



Nom et prénom :

Exercice 1. ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :

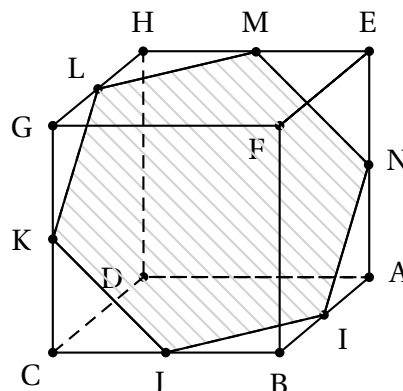
$D(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 0 ; 0)$, $A(0 ; 1 ; 0)$,

$H(0 ; 0 ; 1)$ et $E(0 ; 1 ; 1)$.

Soit I le milieu de [AB].

Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [BC], [CG], [GH], [HE] et [AE].



1.
 - a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment [AE].
3.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).
 - b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre FBGE.

Correction :

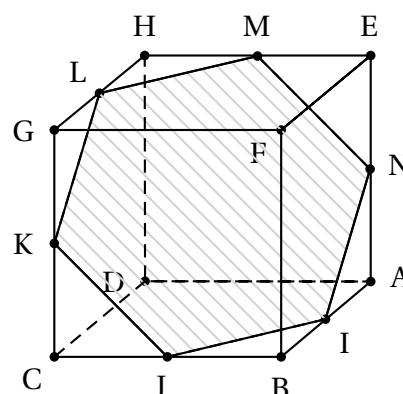
Sujet tiré de Baccalauréat S - Antilles-Guyane - 20 juin 2016

ABCDEFGH est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a : $D(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 0 ; 0)$, $A(0 ; 1 ; 0)$, $H(0 ; 0 ; 1)$ et $E(0 ; 1 ; 1)$.

Soit I le milieu de [AB].





Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [BC], [CG], [GH], [HE] et [AE].

1. a. $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont clairement pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 - 1 + 1 = 0$

et $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$.

$\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ non colinéaires du plan (BGE)

Donc $\overrightarrow{DF}$ vecteur normal à ce plan (BGE)

b. $\mathcal{P}$ et (BGE) sont parallèles, donc $\overrightarrow{DF}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Une équation cartésienne de ce plan est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$

Comme $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$ alors $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$

D'où la forme d'une équation cartésienne plan $\mathcal{P}$: $x + y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

Comme le point I $\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ appartient au plan $\mathcal{P}$

Alors $\frac{1}{2} + 1 + 0 + d = 0 \iff d = -\frac{3}{2}$.

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$

2. Le point N appartient à [AE] alors ses coordonnées sont donc $(0; 1; z_N)$.

Il appartient au plan $\mathcal{P}$ d'où $0 + 1 + z_N = \frac{3}{2} \iff z_N = \frac{1}{2}$.

Ainsi N est le milieu de [AE]

3. a. On sait que $\overrightarrow{HB}(1;1;-1)$

Alors une représentation paramétrique de (HB) est
$$\begin{cases} x = x_H + t \\ y = y_H + t \\ z = z_H - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Donc une représentation paramétrique de (HB) :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b. On a $\overrightarrow{HB}(1;1;-1)$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1) = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0$.

D'où les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas orthogonaux

Alors le plan $\mathcal{P}$ et la droite (HB) ne sont pas parallèles



Donc le plan $\mathcal{P}$ et la droite (HB) sont sécants

$$\text{On doit résoudre } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x + y + z - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{On trouve } -t - t + 1 + t - \frac{3}{2} = 0 \iff -t - \frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}.$$

Donc (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

4. Comme BGF est rectangle en F alors son aire est $\mathcal{A}(\text{BGF}) = \frac{FG \times FB}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Le volume du tétraèdre FBGE est alors $\mathcal{V}(\text{FBGE}) = \frac{\mathcal{A}(\text{BGF}) \times FE}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3}$.

Donc $\mathcal{V}(\text{FBGE}) = \frac{1}{6}$.

Exercice 2. Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A (12 ; 0 ; 0), B (0 ; -15 ; 0), C (0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; -6), E (7 ; 3 ; -3);
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1 : Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point A est : $2x + y + 2z - 24 = 0$

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : La droite (DE) et le plan $\mathcal{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4 : La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Correction :

Sujet tiré de Baccalauréat S - Centres étrangers - 12 juin 2013

Affirmation 1

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ a pour coordonnées (2 ; 1 ; -2).



Un vecteur normal au plan dont une équation est $2x + y + 2z - 24 = 0$ a pour coordonnées $(2 ; 1 ; 2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

Affirmation 1 : fausse

Affirmation 2

Une représentation paramétrique proposée de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour $t = -1$ on trouve les coordonnées de A et pour $t = 3$ celles de C.

Affirmation 2 : vraie

Affirmation 3

La droite (DE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DE}(5 ; -4 ; 3)$

et on a vu que $\vec{u}(2 ; 1 ; -2)$ est un vecteur normal au plan P.

Or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{DE} = 10 - 4 - 6 = 0$

Donc la droite (DE) est parallèle au plan P.

Comme les coordonnées de E ne vérifient pas l'équation de P : $4 + 7 + 12 - 5 = 0$ est une égalité fausse

Alors la droite (DE) est strictement parallèle au plan (P).

Affirmation 3 : fausse

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}.$

D'où $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = -60 + 60 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux ;

et $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = -60 + 60 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont manifestement pas colinéaires

Donc le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc orthogonal à ce plan.

Affirmation 4 : vraie