



Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

I Notions abordées

- Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$.
- Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et la relation $V(aX) = a^2V(X)$.
- Application à l'espérance, la variance et l'écart type de la loi binomiale.
- Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi.
- Espérance, variance, écart type de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et de la moyenne $M_n = \frac{S_n}{n}$
- Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Inégalité de concentration (Bienaymé-Tchebychev dans le cas de le cas particulier d'une moyenne M_n de n variables indépendantes identiques
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi
- Loi des grands nombres

Démonstration :

- Espérance et variance de la loi binomiale

Exemple d'algorithme :

- Calculer la probabilité de $(|S_n - pn| > \sqrt{n})$, où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n, p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Simulation d'une marche aléatoire.
- Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks , ou à $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$, pour $k = 1, 2, 3$



II Parcours d'exercices et de problèmes - page 403 à 437

<u>Série 1 – Variables aléatoires</u>	
Calcul espérance et variance	35 ; 36 ; 37 ; 38 ; 39 ; 40 ; 41 ; 43
Modéliser	44 ; 45 ; 46 ; 47 ; 48
Même loi	50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55 ; 56 ; 58 ; 60 ; 61
<u>Série 2 – Concentration et loi des grands nombres</u>	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	72 ; 73 ; 74 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 81
Inégalité de concentration	82 ; 83 ; 86
Loi des grands nombres	90 ; 91
<u>Série 2 – Problèmes</u>	
Variables aléatoires	94 ; 96 ; 97 ; 98 ; 99 ; 101 ; 102 ; 124
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	107 ; 109 ; 110 ; 112
Echantillon	113 ; 115 ; 116
Déterminer δ ou V	117 ; 119 ; 121
Bilan	124 ; 125 ; 127 ; 140
<u>Série 3 – Approfondissement</u>	
Variables aléatoires indépendantes	149 ; 150 ; 151 ; 152
MPSI	153 ; 154
MPSI	144 ; 145 ; 146 ; 148
<u>Série 4 – TP</u>	
Marche aléatoire	
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi binomiale	

III Pistes pour le Grand Oral

- jeu avec application de la linéarité de l'espérance
- Marche aléatoire
- Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev