Nom et prénom : ....

Exercice 1.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points : $A(1\ ;\ 2\ ;\ 7)$, $B(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $C(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $D(3\ ;\ -6\ ;\ 1)$ et $E(4\ ;\ -8\ ;\ -4)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\overrightarrow{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x-2y+z-4=0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite $\mathscr{D}$ de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2t+3 \\ y & = & -4t+5 \\ z & = & 2t-1 \end{array}\right. \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

a. La droite $\mathscr{D}$ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

Correction :

Sujet tiré de Baccalauréat S - Centres étrangers - 12 juin 2014

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points : $A(1\ ;\ 2\ ;\ 7)$, $B(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $C(3\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $D(3\ ;\ -6\ ;\ 1)$ et $E(4\ ;\ -8\ ;\ -4)$.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **a.** $\overrightarrow{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ un vecteur normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 1-2b-5c = 0$; et

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2-b-4c = 0$.

Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 1-2b-5c & = & 0 \\ 2-b-4c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2b-5c & = & 0 \\ -4+2b+8c & = & 0 \end{cases} \Rightarrow -3+3c=0 \iff c=1$$

en remplaçant dans la deuxième équation on a $b = 2-4c = 2-4 = -2$.

b. On sait que si $\overrightarrow{u}(1~;~-2~;~1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), une équation de ce plan est : $\mathrm{M}(x~;~y~;~z) \in$ (ABC) $\iff x-2y+z+d=0$.

Or A$(1~;~2~;~7) \in$ (ABC) $\iff 1-4+7+d=0 \iff d=-4$.

Donc $\mathrm{M}(x~;~y~;~z) \in$ (ABC) $\iff x-2y+z-4=0$.

c. D$(3~;~-6~;~1) \in$ (ABC) $\iff 3+12+1-4=0 \iff 12=0$: cette égalité est fausse

Le point D n'appartient pas au plan (ABC).

3. **a.** Cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}(2~;~-4~;~2)$ et le le vecteur $\overrightarrow{u}(1~;~-2~;~1)$ lui est normal au plan (ABC).

Or $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u}$: le vecteur $\overrightarrow{w}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ est lui aussi normal au plan (ABC).

b. Le point commun , s'il existe, a ses coordonnées qui vérifient les équations de la droite et l'équation du plan, soit :

$$\begin{cases} x & = & 2t+3 \\ y & = & -4t+5 \\ z & = & 2t-1 \\ x-2y+z-4 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow 2t+3-2(-4t+5)+2t-1-4=0 \iff$$

$2t+3+8t-10+2t-1-4=0 \iff 12t-12=0 \iff t=1$.

En remplaçant dans les équations de la droite, on obtient :

$x=2+3=5, \quad y=-4+5=1, \quad z=2-1=1$.

Donc H(5 ; 1 ; 1).

4. On a $\overrightarrow{DE}(1~;~-2~;~-5)$.

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB}$; donc la droite (DE) est parallèle à la droite (AB)

donc la droite (DE) est parallèle au plan (ABC)

et on a vu que D nappartientpas au plan (ABC)

donc la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

Exercice 2.

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points A$(1 ; 2 ; 5)$, B$(-1\ ;\ 6\ ;\ 4)$, C$(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$ et D$(-1\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.
2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.

   Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x-2z+9=0$.
3. **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t-5 \\ y = -3t+14 \\ z = -\frac{3}{2}t+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$
4. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+5z+7=0$

   et $\mathscr{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x-y+z+5=0$.

   Proposition 4 : Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

Correction :

Sujet tiré de Baccalauréat S - Antilles-Guyane - 19 juin 2014

1. La proposition est fausse

   on a : $\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 4\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{AC}(6\ ;\ -12\ ;\ 3)$,

   Alors $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB})$ d'où ces deux vecteurs sont colinéaires

   donc les trois points A, B et C sont alignés et ne définissent pas un plan.
2. La proposition est vraie

   on vérifie aisément que les coordonnées de chacun des points A, B et D vérifient l'équation du plan donné $x-2z+9=0$.
3. La proposition est fausse

   la droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{3}{2}\ ;\ -3\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$

   ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, il ne peut diriger (AC).
4. La proposition est fausse

   le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$

le plan $\mathscr{P}'$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}'(-3 ~;~ -1 ~;~ 1)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles.