Leftrightarrow V(Y) = V(X + Y) - V(X)$$

$$= 15,26 - 13,23 = 3,03$$

26. Écart-type d'une somme

$$c) \{V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 2 \text{ donc}$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{2}\}$$

27. Somme de variables aléatoires (1)

Faux son espérance est $10 \times 0,6 = 6$.

28. Somme de variables aléatoires (2)

$$\text{Faux } \sqrt{5 \times 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

29. Échantillon

$$a) V(M_n) = \frac{1,25}{n} \text{ donc sa limite est } 0.$$

30. Loi des grands nombres

a)

31. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et écart-type

c) $V = 5^2 = 25$ et $\delta = 10$ donc $\frac{V}{\delta^2} = 0,25$.

32. Loi des grands nombres

-2,3 environ.

33. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$p(|X - 20| < 6) \geq 1 - \frac{9}{6^2} = 0,75$

34. Inégalité de concentration

Cette probabilité est majorée par

$\frac{V}{n\delta^2} = \frac{4}{100 \times 5^2} = 0,0016$.

Exercices d'application

p. 418-423

Calculer l'espérance

et la variance de $X + Y$ ou aY

35. a) $E(X + Y) = 7$

b) $E(3X) = 6$

c) $E(-2Y) = -10$

36. 1. a) $E(X + Y) = 1560$

b) $E(4X) = 6000$

c) $E(3Y) = 180$

2. $E(4X + 3Y) = 6180$

37. a) $E(X + Y) = -1$

b) $E(2X + 5Y) = -2$

c) $E(2X + 10) = 2E(X) + 10 = 8$

d) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ car X et Y indépendantes donc $V(X + Y) = 2,5$.

e) $V(3X) = 3^2 V(X) = 18$

f) $V(nY) = n^2 V(Y) = 0,5n^2$.

38. 1. On calcule d'abord

$E(X) = 0,5 \times (-2) + \dots + 0,1 \times 4 = 0$.

De même $E(Y) = 0,5$.

Donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0,5$.

2. On calcule d'abord

$V(X) = 0,5 \times (-2 - 0)^2 + \dots + 0,1 \times (4 - 0)^2 = 5,4$.

De même $V(Y) = 108,75$.

Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 114,15$ car X et Y indépendantes.

3. On en déduit $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} \approx 10,68$.

39. D'après l'énoncé $E(X) = 0,6$,

$V(X) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$, $E(Y) = 0,33$ et

$V(Y) = 0,33 \times 0,67 = 0,2211$.

a) $E(X + Y) = 0,93$

b) $V(X + Y) = 0,4611$ car X et Y indépendantes.

c) $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0,27$

40. D'après l'énoncé, $E(X) = np = 5$,

$V(X) = np(1 - p) = 2,5$.

De même $E(Y) = 4,2$ et $V(Y) = 2,436$.

$E(X + Y) = 9,2$

$V(X + Y) = 4,936$ car X et Y indépendantes.

$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} \approx 2,22$

41. 1. a) La seule valeur que peut prendre Y est 6 et la loi de Y est donnée par $p(Y = 6) = 1$.

b) $E(Y) = 6$ et $V(Y) = 1 \times (6 - 6)^2 = 0$.

2. $E(X + Y) = 9$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = V(X) = 0,5$ car X et Y indépendantes et $V(Y) = 0$.

42. 1. Y peut prendre les valeurs -15, 0, 60 ou 150.

2. $E(Y) = 3E(X) = -11,73$.

3. $V(Y) = 3^2 V(X) = 9 \times 2,83^2 = 72,0801$

Donc $\sigma(Y) = 8,49$.

4. Z peut prendre les valeurs -3, 2, 22 ou 52.

$E(Z) = E(X) + 2 = -1,91$

$V(Z) = V(X) = 2,83^2$

Donc $\sigma(Z) = 2,83$.

43. 1. $E(X) = 0,25 \times 10 + 0,25 \times 1 + 0,25 \times (-2) + 0,25 \times (-4) = 1,25$.

En jouant un grand nombre de partie on peut espérer gagner en moyenne 1,25 euros.

$$V(X) = 0,25 \times (10 - 1,25)^2 + \dots + 0,25 \times (-4 - 1,25)^2 = 28,6875$$

2. a) $Z = 2X$

b) $E(Z) = 2E(X) = 2,5$

$$V(Z) = 2^2 V(X) = 114,75$$

3. a) $Y = X + 1$

b) $E(Y) = E(X) + 1 = 2,25$ et $V(Y) = V(X) = 28,6875$ donc $\sigma(Y) \approx 5,36$.

Modéliser avec une somme de variables aléatoires

44. X est la variable aléatoire donnant le résultat du dé tétraédrique et Y est la variable aléatoire donnant le résultat du dé cubique.

45. On pose X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée au hasard dans l'urne et Y la variable aléatoire donnant le nombre obtenu après le lancer de la pièce.

46. $Z = X_1 + X_2 + X_3$ où X_i donne le gain algébrique pour la carte obtenue en i -ème position.

La loi des X_i est donnée dans le tableau suivant :

x_i	7	4	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{9}{13}$

Alors $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{10}{13}$.

Donc $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{30}{13}$.

47. 1. $X + Y$ correspond au temps total de trajet en minutes de Myriam dans les bus.

2. $E(X) = 7,5$ et $E(Y) = 6$.

3. $E(X + Y) = 13,5$. En moyenne, Myriam passera 13 min 30 s dans le bus pour aller au lycée.

48. 1. X suit une loi $\mathcal{B}(30; 0,46)$ car elle répète de manière identique et indépendante 30 fois une même épreuve de Bernoulli dont le succès est de marquer un jet de 7 mètres (de probabilité 0,46). De même Y suit $\mathcal{B}(50; 0,78)$.

2. $X + Y$ correspond au nombre de jets de 7 mètres marqués au total sur la journée.

3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 30 \times 0,46 + 50 \times 0,78 = 52,8$

Sur un grand nombre de journées d'entraînement, Elia peut espérer en moyenne marquer 52,8 jets de 7 mètres sur les 80 jets.

Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $\mathcal{B}(p)$

49. a) $n = 15$ et $p = 0,6$.

b) $n = 25$ et $p = 0,12$.

c) $n = 150$ et $p = 0,999$.

d) $n = 1\,000$ et $p = 0,2$.

50. a) Une loi $\mathcal{B}(0,23)$.

b) Une loi $\mathcal{B}(0,7)$.

51. $E(X) = np$ avec $p = \frac{3}{4}$ et $E(X) = 60$.

On a donc $n = \frac{60}{\frac{3}{4}} = 80$.

52. 1. D'après l'énoncé, chacun des X_i suit une loi $\mathcal{B}(0,1)$. De plus les X_i sont indépendants car les 10 lancers sont indépendants.

Donc la somme X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

2. $E(X) = np = 10 \times 0,1 = 1$ et

$$V(X) = np(1 - p) = 10 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9.$$

53. 1. En posant Z_i la variable aléatoire donnant 1 si le résultat du dé lu en i -ème position est 4 ou 0 sinon, on a $Z = Z_1 + \dots + Z_{30}$.

Chacun des Z_i suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

2. $E(Z_1) = E(Z_2) = \dots = E(Z_{30}) = \frac{1}{6}$.

Donc $E(Z) = 30E(Z_1) = 5$. Sur un très grand nombre de lancers de 30 dés, on peut espérer en moyenne obtenir 5 dés qui tombent sur 4.

On pouvait également dire que Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{1}{6}$ pour en déduire que $E(Z) = np = 5$.

54. 1. En posant Y_i la variable aléatoire donnant 1 si la pièce du test numéro i n'a pas résisté et 0 sinon.

Les tests sont indépendants donc les Y_i le sont aussi. On a alors $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{30}$ et la loi des Y_i est la loi $\mathcal{B}(0, 05)$.

2. Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,05$. Ainsi $E(Y) = np = 1,5$.

55. 1. La loi $\mathcal{B}(0, 452)$.

$$2. E\left(\frac{X}{1000}\right) = \frac{1}{1000}E(X) = \frac{1}{1000} \times 1000 \times 0,452 = 0,452$$

$$V\left(\frac{X}{1000}\right) = \frac{1}{1000^2}V(X) = \frac{1}{10^6} \times 1000 \times 0,452 \times (1 - 0,452) = 2,48 \times 10^{-4}$$

Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi

56. 1. En posant X_i la variable aléatoire donnant le résultat du dé lu en i -ème position, on a $X = X_1 + \dots + X_{100}$.

La loi des X_i est donnée dans le tableau suivant :

y_i	1	2	3	4	5	6
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On a $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_{100}) = 100E(X_1)$.

$$\text{Or } E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5.$$

Donc $E(X) = 350$.

Cela signifie que sur un très grand nombre de lancers de 100 dés, on obtient en moyenne une somme proche de 350.

57. $E(S) = 20E(X_1)$ les variables aléatoires X_i suivants toutes la même loi.

Or $E(X_1) = 12 \times 0,3 = 3,6$ donc $E(S) = 72$.

$V(S) = 20V(X_1)$ les variables aléatoires X_i suivants toutes la même loi et étant indépendantes.

Or $V(X_1) = 12 \times 0,3 \times 0,7 = 2,52$.

Donc $V(S) = 20 \times 2,52 = 50,4$.

58. Soit X_i la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes mal cuites dans la boulangerie numéro i (pour i entre 1 et 10).

Les X_i sont indépendants et suivent toutes la loi $\mathcal{B}(50; 0,03)$: $(X_1; X_2; \dots; X_{10})$ forment un échantillon de variables aléatoires.

On a $E(X_i) = np = 1,5$ et $V(X_i) = np(1 - p) = 1,455$.

Donc $E(Z) = 10E(X_i) = 15$ et

$V(Z) = 10V(X_i) = 14,55$ donc $\sigma(Z) \approx 3,81$.

59. 1. Soit X_i la variable aléatoire donnant le nombre de tartines mangées le jour de la semaine numéro i (pour i entre 1 et 7).

Les X_i sont indépendants et suivent toutes une même loi dont la loi est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,25	0,62	0,13

La somme $X_1 + \dots + X_7 = S$ donne le nombre de tartines mangées par Carmen au cours d'une semaine.

2. $(X_1; X_2; \dots; X_7)$ forment un échantillon de variables aléatoires.

On a $E(X_i) = 1,88$ et $V(X_i) = 0,3656$.

Donc $E(S) = 7E(X_i) = 13,16$ et $V(S) = 7V(X_i) = 2,5592$ donc $\sigma(S) \approx 1,60$.

60. $E(S_{50}) = 50E(X) = 50(6 \times 0,579) = 173,7$

$V(S_{50}) = 50V(X) = 50(6 \times 0,579 \times (1 - 0,579)) \approx 73,13$

$E(M_{50}) = E(X) = 6 \times 0,579 \approx 3,47$

$$V(M_{50}) = \frac{V(X)}{50} = \frac{6 \times 0,579 \times (1 - 0,579)}{50} = 0,03$$

61. $E(S_n) = nE(X) = 5,6n$

$$V(S_n) = nV(X) = n \times \frac{1}{16} = \frac{n}{16}$$

$E(M_n) = E(X) = 5,6$

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{16n}$$

Manipulations de variables aléatoires et d'inégalités

62. 1. $I =]7; 17[$

2. $J =]-\infty; -2[$ et $K = [8; +\infty[$.

63. a) $|Y - 5| < 5$

b) $|Y - 48| \leq 3$

c) $|Y - 13| > 1$

d) $|Y - 9| \geq 7$

64. 0,8 (événement contraire)

65. 0,65 (événement contraire)

66. 0,28 (événement contraire)

67. $p(|B - 8| \geq 3) = \overline{p(|B - 8| < 3)} = 1 - p(|B - 8| < 3)$
donc
 $p(|B - 8| \geq 3) \leq 0,36 \Leftrightarrow 1 - p(|B - 8| < 3) \leq 0,36$
 $\Leftrightarrow p(|B - 8| < 3) \geq 0,64.$

68. $p(|C - 4| \geq 3) < 0,02$

69. $p(|B + 12| < 2) \geq 0,89$

70. 1. $p(|Z - 10| \leq 3) = p(Z \in [7; 13])$
 $= 0,25 + 0,3 = 0,55$

2. 0,45

71. $p(|A - 10| < 3) = p(A \in]7; 13[) = 0,4$ et
 $p(|A - 8| < 1) = p(A \in]7; 9[) = 0,15.$

On a donc

$p(|A - 11| < 2) = p(A \in]9; 13[) = 0,4 - 0,15 - 0 = 0,25.$

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

72. 1. a) $p(|F - 165| \geq 8) \leq \frac{25}{8^2}$ avec $\frac{25}{8^2} \approx 0,39.$

b) $p(|F - 165| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2}$ avec $\frac{25}{10^2} = 0,25.$

2. $p(|H - 180| \geq 10) \leq \frac{36}{10^2}$ avec $\frac{36}{10^2} = 0,36$: la probabilité qu'un homme pris au hasard dans cette population mesure 1,70 m ou moins, ou 1,90 m ou plus, est inférieure à 0,36.

73. 1. a) $p(|C - 150| \geq 60) \leq \frac{900}{60^2}$ avec $\frac{900}{60^2} = 0,25.$

b) La probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population consomme 90 litres ou moins, ou 210 litres ou plus est inférieure à 0,25.

2. $p(|C - 150| < 90) \geq 1 - \frac{900}{90^2}$ avec $1 - \frac{900}{90^2} \approx 0,89$
donc $p(|C - 150| < 90) > 0,85.$

74. 1. $p(|M - 50| < 20) \geq 1 - \frac{10^2}{20^2}$ avec $1 - \frac{10^2}{20^2} = 0,75$
ou plus directement $p(|M - E(M)| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2}$

avec $1 - \frac{1^2}{2^2} = 0,75.$

2. a) $p(|M - 50| \geq 40) \leq \frac{10^2}{40^2}$ avec $\frac{10^2}{40^2} = 0,0625.$

Remarque : On peut aussi remarquer que $40 = 4\sigma(M).$

b) $p(M \geq 90) = p(|M - 50| \geq 40) - p(M \leq 10) \leq 0,0525$

75. Soit F le nombre de feuilles utilisées par Lycia.
On cherche $p(F \in [1\,000; 1\,500]) = p(F \in]999; 1501[)$
 $= p(|F - 1\,250| < 251).$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$p(|F - 1\,250| < 251) \geq 1 - \frac{80^2}{251^2}$ avec $1 - \frac{80^2}{251^2} \approx 0,898$

donc elle ne peut pas en être sûre au seuil de 90 % (mais c'en est assez proche néanmoins).

76.1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = 0,2.$

2. a) « ... si $|X - 9| \geq 3$ ».

b) On sait que $E(X) = 45 \times 0,2 = 9$ et
 $V(X) = 42 \times 0,2 \times 0,8 = 7,2.$

On a donc $p(|X - 9| \geq 3) \leq \frac{7,2}{3^2}$ avec $\frac{7,2}{3^2} = 0,8$

c'est-à-dire qu'il y a au plus 80 % de chance que la quantité de nourriture prévue ne soit pas adaptée ce qui ne donne pas une information très intéressante.

c) $|X - 9| \geq 3$ et $7 \leq X \leq 11$ sont les mêmes événements.

La calculatrice donne $p(7 \leq X \leq 11) \approx 0,35$ donc la majoration trouvée à la question 2. b) n'est pas très bonne.

77. 1. M suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6.$

2. a) On sait que $E(M) = 20 \times 0,6 = 12$ et
 $V(M) = 20 \times 0,6 \times 0,4 = 4,8.$

On cherche $p(|M - 12| < 3) \geq 1 - \frac{4,8}{3^2}$ avec

$$1 - \frac{4,8}{3^2} \approx 0,47.$$

b) $p(9 < M < 15) \approx 0,75$ donc la minoration obtenue à la question **2. a)** n'est pas très bonne.

78. 1. $p(|D - 1000| \geq 100) \leq \frac{100^2}{100^2} = 1$ ce que l'on sait déjà puisqu'une probabilité est comprise entre 0 et 1.

2. $p(|D - 1000| < 250) \geq 1 - \frac{100^2}{250^2}$ avec $1 - \frac{100^2}{250^2} = 0,84$ donc Ben a au moins 84 % de chance d'avoir raison ce qui ne semble pas très risqué.

Somme des variables aléatoires et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

79. 1. $E(G) = 0,55$ et $V(G) = 0,9975$.

2. a) $p(|G - 0,55| \geq 2,45) \leq \frac{0,9975}{2,45^2}$ avec

$$\frac{0,9975}{2,45^2} \approx 0,17.$$

b) L'événement $|G - 0,55| \geq 2,45$ est l'événement $G \in]-\infty; -1,9] \cup [3; +\infty[= [3; +\infty[$ puisque le gain est positif.

La probabilité de gagner plus de 3 jetons est donc inférieure à 0,17 environ.

80. 1. $E(T) = 300$ et $V(T) = 8^2 + 8^2 = 128$.

2. a) On doit avoir $|T - 300| < 30$.

b) $p(|T - 300| < 30) \geq 1 - \frac{128}{30^2}$ avec $1 - \frac{128}{30^2} \approx 0,86$

donc cette probabilité est relativement élevée.

81. 1. $E(A) = 5$ et $V(A) = 0,15^2 + 0,1^2 = 0,0325$.

2. $p(|A - 5| < 0,6) \geq 1 - \frac{0,0325}{0,6^2}$ avec $1 - \frac{0,0325}{0,6^2} \approx 0,91$

donc il est très probable que la montre soit équilibrée.

Utiliser l'inégalité de concentration

82. 1. Soit $X_1, X_2, \dots, X_{35}$ les variables aléatoires donnant les résultats des 35 mesures de même

loi que X et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{35}}{35}$.

$$p(|M - 9,5| \geq 0,5) \leq \frac{0,04}{35 \times 0,5^2} \text{ avec } \frac{0,04}{35 \times 0,5^2} \approx 0,005.$$

2. a) $p(|M - 9,5| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,04}{35 \times 0,2^2}$ avec

$$1 - \frac{0,04}{35 \times 0,2^2} \approx 0,97.$$

b) On est sûr au seuil de 97 % que la moyenne des mesures réalisées sera comprise strictement entre 9,3 et 9,7 cm.

83. 1. $E(B) = 0,91$ et $V(B) = 0,9019$.

2. a) $p(|M - 0,91| \geq 1,09) \leq \frac{0,9019}{50 \times 1,09^2}$ avec

$$\frac{0,9019}{50 \times 1,09^2} \approx 0,015.$$

b) Cela veut dire que la probabilité que le nombre de buts marqués en moyenne par match sur cette saison soit inférieur à -0,18 ou supérieur à 2 c'est-à-dire soit supérieur à 2 est inférieure ou égale à 0,015 environ.

84. 1. $E(X_j) = 2\,500 \times 0,6 = 1\,500$ et

$$V(X_j) = 2\,500 \times 0,6 \times 0,4 = 600.$$

2. a) $p(M \notin]1\,400; 1\,600]) = p(|M - 1500| < 100)$

$$= p(|M - 1500| \geq 100) \leq \frac{600}{200 \times 100^2} \text{ avec}$$

$$\frac{600}{200 \times 100^2} = 0,0003.$$

b) La probabilité qu'il n'y ait pas entre 1 400 et 1 600 (exclus) logements ayant du courrier en moyenne sur les 200 tournées est inférieure ou égale à 0,0003.

85. 1. $E(X) = 1,088$ et $V(X) = 1,304256$.

2. a) On appelle X_i , pour i entier entre 1 et 1 700 le nombre de points marqués au i -ème tir et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{1700}}{1700}$ la moyenne des points par tir.

Les événements $M \in [0; 1] \cup [1,176; 3]$ et

$M \in]-\infty; 1] \cup [1,176; +\infty[$ sont identiques puisqu'on marque au minimum 0 point et au maximum 3 points.

On cherche donc

$$p(|M - 1,088| \geq 0,088) \leq \frac{1,304256}{1700 \times 0,088^2} \text{ avec}$$

$$\frac{1,304256}{1700 \times 0,088^2} \approx 0,1.$$

b) Il y a donc moins de 10 % de chance qu'il marque 1 700 points ou moins, ou 2 000 points ou plus sur ces 1 700 tirs ($1\,700 \times 1,176 = 1\,999,2$).

86. 1. $E(G) = -1,5$ et $V(G) = 2,35$.

2. Soit $G_1, G_2, \dots, G_{1000}$ les gains algébriques de ces

1 000 personnes et $M = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_{1000}}{1000}$ leur gain moyen.

$$p(M \in]-1,7; -1,3[)$$

$$= p(|M + 1,5| < 0,2) \geq 1 - \frac{2,35}{1000 \times 0,2^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{2,35}{1000 \times 0,2^2} = 0,94125.$$

3. Le gain de l'organisateur correspond à l'opposé de la perte des joueurs donc l'organisateur a raison si $1\,000M \in]-1\,700; -1\,300[\Leftrightarrow M \in]-1,7; -1,3[$ dont on sait qu'il est réalisé avec une probabilité de $0,94125 > 0,9$ donc il a raison.

87. 1. $E(E) = 0,5$ et $V(E) = 0,25$.

2. C'est la proportion de filles dans les 2 180 000 naissances.

3. $p(M \in]0,49; 0,51[) = p(|M - 0,5| < 0,01)$

$$\geq 1 - \frac{0,25}{2\,180\,000 \times 0,01^2} \text{ avec}$$

$$1 - \frac{0,25}{2\,180\,000 \times 0,01^2} \approx 0,999.$$

4. Si la probabilité qu'un enfant soit une fille à la naissance était réellement de 0,5 alors, la probabilité que la proportion de filles soit entre 0,49 et 0,51 dans un échantillon de 2,18 millions d'enfants serait supérieure à environ 0,999 (c'est-à-dire extrêmement élevée). Comme ce n'est pas le cas dans cet échantillon des naissances en France entre 2016 et 2018, on peut penser que la probabilité qu'un enfant soit une fille à la naissance n'est pas 0,5.

$$\mathbf{88. 1. a)} M = \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_{500}}{500}$$

b) $p(M \in]21,5; 22,5[)$

$$= p(|M - 22| < 0,5) \geq 1 - \frac{0,4^2}{500 \times 0,5^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{0,4^2}{500 \times 0,5^2} = 0,99872.$$

2. L'avion ne contient pas d'autres bagages que ceux de ses passagers ou ne contient pas tous les bagages de ses passagers si la masse totale de bagage des passagers est inférieure ou égale à 10 500 kg ou supérieure ou égale à 11 500 kg c'est-à-dire si $M \in]-\infty; 21] \cup [23; +\infty[$.

$$\text{On a } p(|M - 22| \geq 1) \leq \frac{0,4^2}{500 \times 1^2} \text{ avec}$$

$$\frac{0,4^2}{500 \times 1^2} = 0,00032.$$

Utiliser la loi des grands nombres

89. La moyenne va se rapprocher de $E(G) = -1$.

90. $E(X_i) \approx 1,5$

91. $E(X_i) \approx 12,5$ d'après le graphique et la loi des grands nombres or $E(A) = 13$ et $E(B) = 8,75$ donc les X_i suivent la même loi que A.

92. Le nuage de points bleus car c'est celui pour lequel la moyenne de buts par matchs semble se rapprocher de l'espérance 0,64.

93. 1. Une liste donnant un échantillon de taille n associé à X .

2. Ces instructions renvoient la moyenne de deux échantillons de tailles 1 000 et 10 000 donc une valeur proche de $E(X)$ qui est donc proche de 2,1.

Exercices d'entraînement p. 424-427

Problèmes et variables aléatoires

94. 1. On répète 25 fois de manière identique et indépendante une même expérience de Bernoulli (le succès est une bonne réponse de probabilité 0,2).

X compte les succès donc X suit $\mathcal{B}(25; 0,2)$.

2. a) $Y = 25 - X$

b) $E(X) = np = 5$ donc $E(Y) = E(25 - X) = 25 - E(X) = 20$.

3. a) $Z = 2X - 0,5Y$

b) On calcule

$$E(Z) = 2E(X) - 0,5E(Y) = 2 \times 5 - 0,5 \times 20 = 0.$$

Sur un grand nombre de tels QCM, la moyenne de Tess est 0 point.

95. 1. $200 + 10 \times 12 = 320$ euros au maximum sur l'année.

2. a) X suit $\mathcal{B}(12; 0,5)$.

b) $Y = 200 + 10X$

c) $E(Y) = 200 + 10E(X) = 260$ car $E(X) = np = 6$.

3. Pour cela, il faudrait que son père ait fait 5 PILE ou plus l'an dernier donc que $X \geq 5$.

$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx 0,806$: c'est la probabilité que Lubin ait touché au moins 250 euros l'an dernier.

96. 1.

```

def jeu() :
    a = random.random()
    if a <= 0,028 :
        r = 55
    if a <= 0,17 and a > 0,028 :
        r = 5
    if a <= 0,37 and a > 0,17 :
        r = 1
    if a > 0,37 :
        r = -5
    return r
  
```

2. On peut écrire `[jeu() for i in range(5)]` par exemple.

3. a) On a $E(X) = -0,7$.

Donc $E(S) = 5E(X) = -3,5$.

b) En moyenne, lorsqu'il joue un grand nombre de fois 5 parties, Thomas perd 3,50 euros.

c) $V(X) = 103,71$

On en déduit que $V(S) = 5V(X) = 518,55$ puis que $\sigma(S) \approx 22,8$.

97. 1. $E(M_n) = E(X) = 0,65$

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{3,7275}{n}$$

2. On résout $\frac{3,7275}{n} < 0,5$ $\frac{3,7275}{0,5} < n$ car n et

0,5 positifs. Il faut prendre $n \geq 8$ soit à partir de $n = 8$.

98. 1. On peut poser $Z = X_1 + X_2 + X_3$ où X_i est le gain lors du tirage i .

La loi de X_i est donnée par :

x_{1i}	0	2	3
$p(X_1 = x_{1i})$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$

(on a $E(X_1) = \frac{29}{15}$).

La loi de X_2 est donnée par :

x_{2i}	-5	-2	0
$p(X_2 = x_{2i})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$

(on a $E(X_2) = -\frac{31}{15}$).

La loi de X_3 est donnée par :

x_{3i}	0	10
$p(X_3 = x_{3i})$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

(on a $E(X_3) = 2$).

2. On a $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{29}{15} - \frac{31}{15} + 2 = \frac{28}{15}$.

Sur un grand nombre de parties, on peut espérer gagner en moyenne environ 1,87 euros.

3. a) S_n représente le gain total sur n parties.

b) $E(S_n) = nE(Z) = \frac{28}{15}n$

c) On veut $E(S_n) > 100 \Leftrightarrow \frac{28}{15}n > 100 \Leftrightarrow n > \frac{375}{7}$.

Il faut jouer 54 fois pour espérer remporter plus de 100 euros.

99. 1.

z_i	$z_1 = ax_1$	$z_2 = ax_2$	...	$z_n = ax_n$
$p(Z = z_i)$	p_1	p_2	...	p_n

2. $E(Z) = p_1 \times z_1 + p_2 \times z_2 + \dots + p_n \times z_n$
 $= ax_1 p_1 + ax_2 p_2 + \dots + ax_n p_n$
 $= a(p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n)$
 $= aE(X)$

donc $E(ax) = aE(X)$.

3. $V(Z) = p_1 \times (z_1 - E(Z))^2 + p_2 \times (z_2 - E(Z))^2 + \dots$
 $+ p_n \times (z_n - E(Z))^2$
 $= p_1 \times (ax_1 - aE(X))^2 + p_2 \times (ax_2 - aE(X))^2 + \dots$
 $+ p_n \times (ax_n - aE(X))^2$ car $E(Z) = aE(X)$

$$= a^2 \{x_1 - E(X)\}^2 p_1 + a^2 \{x_2 - E(X)\}^2 p_2 + \dots + a^2 \{x_n - E(X)\}^2 p_n$$

$$= a^2 \{p_1 \times \{x_1 - E(X)\}^2 + p_2 \times \{x_2 - E(X)\}^2 + \dots$$

$$+ p_n \times \{x_n - E(X)\}^2\} = a^2 V(X)$$

donc $V(aX) = a^2 V(X)$.

100.

```
import math
e=float(input("entrer l'espérance de X"))
s=float(input("entrer l'écart-type de X"))
n=int(input("entrer n la taille de l'échantillon"))
print("l'espérance de Mn vaut :", e)
s1=math.sqrt((s**2)/n)
print("l'écart-type de la moyenne de l'échantillon est :", s1)
```

101. On a $V(M_n) = \frac{21,25^2}{n} = \frac{451,5625}{n}$.

Donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{451,5625}{n}}$.

On veut donc $\sqrt{\frac{451,5625}{n}} \leq 1$

$\frac{21,25}{\sqrt{n}} \leq 1$ donc $21,25 \leq \sqrt{n}$ et $451,5625 \leq n$

Il faut donc choisir $n \geq 452$.

102. 1. a) Pour $m = 2$ et $t = 3$ on a $E(X) = 0,75$ et $E(Y) = -0,9$.

Donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = -0,15$.

De plus $V(X) = 0,6875$ et $V(Y) = 6,69$.

Les jeux sont consécutifs et indépendants donc X et Y sont indépendantes.

Ainsi $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et donc

$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)} \approx 2,72$.

b) Non car $E(X + Y) < 0$.

2. a) Il faut que $E(X + Y) > 0$.

Or $E(X) = \frac{1+m}{4}$ et $E(Y) = -\frac{6}{5} + \frac{t}{10}$.

Il faut donc $\frac{1+m}{4} - \frac{6}{5} + \frac{t}{10} > 0$

$\Leftrightarrow 5 + 5m - 24 + 2t > 0 \Leftrightarrow 5m + 2t > 19$ pour que le jeu soit avantageux.

b) Par exemple $(2; 1); (2; 2); (3; 1); (2; 3)$.

103. 1. a) On répète 8 fois de manière identique et indépendante une même expérience de Bernoulli qui consiste à transmettre un bit (le succès est que le bit est mal transmis, de probabilité 0,002).

X suit la loi $\mathcal{B}(8; 0,002)$.

b) $E(X) = np = 0,016$ et

$V(X) = np(1 - p) = 0,015968$ et donc $\sigma(X) \approx 0,126$.

2. a) S correspond au nombre de bits mal transmis sur un échantillon d'un million d'octets.

b) 1 Mo = 1 million d'octets. Donc il s'agit de $E(S) = 10^6 \times E(X) = 16\,000$: 16 000 bits incorrects sur 1 Mo.

c) $E(M) = E(X) = 0,016$ et $V(M) = \frac{V(X)}{10^6}$

donc $\sigma(M) = \frac{\sigma(X)}{10^3} \approx 0,000126$.

Utiliser un échantillon dans le cadre d'un prélèvement

104. 1. Comme l'effectif de l'entreprise est relativement grand par rapport au prélèvement (1 500 par rapport à 10). On peut considérer que c'est un tirage avec remise.

2. $E(S) = 10 \times 1\,870 = 18\,700$

$V(S) = 10V(X) = 10 \times 223^2$ donc

$\sigma(S) = \sqrt{10 \times 223^2} \approx 705,2$.

105. 1. Chacun des X_i suit une loi $\mathcal{B}(0,66)$ et on les considère indépendants.

S suit donc une loi $\mathcal{B}(200; 0,66)$.

2. $E(S) = np = 132$ et $\sigma(S) = \sqrt{np(1 - p)} \approx 6,7$.

3. On utilise la méthode du chapitre 12. Avec la calculatrice, on trouve $a = 119$ et $b = 145$. Un tel intervalle est donc $[119; 145]$.

106. 1. L'énoncé dit qu'il y a un très grand nombre de billets. Donc on peut considérer que les probabilités ne changent pas et que les tirages sont indépendants.

2.

x_i	-1	9	49	99
$p(X = x_i)$	0,969	0,02	0,01	0,001

On a $E(X) = -0,2$ et $V(X) = 36,36$ donc $\sigma(X) \approx 6,03$.

3. $E(S) = 3E(X) = -0,6$ est ce que peut espérer Manon en moyenne en tirant 3 tickets.

$$V(S) = 3V(X) \text{ donc } \sigma(S) = \sqrt{3V(X)} \approx 10,4.$$

Inégalités de Bienaymé-Tchebychev

107. 1. $p(|D - 30\,000| \geq 5\,000) \leq \frac{4\,000\,000}{5\,000^2} = 0,16$

2. a) $p(|D - 30\,000| \geq 5\,000)$
 $= p((D \leq 25\,000) \cup (D \geq 35\,000))$
 $= p(D \leq 25\,000) + p(D \geq 35\,000) \text{ or }$
 $p(D \geq 35\,000) = p(D \geq 30\,000 + 5\,000)$
 $= p(D \leq 30\,000 - 5\,000) = p(D \leq 25\,000) \text{ donc }$
 $p(|D - 30\,000| \geq 5\,000) = 2p(D \geq 35\,000) \text{ soit }$
 $\frac{p(|D - 30\,000| \geq 5\,000)}{2} = p(D \geq 35\,000).$

b) D'après 1. et 2. a), on a $p(D \geq 35\,000) \leq 0,08$ il y a donc moins de 8 % de chance qu'une ampoule dure 35 000 heures ou plus donc la réponse est : non.

108. 1. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4 \times 10^{24}$ et $p = 0,5$.

b) $E(X) = 2 \times 10^{24}$, $V(X) = 10^{24}$ et $\sigma(X) = 10^{12}$.

2. a) Ce n'est pas dans ses capacités.

b) $p(|X - 2 \times 10^{24}| < 10^{13} + 1) \geq 1 - \frac{10^{24}}{(10^{13} + 1)^2}$

avec $1 - \frac{10^{24}}{(10^{13} + 1)^2} \approx 0,99$.

c) Il y a plus de 99 % de chance que le nombre d'atomes désintégré soit égal à 2×10^{24} à plus ou moins 10^{13} atomes près.

Inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration « sans symétrie »

109. 1. a) Car l'événement $X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[$ n'est pas de la forme $|X - 8| \geq \delta$ (ou son contraire).

b) $|X - 8| \geq 2 \Leftrightarrow X \in]-\infty ; 6] \cup [10 ; +\infty[$ donc
 $(|X - 8| \geq 2) = (X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[) \cup (X \in [10 ; 12[)$
donc $p(|X - 8| \geq 2) = p(X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[)$
 $+ p(X \in [10 ; 12[) \geq p(X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[).$

c) $p(X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[) \leq p(|X - 8| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2} = 0,25$

2. a) Car l'événement $X \in]5 ; 13[$ n'est pas de la forme $|X - 8| < \delta$ (ou son contraire).

b) $|X - 8| < 3 \Leftrightarrow X \in]5 ; 11[$
donc $X \in]5 ; 13[= (|X - 8| < 3) \cup (X \in [11 ; 13[)$ donc
 $p(X \in]5 ; 13[) = p(|X - 8| < 3) + p(X \in [11 ; 13[)$
 $\geq p(|X - 8| < 3).$

c) $p(X \in]5 ; 13[) \geq p(|X - 8| < 3) \geq 1 - \frac{1^2}{3^2}$ avec
 $1 - \frac{1^2}{3^2} \approx 0,89.$

110. On cherche

$$p(A > 7) \geq p(|A - 11,2| < 4,2) \geq 1 - \frac{4}{4,2^2}$$

avec $1 - \frac{4}{4,2^2} \approx 0,77.$

111. 1. $S \geq 1\,000 \Leftrightarrow M \geq 100 \text{ or } |M - 95| \geq 5$
 $\Leftrightarrow M \geq 100 \text{ ou } M \leq 90.$

Ainsi $p(|M - 95| \geq 5) = p(M \geq 100) + p(M \leq 90)$
 $\geq p(M \geq 100) = p(S \geq 1\,000).$

2. $p(S \geq 1\,000) \leq p(|M - 95| \geq 5) \leq \frac{5^2}{10 \times 5^2} = 0,1$

112. 1. $E(X) = 11,4$ et $V(X) = 9,54$.

2. $p(M < 11) \leq p(|M - 11,4| \geq 0,4)$

$$\leq \frac{9,54}{2\,000 \times 0,4^2} = 0,03$$

Déterminer la taille d'un échantillon

113. On considère $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

et on cherche n tel que $p(|M_n - 250| < 5) \geq 0,95$.

Comme $p(|M_n - 250| < 5) \geq 1 - \frac{100}{n \times 5^2} = 1 - \frac{4}{n}$

une condition suffisante est $1 - \frac{4}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 80.$

114. 1. $E(G) = -\frac{1}{37}$ et $V(G) = \frac{1368}{1369}$.

2. On considère $G_1, G_2, \dots, G_n$ les variables aléatoires donnant les gains des joueurs successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que G .

On pose alors $M_n = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p\left(\left|M_n + \frac{1}{37}\right| < \frac{1}{37}\right) \geq 0,95$.

Comme

$$p\left(\left|M_n + \frac{1}{37}\right| < \frac{1}{37}\right) \geq 1 - \frac{\frac{1368}{1369}}{n \times \left(\frac{1}{37}\right)^2} = 1 - \frac{1368}{n}$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{1368}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 27\,360.$$

115. On considère $T_1, T_2, \dots, T_n$ les variables aléatoires donnant les temps de trajets successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T .

On pose alors $M_n = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p(|M_n - 6| < 0,25) \geq 0,98$.

Comme

$$p(|M_n - 6| < 0,25) \geq 1 - \frac{0,25^2}{n \times 0,25^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

une condition suffisante est $1 - \frac{1}{n} \geq 0,98 \Leftrightarrow n \geq 50$.

116. On considère $A_1, A_2, \dots, A_n$ les variables aléatoires donnant les apports caloriques journaliers successifs : on suppose qu'elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi d'espérance 3 000 et d'écart-type 50.

On pose alors $M_n = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$ et on cherche

n tel que $p(|M_n - 3\,000| < 100) \geq 0,99$.

Comme

$$p(|M_n - 3\,000| < 100) \geq 1 - \frac{50^2}{n \times 100^2} = 1 - \frac{1}{4n}$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{1}{4n} \geq 0,99 \Leftrightarrow n \geq 25.$$

117. 1. a) On obtient soit 1 PILE (avec une probabilité 0,6) soit 0 PILE (avec une probabilité 0,4) donc X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,6.

b) $E(X_i) = 0,6$ et $V(X_i) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

2. a) $]0,5 ; 0,7[$ pour $\delta = 0,1$.

b) On cherche n tel que

$$p(|M_n - 0,6| < 0,1) \geq 0,95.$$

Comme

$$p(|M_n - 0,6| < 0,1) \geq 1 - \frac{0,24}{n \times 0,1^2} = 1 - \frac{24}{n}$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{24}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 480 \text{ donc } n_0 = 480.$$

c) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus quand on lance 480 fois cette pièce. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 480$ et $p = 0,6$ et on cherche $p(X > 240) \approx 0,999\,99$.

Pour 480 lancers, on est sûr à un seuil bien plus élevé que 95 % d'obtenir plus de PILE que de FACE : encore une fois, l'inégalité de concentration n'est pas optimale.

Déterminer δ ou V

118. 1. Pour $\delta \geq \sqrt{200}$ l'inégalité est vérifiée.

2. $p(|X - 10| \geq \delta) \leq \frac{4}{\delta^2} \leq 0,02$.

119. a) On résout d'abord $\frac{V(Y)}{\delta^2} \leq 0,01 \Leftrightarrow \delta \geq 10\sigma(Y)$.

Pour ces valeurs de δ , on a

$$p(|Y - E(Y)| \geq \delta) \leq \frac{V(Y)}{\delta^2} \leq 0,01.$$

b) On résout d'abord $1 - \frac{V(Y)}{\delta^2} > \frac{8}{9} \Leftrightarrow \delta > 3\sigma(Y)$.

Pour ces valeurs de δ , on a

$$p(|Y - E(Y)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(Y)}{\delta^2} > \frac{8}{9}.$$

120. D'après l'énoncé, on a

$$p(|X - 70| \geq 10) > 0,1.$$

D'autre part, $p(|X - 70| \geq 10) \leq \frac{V(X)}{10^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$\text{On a donc } \frac{V(X)}{10^2} > 0,1 \Leftrightarrow V(X) > 10.$$

121. 1. On résout d'abord

$$1 - \frac{V(S)}{\delta^2} \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq \frac{100}{\delta^2} \Leftrightarrow \delta \geq 100.$$

Pour ces valeurs de δ , on a

$$p(|S - 300| < \delta) \geq 1 - \frac{100}{\delta^2} \geq 0,99.$$

2. D'après la question précédente, $p(S \in]200 ; 400[) = p(S \geq 201) \geq 0,99$ donc $a = 200$ convient.

122. Travail de l'élève.

1. Bienaymé l'a formulée et Tchebychev l'a démontrée.

2. On peut par exemple penser au théorème de Fermat-Wiles ou au théorème de Pythagore dont on trouve des formulations dans des textes de différentes civilisations (babylonienne, indienne, chinoise) mais dont la première démonstration connue est donnée par Euclide.

On pourra ouvrir le spectre des recherches aux recherches simultanées (on pense notamment au calcul différentiel de Leibniz et Newton).

123. Travail de l'élève.

1. Les sondages précédant d'un an les élections de 2017 donnent des intentions de votes très sur-évalués ou sous-évalués pour de nombreux candidats.

2. La sincérité des réponses (cf J-M. Le Pen en 2002 par exemple), taille des échantillons, etc.

3.... (pour le graphique, on pourra par exemple afficher les intentions de votes successives d'un ou une candidate afin de commenter son évolution dans le temps).

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,9	0,08	0,02

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ où X_i est le nombre de feuilles prises lors de la i -ème impression (chacune des X_i suit la loi de X et sont indépendantes car les impressions sont indépendantes).

2. On trouve $E(X) = 1,12$ donc $E(S) = 10E(X) = 11,2$.

3. On trouve $V(X) = 0,1456$ donc $V(S) = 10V(X) = 1,456$.

On en déduit que $\sigma(S) \approx 1,21$.

125. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1)

1. $E(Z) = 6E(X) = 6\,000$ et $V(Z) = 6 \times 15 = 90$ par indépendance des volumes de chacune des bouteilles.

2. Cette probabilité est $p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[)$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

$$p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[) \geq 1 - \frac{90}{50^2}$$

$$p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[) \geq 0,964.$$

3. a) Comme le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, on considère que c'est une répétition de 200 expériences de Bernoulli (de succès le fait que la pack d'eau contienne entre 5,950 et 6,050 L, de probabilité 0,98) effectuée de manière identique et indépendante.

N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,98$.

b) Avec la calculatrice, $p(N \geq 194) \approx 0,891$.

c) On a $E(N) = np = 196$. Sur un grand nombre de lots de 200 packs, en moyenne, 196 contiennent entre 5,950 et 6,050 L.

126. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (2)

1. Albane car $\sigma(A) < \sigma(T)$.

2. a) Albane et Thomas ne répondent qu'aux questions de leur discipline donc le score sur un thème n'a pas de lien avec le score sur l'autre.

b) $E(S) = 86$ et, A et T étant indépendantes,

$$V(S) = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ puis } \sigma(S) = 5.$$

$$\mathbf{3. a)} \quad p(|S - 86| < 15) \geq 1 - \frac{25}{15^2} \text{ avec } 1 - \frac{25}{15^2} \approx 0,889.$$

124. Somme de variables aléatoires

1. La loi de X est donnée par le tableau :

b) $p(|S - 86| < 15) = p(S \in]71 ; 101]) = p(S \geq 72)$ puisqu'il y a 100 questions donc Albane et Thomas sont sûrs de gagner un lot à un seuil proche de 89 %.

127. Inégalité de concentration, loi des grands nombres et simulation

1. a) $E(X) = 2,5$ et $V(X) = 1,25$.

b) On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant les résultats des lancers successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que X .

On pose alors $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p(|M - 2,5| < 0,05) \geq 0,95$.

Comme

$$p(|M - 2,5| < 0,05) \geq 1 - \frac{1,25}{n \times (0,05)^2} = 1 - \frac{500}{n},$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{500}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 10\,000.$$

2. a) La probabilité que le résultat soit 4 est 0,35 et non 0,25 (par exemple si $a = 0,7$ alors r vaut d'abord 3 mais prend ensuite la valeur 4 qui est renvoyée).

b)

y_i	1	2	3	4
$p(Y = y_i)$	0,25	0,25	0,15	0,35

c) $E(Y) = 2,6$ et $V(Y) = 1,44$.

d) Sous la condition que les valeurs renvoyées par la fonction sont indépendantes.

4. a) De $E(Y) = 2,6$.

$$b) p(|M - 2,6| < 0,05) \geq 1 - \frac{1,44}{10\,000 \times (0,05)^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{1,44}{10\,000 \times (0,05)^2} = 0,942\,4 \text{ donc oui,}$$

c'est assez probable.

c) Si on joue 10 000 fois, on voit que la moyenne des résultats doit probablement se trouver dans l'intervalle $]2,55 ; 2,65[$ avec ce programme alors qu'elle devrait très probablement être dans $]2,45 ; 2,55[$ si le programme était correct.

On peut donc jouer 10 000 fois et constater que la moyenne des résultats n'est pas dans $]2,45 ; 2,55[$ ce qui devrait être le cas avec une probabilité supérieure à 0,95.

Préparer le BAC Je me teste

p. 430

128. B car c'est égal à $5E(X)$.

129. B car c'est égal à $E(X) + E(Y)$.

130. B car X et Y étant indépendantes, c'est $V(X) + V(Y) = 0,04^2 + 0,12^2$.

131. C car la variable aléatoire moyenne qui a la même espérance que X .

132. D en résolvant l'équation $E(X) + bE(Y) = 0$.

133. D d'après le cours.

134. A = $\frac{V}{\delta^2}$ où $\delta = 2$.

135. C et D car il serait suffisant d'avoir

$$1 - \frac{2}{n \times 0,2^2} > 0,95$$

136. B d'après la loi des grands nombres.

Préparer le BAC Je révise

p. 431

137. Problème ouvert

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où elle touche la cible 1 et Y celle pour la cible 2.

Les tirs étant indépendants, on peut dire que X suit $\mathcal{B}(20 ; 0,4)$ et Y suit $\mathcal{B}(10 ; 0,1)$.

On a donc $E(X) = 8$ et $E(Y) = 1$.

Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de points : on a $Z = 5X + 20Y$.

Sur un grand nombre d'entraînements, elle peut espérer en moyenne $E(Z)$ points avec :

$$E(Z) = E(5X + 20Y) = 5E(X) + 20E(Y) = 40 + 20 = 60$$

c'est-à-dire 60 points.

138. Avec un programme

1. La loi de X est donnée par :

x_i	-4	5	100
$p(X = x_i)$	0,78	0,18	0,04

2. D'après la ligne 11, elle est utilisée 10 fois.

3. - 40 signifie que l'on a obtenu - 4 dix fois (soit 10 parties perdues).

Cette probabilité vaut $0,78^{10} \approx 0,083$.

4. a) On peut écrire $S = X_1 + \dots + X_{10}$ où X_i est le gain à la i -ème des 10 parties et où tous les X_i suivent la loi donnée dans la question 1.

b) On a $E(S) = 10E(X) = 17,8$ car $E(X) = 1,78$.

On peut espérer gagner en moyenne 17,8.

139. Espérance et concentration

1. On considère $T_1, T_2, \dots, T_{52}$ les variables aléatoires donnant les temps d'attente successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T . On pose alors :

$$M = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{52}}{52} \text{ et } p(M - 600 < 60) \geq 1 - \frac{2\,000}{52 \times 60^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{2\,000}{52 \times 60^2} \approx 0,989.$$

2. a) $T' = T - 60$ donc $E(T') = 540$ et $V(T') = 2\,000$.

b) On considère $T'_1, T'_2, \dots, T'_n$ les variables aléatoires donnant les temps d'attente successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T' .

On pose alors $M'_n = \frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p(|M'_n - 540| < 30) \geq 0,99$.

Comme

$$p(|M'_n - 540| \geq 1) - \frac{2000}{n \times 30^2} = 1 - \frac{20}{9n},$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{20}{9n} \geq 0,99 \Leftrightarrow n \geq \frac{2\,000}{9}$$

donc à partir de 223 clients.

140. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,25$.

2. a) $G = 2X$

b) $E(X) = 12,5$ et $V(X) = 9,375$ donc $E(G) = 25$ et $V(G) = 37,5$.

3. a) $S = 2X - 0,5(50 - X) = 2X - 25 + 0,5X = 2,5X - 25$

b) $E(S) = 2,5E(X) - 25 = 6,25$ et $V(S) = V(2,5X) = 2,5^2 V(X) = 58,593\,75$.

$$\text{c) } p(|S - 6,25| \geq 31,75) \leq \frac{58,593\,75}{31,75^2}$$

$$\text{avec } \frac{58,593\,75}{31,75^2} \approx 0,058.$$

d) $|S - 6,25| \geq 31,75$

$\Leftrightarrow S \in]-\infty; -25,5] \cup [38; +\infty[$ or le score minimal est -25 donc $|S - 6,25| \geq 31,75 \Leftrightarrow S \geq 38$.

La probabilité que l'on obtienne 38 points ou plus à ce jeu est inférieure à 0,058 environ.

e) $S \geq 38 \Leftrightarrow 2,5X - 25 \geq 38$

$\Leftrightarrow 2,5X \geq 63 \Leftrightarrow X \geq 25,2$ c'est-à-dire $X \geq 26$.

Ainsi, $p(S \geq 38) = p(X \geq 26) \approx 0,000\,04$.

f) La majoration (de l'ordre de 0,06) n'est pas très bonne puisque la « vraie » probabilité est bien plus faible (de l'ordre de 0,000 04).

Exercices vers le supérieur p. 432-433

141. Variables aléatoires en tant que fonctions

1. a) $\Omega = \{\text{rouge ; vert ; noir ; blanc}\}$

b) $G(\text{rouge}) = 1, G(\text{vert}) = 0, G(\text{noir}) = 0$

et $G(\text{blanc}) = -2$.

c) G est une variable aléatoire.

Sa loi est :

g_i	-2	0	1
$p(G = g_i)$	0,1	0,7	0,2

2. a) $\Omega' = \{7 ; 8 ; 9 ; 10 ; \text{valet ; dame ; roi ; as}\}$

b) $V(7) = V(8) = V(9) = V(10) = 0, V(\text{valet}) = V(\text{dame}) = V(\text{roi}) = 10$ et $V(\text{as}) = 20$.

142. Variables aléatoires, univers et espérance

1. a) Ils sont identiques car $X = x_i$ si et seulement si $X(\omega) = x_i$ c'est-à-dire si et seulement si $\omega \in A_i$.

$$\text{b) } p_i = p(X = x_i) = p(X \in A_i) = \sum_{\omega \in A_i} p(\omega)$$

$$\begin{aligned} 2. E(X) &= x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n \\ &= x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_n \times p(X = x_n) \end{aligned}$$

$$= x_1 \times \sum_{\omega \in A_1} p(\omega) + x_2 \times \sum_{\omega \in A_2} p(\omega) + \dots + x_n \times \sum_{\omega \in A_n} p(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in A_1} (p(\omega) \times x_1) + \sum_{\omega \in A_2} (p(\omega) \times x_2) + \dots + \sum_{\omega \in A_n} (p(\omega) \times x_n)$$

or pour tout $\omega \in A_i, x_i = X(\omega)$ donc

$$E(X) = \sum_{\omega \in A_1} (p(\omega) \times X(\omega)) + \sum_{\omega \in A_2} (p(\omega) \times X(\omega)) + \dots$$

$$+ \sum_{\omega \in A_n} (p(\omega) \times X(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega)).$$

143. Linéarité de l'espérance

$$1. E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times Y(\omega))$$

$$2. E(X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times (X(\omega) + Y(\omega)))$$

$$3. E(X) + E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega))$$

$$+ \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times Y(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times (X(\omega) + Y(\omega)))$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times (X(\omega) + Y(\omega))) = E(X + Y)$$

144. Variables comparables et espérance

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega)) \leq \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times Y(\omega)) = E(Y) \text{ si } X(\omega) \leq Y(\omega) \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

145. Inégalité de Markov

1. Soit $\omega \in \Omega$.
 - si $X(\omega) \geq \delta$ alors $Y(\omega) = \delta$ donc $X(\omega) \geq Y(\omega)$.
 - si $X(\omega) < \delta$ alors $Y(\omega) = 0$ donc $X(\omega) \geq Y(\omega)$ puisque X est positive.

On vient de montrer que $X \geq Y$ donc $E(X) \geq E(Y)$.

2. a)

y_i	0	δ
$p(Y = y_i)$	$1 - p(X \geq \delta)$	$p(X \geq \delta)$

- b) $E(Y) = p(X \geq \delta) \times \delta$
3. On a donc $E(X) \geq E(Y) = p(X \geq \delta) \times \delta$ donc
- $$p(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta} \text{ puisque } \delta > 0.$$

146. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. $Z = (X - E(X))^2$ est une variable aléatoire positive donc on peut appliquer l'inégalité de Markov.
2. Pour δ positif, appliquons l'inégalité de Markov à Z et δ^2 :

$$p(Z \geq \delta^2) \leq \frac{E(Z)}{\delta^2}, \text{ or}$$

- $Z \geq \delta^2 \Leftrightarrow (X - E(X))^2 \geq \delta^2 \Leftrightarrow |X - E(X)| \geq \delta$;
- $E(Z) = V(X)$ d'après le rappel de l'énoncé ;

$$\text{on a donc } p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

147. Écritures équivalentes

1. Les X_i suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p car la probabilité d'un succès dans la i -ème répétition du schéma de Bernoulli vaut p .
2. Comme le cadre est un schéma de Bernoulli, les expériences sont identiques et indépendantes et donc les X_i sont indépendantes.
3. $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ donne le nombre de succès sur les n répétitions donc $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$ ce qui prouve que l'on peut décomposer X en une somme de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.

148. Jeu de couleurs

Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu. D'après le graphique et la loi des grands nombres, on a $E(G) = -0,1$ environ.

D'autre part,

$$E(G) = p \times (-1) + (1 - p) \times 2 = 2 - 3p$$

où p est la probabilité de perdre (c'est-à-dire la proportion de boules noires dans l'urne).

On a donc $p = 0,7$ après résolution de $2 - 3p = -0,1$.

Pour n le nombre de boules noires, on a $\frac{n}{30} = p = 0,7$

donc $n = 21$: il y a 21 boules noires et 9 boules rouges.

149. Variables aléatoires indépendantes (1)

1. À l'aide d'un tableau à double entrée par exemple, on trouve $p(S = 7) = \frac{6}{64}$ et $p(R = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2. $p(S = 7) \cap (R = 1) = \frac{2}{64}$ car les issues qui conviennent sont $\{6 ; 1\}$ et $\{5 ; 2\}$.

$$3. \frac{6}{64} \times \frac{32}{64} = \frac{3}{64} \neq \frac{2}{64}$$

S et R ne sont pas indépendantes.

150. Variables aléatoires indépendantes (2)

1. La loi de X est donnée par :

x_i	0	2
$p(X = x_i)$	0,5	0,5

La loi de Y st donnée par :

y_i	0	5
$p(Y=y_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

On a :

• $p(X = 2 \cap Y = 5) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

et $p(X = 2) \times p(Y = 5) = \frac{1}{6}$: il y a égalité.

• $p(X = 0 \cap Y = 5) = p(\{5\}) = \frac{1}{6}$

et $p(X = 0) \times p(Y = 5) = \frac{1}{6}$: il y a égalité.

• $p(X = 2 \cap Y = 0) = p(\{2 ; 4\}) = \frac{1}{3}$

et $p(X = 2) \times p(Y = 0) = \frac{1}{3}$: il y a égalité.

• $p(X = 0 \cap Y = 0) = p(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{3}$

et $p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{1}{3}$: il y a égalité.

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

151. Variables aléatoires indépendantes (3)

À l'aide d'un arbre (seules les deux premières étapes sont nécessaires) par exemple, on obtient

que : $p((X = 1) \cap (Y = 10)) = p(Y = 10) = \frac{1}{6}$

$p(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 10) = \frac{1}{6}$.

On en déduit que

$p((X = 1) \cap (Y = 10)) \neq p(X = 1) \times p(Y = 10)$.

X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Remarque : On peut considérer $X = 2$ et $Y = 10$. En effet, $p((X = 2) \cap (Y = 10)) = 0$ et $p(X = 2) \neq 0$ et $P(Y = 10) \neq 0$.

152. Variance et indépendance

1. Non :

• $p(U = 3) = \frac{1}{12}$ et $p(D = 0) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

donc $p(U = 3) \times p(D = 0) = \frac{1}{16}$;

• $p((U = 3) \cap (D = 0)) = \frac{1}{12}$;

donc $p(U = 3) \times p(D = 0) \neq p((U = 3) \cap (D = 0))$.

2. $V(U) = \frac{49}{6}$ et $V(D) = 0,1875$ donc $V(U) + V(D) = \frac{401}{48}$.

La loi de $U + D$ est :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(U + D = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

donc $V(U + D) = \frac{329}{48}$.

Dans ce cas où U et V ne sont pas indépendantes, on a $V(U + D) \neq V(U) + V(D)$.

153. Espérance et indépendance

1. Pour résumer, on peut utiliser un tableau à double entrée :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Ainsi on a la loi de XY donnée par :

r_i	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$p(XY=r_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{12}$

2. On trouve $E(XY) = 6,25$.

3. La loi de X (et celle de Y) est donnée par :

x_i	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Donc $E(X) = E(Y) = 2,5$.

On remarque que

$E(X) \times E(Y) = 6,25 = E(XY)$.

154. Variance de Konig-Huygens

$V(X + Y) = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2$ d'après le premier prérequis

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - ([E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2)$$

$$= E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2$$

d'après le deuxième prérequis

$$= E(X)^2 - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= V(X) + V(Y) \text{ d'après le premier prérequis.}$$

Travaux pratiques

p. 434-437

TP 1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi binomiale

- **Durée estimée** : 55min
- **Objectif** : Confronter la majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la valeur de la probabilité dans le cadre de la loi binomiale afin de constater que cette majoration est loin d'être optimale.

A. Premier exemple

1.... $\Leftrightarrow 0 \leq X \leq 2$ ou $9 \leq X \leq 10$.

2....for i in [0,1,2,9,10]

On obtient 0,050 6 environ.

B. Calcul de $p(|S_n - np| \geq \sqrt{n})$ et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. a)

```
def p1 (n, p) :
    return sum ([proba_binom (n, p, i)
                 for i in range (n+1)
                 if abs(i-n*p) >= math.sqrt(n)])
```

b)...

2. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n d'espérance np et de variance $np(1-p)$:

$$p(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{np(1-p)}{(\sqrt{n})^2} = p(1-p).$$

3. a) 0,247 5

b) Dans le cas $n = 10$ et $p = 0,55$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

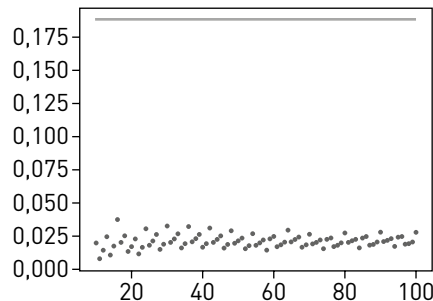
$p(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \leq 0,2475$ alors que l'on sait que $p(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \approx 0,050 6$ dans ce cas : la majoration donnée n'est pas très bonne.

C. Comparaison de $p(|S_n - np| \geq \sqrt{n})$ et $p(1-p)$

1.

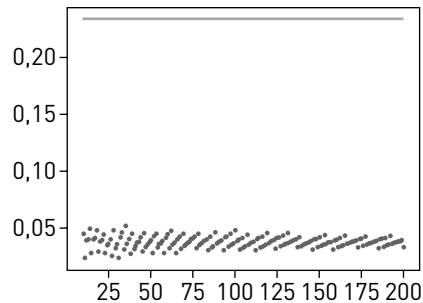
```
def p2 (k, p) :
    return [p1(n, p) for n in range (10, k+1)]
```

2. a) On obtient :



Pour un p donné, la majoration n'est jamais très bonne.

b) Par exemple avec $k = 200$ et $p = 0,63$:



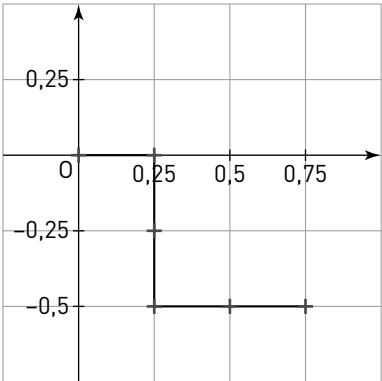
Oui, cela confirme les observations de la question précédente.

c) À « n constant», on remarque que les probabilités sont globalement plus grandes quand p est proche de 0,5 : c'est normal car dans ce cas, la variance $np(1-p)$ est plus grande c'est-à-dire que les valeurs éloignées de l'espérance np sont plus probables.

TP 2. Marche aléatoire

- **Durée estimée** : 50 min
- **Objectif** : Travailler avec une marche aléatoire et, en particulier, discuter de l'éloignement du point de départ.

1. a) On obtient (les points marquent les positions d'arrêts successives du centre du robot) :



b) $X = [0, -0,25, -0,25, -0,25, 0, 0]$
et $Y = [0, 0, -0,25, -0,5, -0,5, -0,25]$

2. a)

```
def modif1 (L) :  
    L.append (L[len(L)-1] + 0.25)  
    return L
```

b)

```
def modif2 (L) :  
    L.append (L[len(L)-1] - 0.25)  
    return L
```

c)

```
def modif3 (L) :  
    L.append (L[len(L)-1])  
    return L
```

3. a) L'abscisse augmente de 0,25 et l'ordonnée reste identique donc c'est un déplacement vers la droite.

b) • Si $a = 2$, c'est un déplacement vers la gauche.

• Si $a = 3$, c'est un déplacement vers le fond.

• Si $a = 4$, c'est un déplacement vers l'avant.

4. a) Non.

b)...

c) Si on considère l'abscisse du robot, la variable aléatoire X_i donnant la valeur à y ajouter à l'étape i suit la loi :

x_i	-0,25	0	0,25
$p(X=x_i)$	0,25	0,5	0,25

d'espérance 0 et de variance 0,031 25.

Cela veut dire qu'après 1 000 étapes par exemple, l'abscisse du point est donnée par la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$ d'espérance $1\,000 \times 0 = 0$ et de variance

$1\,000 \times 0,031\,25 = 31,25$ (toutes les variables aléatoires X_i sont indépendantes).

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$p(|S| \geq 20) \leq \frac{31,25}{20^2} = 0,078\,125 \text{ donc, bien qu'en}$$

1 000 étapes, le robot ait pu atteindre (au maximum) les abscisses - 250 ou 250, la probabilité qu'il soit éloigné du point de départ de plus de 20 est inférieure à 0,078 125 (et on sait que cette majoration n'est pas optimale).

Il en va de même pour les ordonnées.

TP 3. Échantillons et écarts-types

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés et la comparer à $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks pour $k = 1, 2, 3$.

A. Observations

1. 2. 3. 4. 5. 6. a) b)...

7. a) $\sigma = 3$ et $n = 100$ ici donc $\frac{\delta}{\sqrt{n}} = 0,3$: la valeur s

en D102 doit être proche de 0,3 normalement.

b) Normalement oui.

c) Normalement oui.

8. a) b) c) d)...

e) Autour de 70 %.

f) Pour $k = 2$: autour de 95 %.

Pour $k = 3$: autour de 100 %.

B. Simulation

1. $\mu = 600 \times 0,5 + 300 = 600$

$$\text{Et } \delta = 600 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 100\sqrt{3}.$$

2. De 600 (loi des grands nombres).

$$3. \text{ De } \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{300}} = \frac{100\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = 10.$$

TP 4. Étude de sondages

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : Répondre à la question d'entrée de chapitre en étudiant le lien entre le coût et la précision d'un sondage. On commencera par faire le lien entre sondages et échantillons pour faire le lien avec ce chapitre.

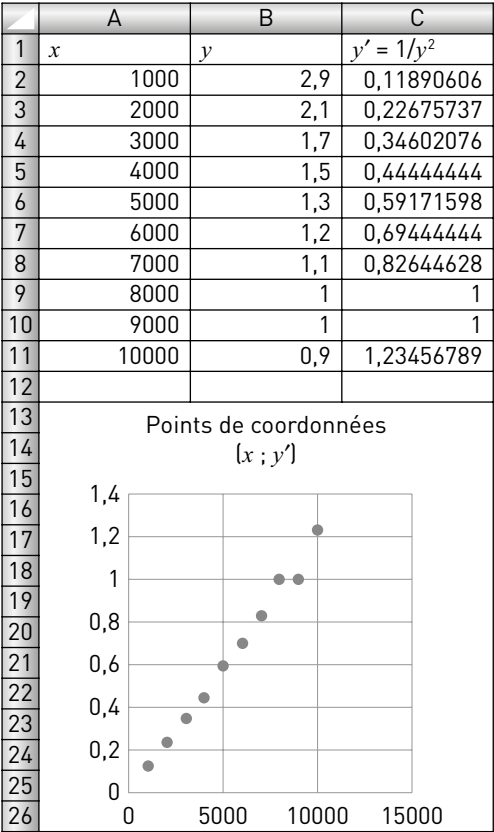
A. Premier tour des élections présidentielles 2017 en France

1. a) Sous l'hypothèse d'indépendance.
S suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,2$.
- b) [176 ; 225].
- c) Il doit être crédité d'entre 17,6 % et 22,5 % des voix soit une marge d'erreur de 2,4 % – 2,5 %.
- d) Normalement, on ne devrait pas avoir une proportion en dehors de [0,176 ; 0,225] donc on peut douter de leur fiabilité ou de leur représentativité (pour de multiples raisons, pas nécessairement parce qu'ils ont mal été réalisés).
2. Intervalle de fluctuation : [1 922 ; 2 079], soit entre 19,22 % et 20,79 % : la marge d'erreur est d'environ 0,8 %.

B. Deuxième tour des élections présidentielles 2017

1. a) 1 €
- b) Par exemple pour 2 000 sondés, le coût est de 2 000 € et la marge d'erreur de 2,1 % environ alors que pour 4 000 sondés, le coût est de 4 000 € (le double de 2 000 €) mais la marge d'erreur est de 1,5 % environ, elle n'est donc pas divisée par 2.

2. a) Avec un tableur, on obtient :



- Les points semblent quasi alignés.
- b) Elle semble linéaire avec $f(x) = 0,000\,12x$.
- c) Pour x sondés, $f(x) = \frac{1}{\text{Marge d'erreur}^2}$ donc la marge d'erreur est $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{0,000\,12x}} \approx \frac{1}{0,011\sqrt{x}}$.
- Pour 1 000 000 personnes sondées, cela donne 0,09 % environ.