CHAPITRE 10 Produit scalaire et plans de l'espace

Manuel p. 306-333

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Nous verrons tout d'abord l'utilisation du produit scalaire dans l'espace. Nous verrons ensuite l'introduction de l'équation cartésienne d'un plan afin de manipuler les intersections dans l'espace, les projetés orthogonaux et les distances.

Objectifs

- → Calculer un produit sclaaire et l'utiliser pour calculer un angle ou une longueur.
- → Déterminer une équation cartésienne d'un plan.
- → Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal sur un plan.
- → Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace.
- → Déterminer une intersection entre un plan et une droite quelconques.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ

p. 307

1. Calculer des produits scalaires dans le plan

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OE} = 6 \times 3 = 18$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE} = 6 \times 3 = 18$

c) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{OD} = 6\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times \cos 105°$

d) $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{OE} = (3 + 3\sqrt{2}) \times 3$

2. Déterminer un vecteur normal à une droite

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer une équation cartésienne d'une doite

a) $-x - 3y - + 7 = 0$

b) $x - y + 1 = 0$

c) $-2x + 3y - 13 = 0$

d) $x + 2y = 0$

4. Déterminer le projeté orthogonal sur une doite

a) La perpendiculaire passant par A a pour équation : $2x + y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ ce qui donne le point $\left(\frac{12}{5} ; \frac{1}{5}\right)$.

b) La perpendiculaire passant par A a pour équation :$x - 3y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + y + 4 = 0 \end{cases}$ ce qui donne le point $\left(-\frac{7}{10} ; -\frac{19}{10}\right)$.

c) La perpendiculaire passant par A a pour équation :$2x + 3y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ -3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ ce qui donne le point $\left(\frac{4}{13} ; -\frac{7}{13}\right)$.

d) La perpendiculaire passant par A a pour équation :$2x + y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$ ce qui donne le point $\left(\frac{12}{5} ; -\frac{1}{5}\right)$.

Activités p. 308

1 Découvrir le produit scalaire dans l'espace

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir le produit scalaire dans l'espace.

1. a) Ils sont sur une face du cube.

b) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} = a^2$ par projection.

2. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH} = 2a^2$, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BF} = a^2$, $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{PG} = \frac{1}{2}a^2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$.

3. a) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = a^2$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}a^2$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}a^2$.

b) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ})$

4. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE} = 0$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF} = a^2$, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HE} = 0$, $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$, $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{HE} = -a^2$, $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$ donc par somme le produit scalaire est nul.

b) Donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HF} = 0$ on en déduit que (AG) et (HF) sont orthogonales.

5. a)
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AG}\cdot(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}) = \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GH}$$
$$= 2a^2 + (-a^2) = a^2$$

b) Par ailleurs
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH} = AG \times BH \times \cos\alpha \Leftrightarrow a^2 = a\sqrt{3} \times a\sqrt{3} \times \cos\alpha$$
d'où $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ et donc l'angle entre les diagonales vaut environ 70,53°.

2 Imaginer les équations de plans de l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les équations de plans dans l'espace.

A. Des plans particuliers du cube

1. (ABC) a pour équation $z = 0$.

2. (EFG) $z = 1$, (ABE) $y = 0$, (CDE) $y = 1$, (ADE) $x = 0$ et (BCG) $x = 1$.

3. (BD) $y = -x + 1$

4. F(1 ; 0 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

B. Étude du plan (AFH)

1. $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}\cdot(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CG} = -1 + 1 = 0$

$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EH} = 1 - 1 = 0$

2. (CE) est perpendiculaire au plan (AFH)

3. Par conséquent (CE) est orthogonale à toutes les droites du plan (AFH).

4. $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AM} = -x - y + z$ et donc une équation du plan est $-x - y + z = 0$.

3 Observer un projeté orthogonal dans l'espace

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir le projeté orthogonal dans l'espace.

1. Un vecteur normal est : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

2. $d\begin{cases}x = -1 + 2k\\ y = 2 - k\\ z = -3 + 3k\end{cases}$

3. Système à 4 équations.

4. On obtient l'équation : $2(-1 + 2k) - (2 - k) + 3(-3 + 3k) - 1 = 0$ qui donne $k = 1$ et donc H(1 ; 1 ; 0).

5. H, M(2 ;0 ; –1) et N(0 ; 2 ; 1).

6. $AM = \sqrt{17}$, $AN = \sqrt{17}$ et $AH = \sqrt{14}$.

7. C'est la plus petite.

4 Manipuler le tétraèdre régulier

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir des propriétés du tétraèdre régulier.

1. À l'aide de la relation de Chasles on obtient : $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HG} = 4\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AG} = \vec{0}$.

2.
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$$
$$= a^2\cos - a^2\cos 60 = 0$$

3. Elles sont orthogonales.

4. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG})\cdot\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$

5. Elle est perpendiculaire au plan.

À vous de jouer p. 311

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6 + 0 - 3 = -9$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF} = a\sqrt{2}\times a\sqrt{2}\times\cos 60 = a^2$

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}\ \times AC\times\cos 60$

$\Leftrightarrow -6 = 3\sqrt{2}\times AC\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $AC = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

4. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3 + 6 + 0 = 3$

et $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{10}\times\sqrt{14}\times\cos\alpha$

donc $\cos\alpha = \dfrac{3}{2\sqrt{35}}$ d'où : $\alpha \approx 75{,}31°$.

5. De la forme $2x - 3y - 4z + d = 0$ et passe par C donc : $-4 - 3 + 12 + d = 0$ donc :$2x - 3y - 4z - 5 = 0$.

6. De la forme $-3y + 5z + d = 0$ et passe par G donc : $-3 + 5 + d = 0$ donc : $-3y + 5z - 2 = 0$.

7. La droite perpendiculaire passant par C a pour représentation : $\begin{cases} x = 1+2k \\ y = 2-3k \\ z = -1+k \end{cases}$

L'intersection avec le plan donne : $2(1 + 2k) -3(2 - 3k) + (-1 + k) -1 = 0$ d'où : $k = \dfrac{3}{7}$ et le projeté de C est donc le point : $H\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{5}{7};-\dfrac{4}{7}\right)$ et la distance est :

$CH = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

8. Le plan passant par B et perpendiculaire à la droite a pour équation : $3x + y - 2z + 3 = 0$.

L'intersection de ce plan et de la droite vérifie : $3(2 + 3k) + (-1 + k) -2(-2k) + 3 = 0$ d'où $k = -\dfrac{4}{7}$ et on obtient le point $H\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{11}{7};\dfrac{8}{7}\right)$ et la distance

$BH = \dfrac{\sqrt{707}}{7}$.

9. 1. On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. $V = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{IJ\times IK}{2}\times IL = \dfrac{4^3}{6} = \dfrac{32}{3}$

10. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$ alors :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow 24 = \sqrt{33}\times 6\times\cos\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{4}{\sqrt{33}}$ et $\widehat{BAC}\approx 45{,}87°$.

De même : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow 9 = \sqrt{33}\times\sqrt{21}\times\cos\widehat{ABC}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{ABC} = \dfrac{3}{\sqrt{77}}$ et $\widehat{ABC}\approx 70{,}01°$.

11. 1. On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ qui ne sont pas orthogonaux donc la droite et le plan ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

2. On a : $(2 + 2k) + (1 - k) -2k = 0$ d'où $k = 3$ et le point d'intersection est le point :$(8 ; -2 ; 3)$.

12. 1. On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ qui ne sont pas orthogonaux donc la droite et le plan ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

2. On a : $-(-1 + 3k) + 3(1 + 2k) -4(3 - k) + 1 = 0$ d'où $k = 1$et le point d'intersection est le point :$(2 ; 3 ; 2)$.

13. $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=0+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

14. On a : $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}$.

Les vecteurs n'étant pas 2 à 2 colinéaires alors les plans sont sécants.

Exercices apprendre à démontrer p. 316

Pour s'entraîner

Considérons les droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$, et un point A de l'espace.

Si les deux droites sont orthogonales alors $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'}=0$ mais la parallèle à d passant par A admet le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur et la parallèle à d' passant par A admet le vecteur $\overrightarrow{u'}$ comme vecteur directeur.

Comme $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'}=0$ et que les deux parallèles ont un point commun alors elles sont perpendiculaires.

Réciproquement si deux droites sont perpendiculaires alors toute parallèle à l'une est orthogonale à toute parallèle à l'autre.

Exercices calculs et automatismes p. 317

15. Produit scalaire

a) b) **b)** a) **c)** b) **d)** a)

16. Équation de plan

a) b) **b)** b) **c)** b) **d)** d)

17. Produits scalaires

a) Vrai **b) Faux** **c) Faux**
d) Faux **e) Vrai** **f) Faux**

18. Orthogonale ou non

c)

19. Perpendiculaire ou non

a)

20. Orthogonaux ou non

a) Non **b)** Oui **c)** Non **d)** Non

21. Quelle méthode ?

a) a) **b)** c) **c)** b) **d)** b)

Exercices d'application p. 318

Calculer un produit scalaire

22. a) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{HF}=-a^2$ **b)** $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

c) $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{3}$ **d)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}=a^2$

e) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BH}=\dfrac{a^2}{2}$ **f)** $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AM}=\dfrac{a^2}{2}$

23. a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0-2+3=1$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0-3+6=3$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0+2-6=-4$

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=9+5+6=20$

24. a) $t(t+1)+2t+2=0$ d'où $t=-1$ ou $t=-2$.

b) $t^2-1-2-1=0$ d'où $t=2$ ou $t=-2$.

c) $2t(t+1)+2t+2=0$ d'où $t=-1$.

d) $-t^2+2t+0=0$ d'où $t=0$ ou $t=2$.

25. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\7\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-24$ donc elles ne sont pas perpendiculaires.

2. $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ donc elles sont orthogonales.

26. On calcule les trois normes et les trois produits scalaires.

27. Oui car on rentre les coordonnées des vecteurs.

Utiliser un produit scalaire

28. $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$

29. $\overrightarrow{u_4}$

30. 1. $\vec{u}\cdot\vec{i} = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{j} = \sqrt{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{k} = \sqrt{2}$.

2. $\vec{u} = 2\sqrt{2}$ d'où $\cos\widehat{ui} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{ui} = \dfrac{\pi}{4}$,

$\cos\widehat{uj} = \dfrac{1}{2}$ et $\widehat{uj} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\cos\widehat{uk} = \dfrac{1}{2}$ et $\widehat{uk} = \dfrac{\pi}{3}$.

31. $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{4}$ et alors

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\widehat{DJI}$ donc $\cos\widehat{DJI} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ et

$\widehat{DJI} \approx 73{,}2°$.

32. 1. $AI = AJ = \sqrt{3}$ et $IJ = \dfrac{1}{2}BD = 1$.

2. $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}) = \dfrac{5}{2}$

3. $\cos\widehat{IAJ} = \dfrac{5}{6}$ d'où $\widehat{IAJ} \approx 33{,}6°$.

33. $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BH} = 1$ alors :

$1 = 1\times\sqrt{3}\times\cos\theta$ donc $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

34. 1. $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP'} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{P'P} = 6 + 0 = 6$

2. D'où $6 = 3\times4\times\cos\widehat{PMN}$ donc $\widehat{PMN} = 60°$.

3. $NP = \dfrac{NP'}{\cos 60} = 2$

35. $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DF} = 1$ alors :

$1 = \sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos\theta$ donc $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ et l'angle entre ses diagonales vaut 70,53°.

Déterminer une équation cartésienne d'un plan

36. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

2. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$ donc les plans sont perpendiculaires.

37. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

2. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$ donc les plans sont perpendiculaires.

38. a) $-x + 4z - 5 = 0$

b) $-x - y + 2z - 2=0$

c) $-x - 2y = 0$

d) $z = 0$

39. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\-3\\-1\end{pmatrix}$ donc de la forme $7x - 3y - z + d = 0$ et passe par B donc $7x - 3y - z - 5 = 0$.

40. a) $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}$

41. $2x - 3y + 7z + 7 = 0$

42. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$ et le milieu de [AB] $\left(-\dfrac{1}{2}\,;4\,;-1\right)$ donc le plan est : $x + 2y - 4z - \dfrac{23}{2} = 0$.

43. 1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2. Un vecteur normal vérifie : $\begin{cases}a-2b-c=0\\-a-2b+c=0\end{cases}$ soit $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et le plan est : $x+z-2=0$.

Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal

44. 1. $\overrightarrow{HA}=\vec{n}$ et H appartient au plan.

2. $AH=3\sqrt{3}$

45. a) La droite orthogonale passant par A a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=1+2k\\y=2-3k\\z=3+4k\end{cases}$ que l'on remplace dans l'équation du plan pour trouver $k=-\dfrac{3}{29}$ et alors $H\left(\dfrac{23}{29};\dfrac{67}{29};\dfrac{75}{29}\right)$.

b) La droite orthogonale passant par A a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=1+k\\y=1+k\\z=1+k\end{cases}$ que l'on remplace dans l'équation du plan pour trouver $k=-\dfrac{2}{3}$ et alors $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

c) La droite orthogonale passant par A a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=-1+k\\y=-4+2k\\z=3-11k\end{cases}$ que l'on remplace dans l'équation du plan pour trouver $k=\dfrac{1}{2}$ et alors $H\left(-\dfrac{1}{2};-3;-\dfrac{5}{2}\right)$.

46. a) La droite orthogonale passant par A a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=3k\\y=1-k\\z=2+k\end{cases}$ que l'on remplace dans l'équation du plan pour trouver $k=-1$ et alors $H(-3\,;2\,;1)$ et $AH=\sqrt{11}$.

b) La droite orthogonale passant par O a pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=5k\\y=-2k\\z=k\end{cases}$ que l'on remplace dans l'équation du plan pour trouver $k=\dfrac{1}{10}$ et alors $H\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{10}\right)$ et $OH=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

47. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

48. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$

2. $\begin{cases}x=5+2k\\y=6-3k\\z=1\end{cases}$

3. On remplace pour obtenir $k=\dfrac{8}{13}$ et le projeté est $H\left(\dfrac{81}{13};\dfrac{54}{13};1\right)$.

4. La distance est alors $DH=\dfrac{8}{13}\sqrt{13}$.

Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace

49. 1. $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FM})\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FN})=EF^2=a^2$

2. $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=EM\times EN\times\cos\widehat{MEN}$

$\Leftrightarrow a^2=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\times\cos\widehat{MEN}$ d'où : $\cos\widehat{MEN}=\dfrac{4}{5}$ et $\widehat{MEN}\approx 36{,}87°$.

50. 1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc BCD est rectangle en B.

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents donc la droite est perpendiculaire au plan.

3. AB = 6

4. $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{BC \times BD}{2} \times AB = 4$

51. 1. DHM rectangle en D car (DH) perpendiculaire au plan (ABD).

2. $\tan\widehat{DMH} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ donc $\widehat{DMH} \approx 41{,}81°$.

Déterminer une intersection de droites et de plans

52. a) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan.

b) $\vec{u}\cdot\vec{n} \neq 0$ donc la droite n'est pas parallèle au plan et on remplace, ce qui donne :

$1 + k - 3(-3k) + 1 + k - 1 = 0$

d'où $k = -\dfrac{1}{11}$ et le point est : $\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{3}{11};\dfrac{10}{11}\right)$.

c) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan, on prend un point de la droite et il est aussi dans le plan donc la droite est incluse dans le plan.

d) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan, on prend un point de la droite et il est aussi dans le plan donc la droite est incluse dans le plan.

53. a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la droite est parallèle au plan et ils ont un point commun donc la droite est incluse dans le plan.

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc le point d'intersection existe et est (5 ; 1 ; 4).

c) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc le point d'intersection existe et est $\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{10}{3};-5\right)$.

d) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc la droite est perpendiculaire au plan et le point d'intersection existe et est (–2 ; –2 ; 0).

e) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc le point d'intersection existe et est $\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{6}\right)$.

54. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc le point d'intersection existe.

2. $\left(1;\dfrac{13}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$

55. a) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc le point d'intersection existe et est(–8 ; 2 ; –4).

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc le point d'intersection existe et est (–13 ; –4 ; 27).

c) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la droite est parallèle au plan et ils n'ont pas de point commun donc la droite est parallèle au plan.

56. a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-4\\5\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc la droite d'intersection existe et est donnée par : $\begin{cases}x=\dfrac{18}{5}-\dfrac{13}{5}k\\ y=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}k\\ z=k\end{cases}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

c) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc la droite d'intersection existe et est donnée par : $\begin{cases}x=1+2k\\ y=-4+2k\\ z=k\end{cases}$

57. a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc la droite d'intersection existe et est donnée par : $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}k\\ y=-1+\dfrac{7}{3}k\\ z=k\end{cases}$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles. Ici confondus.

c) $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc la droite d'intersection existe et est donnée par : $\begin{cases}x=\dfrac{5}{7}+\dfrac{1}{7}k\\ y=-\dfrac{6}{7}+\dfrac{3}{7}k\\ z=k\end{cases}$

d) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni orthogonaux donc la droite d'intersection existe et est donnée par : $\begin{cases}x=\dfrac{8}{7}-\dfrac{23}{7}k\\ y=-\dfrac{9}{7}-\dfrac{3}{7}k\\ z=k\end{cases}$

58. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la droite d'intersection existe.

2. Un vecteur directeur vérifie le système : $\begin{cases}3a-2b+4c=0\\ 2a+b-c=0\end{cases}$ soit par exemple le vecteur : $\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{7}\\ \dfrac{11}{7}\\ 1\end{pmatrix}$

3. $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{7}-\dfrac{2}{7}k\\ y=-\dfrac{11}{7}+\dfrac{11}{7}k\\ z=k\end{cases}$

59. 1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

2. a) A(1 ; 0 ; 2)

b) B(0 ; 1 ; 3)

3. $\text{AB} = \sqrt{3}$

4. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ n'est pas orthogonal aux vecteurs normaux donc la droite (AB) n'est pas perpendiculaire aux deux plans et AB n'est pas minimale.

Étudier des problèmes de position relative dans l'espace

60. 1. $\overrightarrow{\text{DF}}\cdot\overrightarrow{\text{IP}} = (\overrightarrow{\text{DA}}+\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BF}})\cdot\overrightarrow{\text{IP}} = 0 - 1 + 1 = 0$

2. $\overrightarrow{\text{DF}}\cdot\overrightarrow{\text{LP}} = (\overrightarrow{\text{DH}}+\overrightarrow{\text{HG}}+\overrightarrow{\text{GF}})\cdot\overrightarrow{\text{LP}} = 0 - 1 + 1 = 0$

3. La droite est perpendiculaire au plan.

61. 1. C'est un parallélogramme.

2. Car ICHJ est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{\text{FK}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}} = \overrightarrow{\text{FK}}\cdot\overrightarrow{\text{CH}} = (\overrightarrow{\text{FC}}+\overrightarrow{\text{CK}})\cdot\overrightarrow{\text{CH}} = -a^2 + a^2 = 0$

4. De même

$\overrightarrow{\text{FK}}\cdot\overrightarrow{\text{AI}} = (\overrightarrow{\text{FC}}+\overrightarrow{\text{CK}})\cdot(\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BI}}) = 0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0 = 0$

donc (FK) est orthogonale à deux droites sécantes du plan, donc elle est perpendiculaire au plan.

62. 1. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}-7\\1\\-5\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents.

63. 1. $\overrightarrow{\text{OA}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents.

Exercices d'entraînement p. 322

Géométrie avec le produit scalaire

64. $AB^2 - \text{BC}^2 + \text{CD}^2 - \text{DA}^2$

$= (\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{BC}})\cdot(\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{BC}}) + (\overrightarrow{\text{CD}}-\overrightarrow{\text{DA}})\cdot(\overrightarrow{\text{CD}}+\overrightarrow{\text{DA}})$

$= (\overrightarrow{\text{AB}}-\overrightarrow{\text{BC}})\cdot\overrightarrow{\text{AC}} + (\overrightarrow{\text{CD}}-\overrightarrow{\text{DA}})\cdot\overrightarrow{\text{CA}}$

$= \overrightarrow{\text{AC}}\cdot(\overrightarrow{\text{AB}}+\overrightarrow{\text{CB}}+\overrightarrow{\text{DA}}+\overrightarrow{\text{DC}}) = \overrightarrow{\text{AC}}\cdot 2\overrightarrow{\text{DB}}$

65. 1. $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\text{AC}}+\overrightarrow{\text{CB}})\cdot\overrightarrow{\text{CD}} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{\text{BC}}\cdot\overrightarrow{\text{CD}}$

2. Équivalence car produits scalaires nuls.

Plans dans l'espace

66. 1. $\overrightarrow{\text{IG}}\cdot\overrightarrow{\text{IA}} = \overrightarrow{\text{IF}}\cdot\overrightarrow{\text{IA}} + \overrightarrow{\text{FG}}\cdot\overrightarrow{\text{IA}} = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$

2. $\text{IG} = \text{IA} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ d'où $\cos\widehat{\text{AIG}} = -\frac{1}{5}$ et $\widehat{\text{AIG}} \approx 101{,}54°$.

3. $\overrightarrow{\text{BJ}}\cdot\overrightarrow{\text{IG}} = \overrightarrow{\text{BJ}}\cdot\overrightarrow{\text{IA}} = 0$ avec les coordonnées.

4. (AIG) : $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$

5. $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

67. 1. $\overrightarrow{\text{AP}}\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{EM}}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{EN}}\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix}$ le premier est bien orthogonal aux deux autres.

2. (EMN) : $-x + y + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = 0$

68. 1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$

2. $V=\frac{1}{3}\times\frac{\text{OA}\times\text{OB}}{2}\times\text{OC}=\frac{abc}{6}$

69. On remplace les coordonnées du point dans l'équation du plan.

70. 1. B(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) et D(0 ; 0 ; 1) donc (BCD) $x+y+z-1=0$.

2. (IJ) $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}k \\ y=0 \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k \end{cases}$

3. K(–1 ; 0 ; 2)

Intersections en tout genre

71. 1. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

2. (ABC) : $-2x+y+3z-6=0$

3. $\overrightarrow{\text{DE}}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan.

4. (DE) $\begin{cases} x=6-2k \\ y=-7+k \\ z=-1+3k \end{cases}$

5. F(2 ; –5 ; 5)

72. Leurs vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et le système :

$\begin{cases} -1+3k=2-k' \\ 1+3k=1+2k' \\ -3+k=-3k' \end{cases}$ n'a pas de solution donc elles sont orthogonales.

73. 1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Pour $k=0$ le point (2 ; –1 ; 0) n'appartient pas au plan.

3. Pour $k=1$.

4. $-x+y+z=0$

5. $\begin{cases} x=1-4t \\ y=1-5t \\ z=t \end{cases}$

Projetés orthogonaux

74. 1. $-x+y+z=0$

2. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

3. a) $\text{K}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

b) $d=\text{BK}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

4. a) $\text{K}'\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

b) $d'=\text{BK}'=\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. $\begin{cases} x=k \\ y=1+2k \\ z=1-k \end{cases}$

6. $\text{H}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

7. $\text{BH}^2=\frac{18}{9}=d^2+d'2$

8.Théorème de Pythagore.

75. 1. $\overrightarrow{\text{MN}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur normal.

(MNP) $x+2y+2z-2=0$

2. $d\begin{cases} x = 1+k \\ y = 1+2k \\ z = 1+2k \end{cases}$

3. $K\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ et GK = 1.

4. $V = \dfrac{1}{3} \times \text{Aire(MEDI)} \times GK = \dfrac{3}{8}$

76. 1. $d\begin{cases} x = -2+k \\ y = 8+5k \\ z = 4-k \end{cases}$ et $d'\begin{cases} x = 5+2k' \\ y = 1+k' \\ z = -3+k' \end{cases}$

2. Leurs vecteurs directeurs non colinéaires.

3. H pour $k = -1$ et K pour $k' = -1$.

4. $\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs.

5. $HK = 3\sqrt{14}$

77. Travail de l'élève.

Exercices bilan p. 324

78. Quatre points

1. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc BCD rectangle en C et son aire vaut :

$\dfrac{BC \times CD}{2} = \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{14}.$

2. a) Il est orthogonal aux deux vecteurs précédents.

b) (BCD) $-2x + 3y + z - 1 = 0$

3. $d\begin{cases} x = 5-2k \\ y = -5+3k \\ z = 2+k \end{cases}$

4. $H\left(\dfrac{11}{7};\dfrac{1}{7};\dfrac{26}{7}\right)$

5. $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2}\sqrt{14} \times AH = 20$

6. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 66 = \sqrt{76}\sqrt{61}\cos\widehat{BAC}$ d'où $\widehat{BAC} \approx 14{,}2°$.

79. Deux plans

1. Oui.

2. a) $-x + y - z = 0$

b) Pour $k = 1$.

3. a) Oui.

b) $A'\left(\dfrac{1}{2};2;\dfrac{3}{2}\right)$ et $B'(-1 ; 1 ; 2)$ donnent $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui sont orthogonaux.

c) Pour $k = -1$.

d) $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{AA' \times BB'}{2} \times SH = 4$

80. Parallélisme

1. a) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ non orthogonaux.

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 11 = \sqrt{101}\sqrt{60}\cos\widehat{AOB}$ d'où $\widehat{AOB} \approx 81{,}9°$.

2. Oui.

3. (CA) $\begin{cases} x = 10k \\ y = 0 \\ z = 5-4k \end{cases}$

4. $D\left(0;0;\dfrac{5}{2}\right)$ donc une équation du plan est : $7x + 9y - 70z + 175 = 0$.

5. F(5 ; 0 ; 3)

6. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} \dfrac{9}{2} \\ -\dfrac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ colinéaires.

81. Dans un cube

1. $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

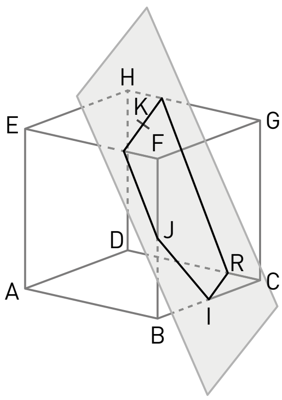
2. a) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.

b) Oui.

3. a) (CD) $\begin{cases}x=k\\y=1\\z=0\end{cases}$

b) Pour $k=\frac{3}{4}$.

4. a) b)



82. Distance

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$ orthogonaux au vecteur normal.

2. (ABC) $4x+2y+3z-12=0$

3. $d\begin{cases}x=-5+4k\\y=2k\\z=1+3k\end{cases}$

4. H(−1 ; 2 ; 4)

5. $DH=\sqrt{29}$

83. Points non alignés

1. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$, $AB=\sqrt{17}$ et $AC=\sqrt{5}$.

b) $\cos\widehat{BAC}=\frac{2}{\sqrt{85}}$ d'où $\widehat{BAC}\approx 77°$.

c) Angle différent de 0 ou π.

2. Oui.

3. Vecteurs normaux non colinéaires.

4. Le point (−2 ; −4 ; −1).

Préparer le BAC
Je me teste p. 326

84. C	**85. B**
86. D	**87. C**
88. A et **B**	**89. D**
90. A	**91. A**
92. D	**93. A**

Préparer le BAC
Je révise p. 327

94. Distance

1. a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=-1+1+0=0$

c) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=-1+0+1=0$

d) La droite est perpendiculaire au plan.

2. Dans le plan AEGC, K est aux 2/3 à partir de E jusqu'au milieu de [AC].

3. a) (BDE) $x+y+z-1=0$

b) $d\begin{cases}x=k\\y=1+k\\z=1+k\end{cases}$

c) $L\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

d) $HL=\frac{\sqrt{3}}{3}$

95. Aire variable

1. $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{6a}$

2. a) $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{a^2+2}(a^2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD})$

b) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a^2+2}$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{a^2+2}$ par soustraction on déduit : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$.

c) De même $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.

d) K est l'intersection des hauteurs.

3. a) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$.

b) La droite est perpendiculaire au plan (MBD).

4. $BD = \sqrt{2}$ et $BM = MD = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$

sa hauteur vaut : $\sqrt{\dfrac{a^2+1}{a^2} - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2+2}}{a\sqrt{2}}$

et l'aire vaut : $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{a\sqrt{2}}$.

96. Intersection

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents donc la droite est perpendiculaire au plan.

3. (ABD) $-2x + y + 3z - 6 = 0$

4. (CE) $\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = -7 + k \\ z = -1 + 3k \end{cases}$

5. On remplace pour obtenir $k = 2$et donc F(2 ; –5 ; 5).

97. Un volume

1. $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. Leur produit scalaire est nul.

3. a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vérifie le système :

$\begin{cases} -a - \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{4}c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$ dont une solution est $\begin{pmatrix}\dfrac{5}{4}\\-2\\1\end{pmatrix}$.

b) (MNP) $\dfrac{5}{4}x - 2y + z = 0$

4. $d\begin{cases} x = 1 + \dfrac{5}{4}k \\ y = -2k \\ z = 1 + k \end{cases}$

5. On trouve bien K.

6. $V = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{MN\times MP}{2}\times FK = \dfrac{1}{6}\times\dfrac{\sqrt{21}}{4}\times\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} = \dfrac{3}{8}$

98. Pyramide

1. (SB) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + k \\ z = -3k \end{cases}$ pour $k = -\dfrac{1}{3}$

2. a) C'est le théorème du toit.

b) $V\left(-\dfrac{2}{3} ; 0 ; 1\right)$

3. a) (AE) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -k \\ z = 0 \end{cases}$ pour $k = \dfrac{1}{6}$ donne K

et $\overrightarrow{UK}\cdot\overrightarrow{AE} = 0$.

b) L'aire vaut :

$\dfrac{1}{2}\times(UV + AE)\times UK = \dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\dfrac{\sqrt{86}}{6} = \dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

Exercices vers le supérieur p. 329

99. Distance minimale

1. $\vec{n_1}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Oui.

3. a) Oui.

b) $AM^2 = 14k^2 - 14k + 21$

$= 7(2k^2 - 2k + 3)$

c) Décroissante puis croissante avec un minimum pour $x = \frac{1}{2}$.

d) $H\left(-6\,;-\frac{13}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

4. $2x + 3y + z + 31 = 0$

5. H appartient au plan.

100. Perpendiculaire commune

1. Le système $\begin{cases}-k = k'\\3+3k=0\\1-k=0\end{cases}$ n'a pas de solution.

2. $a = 1$ et $b = 3$

3. Oui.

4. $A\left(\frac{4}{5}\,;\frac{3}{5}\,;\frac{9}{5}\right)$

5. $\begin{cases}x=\frac{4}{5}\\y=\frac{3}{5}+t\\z=\frac{9}{5}+3\end{cases}$ coupe d au point $B\left(\frac{4}{5}\,;0\,;0\right)$.

6. $AB = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

101. Droite ou plan ?

1. $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$

2. Plan.

3. $-5x - 6y + 7z + 24 = 0$

102. Tétraèdre

1. (CE) $\begin{cases}x=k\\y=1-k\\z=k\end{cases}$

2. (AFH) $x - y + z - 1 = 0$

3. $K\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$

4. Vecteurs normal et directeur égaux.

5. $EK = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{AF} = 0$ hauteur et orthocentre.

7. Type 2.

103. Trois plans

1. $\vec{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n_3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

2. Sécants.

3. $d\begin{cases}x=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}k\\y=4+k\\z=k\end{cases}$

4. Sécants et perpendiculaires.

5. Un point unique.

104. Piège

1. Vecteurs normaux orthogonaux.

2. Oui.

3. Oui.

4. (AB) $\begin{cases}x=1-2k\\y=1-2k\\z=3+2k\end{cases}$ et (CD) $\begin{cases}x=1-4k'\\y=6-6k'\\z=2-4k'\end{cases}$

leur intersection est vide donc les droites ne sont pas coplanaires.

105. Plan médiateur

1. MA = MB

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$

$= (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$

$\Leftrightarrow 4x + 3y + z + 1 = 0$

2. Milieu $\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\\-1\end{pmatrix}$

4. C'est le plan perpendiculaire au segment et passant par son milieu.

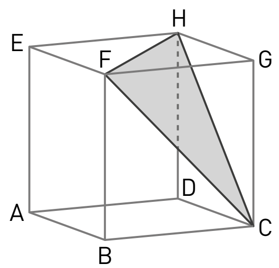
106. Théorème de De Gua De Malves

L'aire de BCD est : $\dfrac{1}{2}\times a\sqrt{2}\times\dfrac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$ et la somme des carrés des aires des trois autres faces est :

$$\frac{1}{4}(AB^2AD^2+AB^2AC^2+AD^2AC^2)=\frac{1}{4}\times 3a^4=\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

107. Représenter

À l'aide d'un cube de côté 4, l'ensemble cherché est le plan (CFH) limité au cube.



108. Point variable

1. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CE}$ donc parallèle au plan (IJK).

3. (BDM) $-x-y+z+1=0$ et (CE) $\begin{cases}x=1-k\\y=1-k\\z=k\end{cases}$ se coupent en $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

109. Trois méthodes

A. Avec le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE})$

1. C(1 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1) et $K\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$.

2. $\overrightarrow{HP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{DQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DG}$. donnent $P\left(0;\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ et $Q\left(\dfrac{1}{3};1;\dfrac{1}{3}\right)$.

3. $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

B. Avec une étude géométrique

1. À l'aide du théorème de Thalès.

2. (DG) est orthogonale à (CH) et (CE) et (AH) est orthogonale à (DE) et (CD).

3. (CE) est l'intersection des deux plans (CEH) et (CDE).

C. Avec le calcul vectoriel

1. $3\overrightarrow{DP}=3\overrightarrow{DH}+3\overrightarrow{HP}=3\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DA}$

et $3\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$

2. Par soustraction.

3. Ces deux produits scalaires sont nuls.

Donc (PQ) est orthogonale à (DG) et (AH).

110. Double pyramide

1. (ML) est parallèle à (BD) et (IN) à (BF) qui sont perpendiculaires.

2. a) $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

b) Leur produit scalaire est nul.

c) (NCI) a pour vecteur normal $\overrightarrow{ML}$ d'où : $x - y = 0$.

3. a) On vérifie.

b) $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc perpendiculaire.

c) Il s'agit de la droite (EG).

111. Bicoin

A. 1. *d* est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC).

Donc (BD) est orthogonale à (AC).

(AC) est perpendiculaire à (AB) car ABC est rectangle en A.

(AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD), on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2. *d* est perpendiculaire à P donc ABD et CBD sont rectangle en B. ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

Donc toute droite de ce plan, donc en particulier (AC), est perpendiculaire à (AD) en A. Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC. Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, ABCD est bien un bicoin.

3. a) [CD] est l'hypoténuse de BCD, donc le côté le plus grand : CD > CB et CD >BD. [CD] est l'hypoténuse de de ACD,

donc CD > CA, CD > AD.

Or [AD] est l'hypoténuse de ABD

donc AD > AB et d'après le résultat précédent

CD > AD > AB.

Finalement [CD] est la plus longue arête du bicoin car elle est plus longue que les cinq autres

b) I milieu de l'hypoténuse de BCD rectangle en D est le centre du cercle circonscrit à BCD on a alors IB = IC = ID.

De même dans ACD rectangle en A, I milieu de l'hypoténuse [CD] est le centre du cercle circonscrit à ACD et on a :

ID = IC = IA.

Finalement IA = IB = IC = ID, donc I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

B. 1. $2x - 2y + z + 1 = 0$

2. Pour $t = 2$.

3. On vérifie pour C et $AB^2 = 36 = AC^2$, $BC^2 = 72$ donc ABC rectangle et isocèle en A.

4. a) $M \in d$ et $B \in d$ donc $d = (MB)$. De plus B et A sont deux points distincts de P donc $(AB) \subset P$ et on sait que *d* est perpendiculaire à P donc orthogonale à toute droite de P. On en déduit que (MB) est perpendiculaire à (AB).

Finalement on a donc bien ABM rectangle en B.

b) BM = BA

$\Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (-2t + 4)^2 + (t - 2)^2 = 36$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t = 0$ donc $t = 0$ ou $t = 4$.

c) $M_1(1 ; 9 ; -3)$ et $M_2(9 ; 1 ; 1)$.

C. ABCD est un bicoin car ABC est rectangle en B (voir question **3.**) et D est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par B. D'après la question **3.b.** de la partie **A**, on sait alors que le milieu I de [CD] est équidistant des quatre sommets du bicoin.

Le centre de la sphère circonscrite à ABCD est donc I(8 ; 2 ; −4) milieu de [CD].

Le rayon de la sphère est $CI = 3\sqrt{3}$.

112. Des drones

A. Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2k \\ z = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}k \end{cases}$

2. a) $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PU}\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{n}$.

b) $y - z - 10 = 0$

3. On résout le système et cela donne I pour $k = \dfrac{25}{6}$.

4. Les points se situant sur l'obstacle PQTU ont une cote comprise entre 0 et 1.

Or, le point I, intersection des droites (AB), décrivant la trajectoire du drone d'Alex, et du plan (PQU), dont l'obstacle est le rectangle PQTU, a une cote de 7/3 > 2, donc ne peut se situer sur le rectangle PQTU.

Ainsi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

B. Distance minimale entre les deux trajectoires

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD}$

2. D'après ce qui est dit dans l'énoncé, la distance MN est minimale si et seulement si (MN) et (AB) sont perpendiculaires et (MN) et (CD) sont perpendiculaires.

Ceci équivaut à $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux et $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux soit au système : $\begin{cases} 2(2-2a) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a = 0 \\ -2(2-2b) = 0 \end{cases}$

d'où $b = 1$ et $a = \frac{16}{17}$.

3. Alors $MN = \frac{2\sqrt{17}}{17} \approx 0{,}485071$, l'unité étant égale à 1 décamètre la distance minimale est donc environ $4{,}85 > 4$: la consigne est respectée.

113. Produit vectoriel

1. On calcule les produits scalaires qui sont bien nuls.

2. $\vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} bc' = b'c \\ ca' = c'a \\ ab' = a'b \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow$ colinéaires.

3. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non colinéaires.

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) (ABC) $-2x + 3y + z + 5 = 0$

4. On vérifie bien.

114 .1. a) $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{n}$.

b) $4x + 4y - 3z - 1 = 0$

c) $4x + 4y - 3z + 1 = 0$

d) $M'\left(0 ; 0 ; \frac{1}{3}\right)$

2. a) $\begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z = 1 - 3k \end{cases}$

b) (ABC) $z = 0$ donc $L\left(\frac{4}{3} ; \frac{4}{3} ; 0\right)$.

c) Le point L de Δ n'appartient pas au plan (ABF) mais E appartient à ce plan; les droites Δ et (BF) ne sont donc pas sécantes. Les droites Δ et (CG) sont sécantes au point $\left(1 ; 1 ; \frac{1}{4}\right)$.

115. Droites sécantes ?

1. a) P(2 ; 0 ; 0), Q(0 ; 0 ; 2), R(0 ; 4 ; 6) et Ω(3 ; 3 ; 3).

b) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -2 + 2c = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = -2 + 4b + 6c = 0 \end{cases}$

d'où $c = 1$ et $b = -1$.

c) Oui.

2. a) $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$

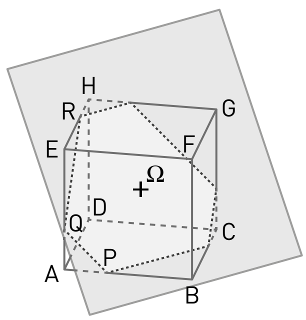
b) Oui.

c) $\Omega I = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3. a) Oui.

b) $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ colinéaires.

c) La section est :



116. A. 1. $I\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

2. a) $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{n}$.

b) $-x + 3y + 5z - 4 = 0$

3. a) $\begin{cases}x = 1 - k\\y = 3k\\z = 5k\end{cases}$

b) $M\left(\frac{6}{7}\,;\frac{3}{7}\,;\frac{5}{7}\right)$

4. a) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{7} = 1\times\frac{\sqrt{35}}{7}\times\cos\widehat{MBF}$ d'où $\widehat{MBF}\approx 32°$.

B. 1. Les faces (BCGF) et (ADHE) sont parallèles. Le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FJ) et (KL).

De même les faces (ABFE) et (DCGH) sont parallèles : le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FK) et (JL).

Le quadrilatère (FJLK) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.

2. $FJ^2 = 1+\frac{a^2}{4} = JL^2 = 1 + (a - 1)^2 \Leftrightarrow (3a - 2)(a - 2) = 0$

donc $a = 2$ ou $a = \frac{2}{3}$ or $0 \leqslant a \leqslant 1$donc une seule solution.

Travaux pratiques p. 332-333

TP 1. Étudier la position relative de deux plans

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier la position entre deux plans.

A. Rechercher l'intersection

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. $\begin{cases}x = 3 - \frac{13}{2}z\\y = 4 - 8z\end{cases}$

3. À une droite.

4. Point (3 ;4 ;0) et vecteur $\begin{pmatrix}-\frac{13}{2}\\-8\\1\end{pmatrix}$

5. Oui.

B. Rechercher un vecteur orthogonal à deux autres

1. $\begin{cases}4a - 3b + 2c = 0\\-2a + b - 5c = 0\end{cases}$

2. Deux équations et trois inconnues.

3. $\begin{cases}a = -\frac{13}{2}c\\b = -8c\end{cases}$

4. Colinéaires.

5. Le même !

TP 2. Autour de la sphère

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir l'équation d'une sphère.

A. Équation

1. AM = R

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$

2. $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

3. Centre (0 ; –1 ; 2) et rayon R = 3.

B. Position de cette sphère avec un plan

1. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ de centre B(2 ; –3 ; –1) et de rayon $r = 3$.

2. $H\left(\frac{8}{3}\,;-\frac{7}{3}\,;-\frac{1}{3}\right)$

3. $BH = \frac{2\sqrt{3}}{3} < 3$ donc sécant.

4. De même le projeté de B sur ce plan est K(0 ; –1 ; 0) et BK = 3.

5. Plan tangent un seul point d'intersection K.

TP 3. Sphère circonscrite à un tétraèdre

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la position d'une sphère et d'un tétraèdre.

A. Cas général

1. Intersection des médiatrices.

2. D'après Pythagore.

3. Équidistant car dans le plan médiateur.

B. Cas de la Terre

1. $GO = \frac{1}{4}GD = \frac{1}{4}(R + OG)$ d'où $OG = \frac{R}{3}$.

2. On a : $\sin\widehat{GAO} = \frac{1}{3}$ donc $\widehat{GAO} \approx 19{,}47°$.

3. La latitude est 19,47°.

TP 4. Fonction scalaire de Leibniz

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la fonction scalaire de Leibniz.

A. $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_i})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i MA^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AA_i} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i AA_i^2$$

$$= 0 + 2\overrightarrow{MA}\cdot\vec{u} + f(A)$$

B. $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$

$$f(M) = f(G) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i MG^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA_i}$$

$$= f(G) + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i MG^2$$

C. Applications

1. a) $f(M) = MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2$

b) Comme 1 + 2 – 3 = 0 alors

$f(M) = 2AB^2 - 3AC^2 + 2\overrightarrow{MA}\cdot(2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = k$

Si $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $2AB^2 - 3AC^2 \neq k$ alors pas de solution.

Si $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $2AB^2 - 3AC^2 = k$ alors espace entier.

Si $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors une droite perpendiculaire à ce vecteur.

2. a) $f(M) = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 4MG^2 + f(G)$

b) Si $k < f(G)$ alors pas de solution.

Si $k = f(G)$ alors le point G.

Si $k > f(G)$ alors une sphère.