



Nom et prénom :

Exercice 1.

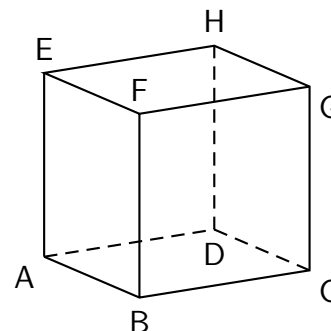
On considère un cube ABCDEFGH.

1. a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).



2. L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculer le volume de la pyramide BDEG.

Correction :

Sujet tiré de Baccalauréat S - Amérique du Sud - 21 novembre 2017

1. a. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$

- [AC] et [BD] sont les deux diagonales du carré ABCD donc les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ;
on en déduit que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

- La droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ;
on en déduit que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$;

Donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

On en déduit que $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$.

c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (BDE) ;
le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BDE)
donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (BDE).

On en déduit que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).



3. L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$.

D'après la question 1. c., la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE)

donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

Le plan (BDE) est l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BM}$.

Le point B a pour coordonnées $(1 ; 0 ; 0)$

donc le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(x-1 ; y ; z)$.

$$\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BM} \iff \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff (x-1) \times 1 + y \times 1 + z \times 1 = 0 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Le plan (BDE) a donc pour équation $x + y + z - 1 = 0$.

b. ■ On détermine une représentation paramétrique de la droite (AG).

Cette droite passe par le point A de coordonnées $(0 ; 0 ; 0)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AG}$ de coordonnées $(1 ; 1 ; 1)$.

$$\text{La droite (AG) a donc pour représentation paramétrique : } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

■ Le point K d'intersection de (AG) et (BDE) a ses coordonnées qui sont solutions du

$$\text{système : } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

On déduit de ce système que $t + t + t - 1 = 0$ donc que $t = \frac{1}{3}$.

Le point K a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le volume de la pyramide BDEG est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times h \times \mathcal{A}$ où h est la hauteur de la pyramide issue de G. d'après les questions précédentes, cette hauteur h est la longueur GK.

$$GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$



Exercice 2.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points :

$A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1), D(2 ; 1 ; -1), E(-1 ; -2 ; 3)$ et $F(-2 ; -3 ; 4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Correction :

Sujet tiré de baccalauréat S - Métropole-La Réunion - 20 juin 2016

Affirmation 1

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Puisque $\frac{-2}{2} \neq \frac{-2}{-2}$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles.

Les points A, B et C ne sont donc pas alignés : **l'affirmation 1 est fausse.**

Affirmation 2

Calculons $\vec{n} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : on en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) : **l'affirmation 2 est vraie.**

Affirmation 3

Première méthode :

- Montrons tout d'abord que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants :



La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux.

Calculons $\vec{n} \cdot \vec{EF}$: $\vec{n} \cdot \vec{EF} = 0 \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2$

Puisque $\vec{n} \cdot \vec{EF} \neq 0$, alors la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants.

• Puisque le milieu I du segment [BC] appartient manifestement au plan (ABC), il suffit de vérifier si I appartient à la droite (EF) :

Le milieu I du segment [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2} ; \frac{z_B + z_C}{2} \right) = (1, 0, 1)$ Les vecteurs

$\vec{EF}$ et $\vec{EI}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Puisque $\vec{EI} = -2\vec{EF}$, les points E, I et F sont alignés : $I \in (EF)$

On a prouvé que la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le milieu du segment [BC] : **l'affirmation 3 est vraie.**

Seconde méthode :

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EF) :

La droite (EF) passe par E(-1 ; -2 ; 3) et est dirigée par $\vec{EF} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

• Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC), noté $\mathcal{P}$: Puisque $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan

$\mathcal{P}$, ce dernier a une équation de la forme $y - z + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$

Puisque A(1,2,3) est un point de $\mathcal{P}$, alors $y_A - z_A + d = 0$, soit $d = -y_A + z_A = 1$

Une équation du plan $\mathcal{P}$ est $y - z + 1 = 0$

• Déterminons $(EF) \cap \mathcal{P}$:



Soit M un point de la droite (EF). IL existe alors un nombre réel t tel que

$$\begin{cases} x_M = -1 - t \\ y_M = -2 - t \\ z_M = 3 + t \end{cases}$$

M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $y_M - z_M + 1 = 0$, i.e : $-2 - t - (3 + t) + 1 = 0$ soit $t = -2$

La droite (EF) et le plan $\mathcal{P}$ sont donc sécants en un point I de coordonnées $(-1 - (-2), -2 - (-2), 3 + (-2)) = (1, 0, 1)$

Reste à vérifier que I est le milieu de [BC] :

Le milieu du segment [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}, \frac{z_B + z_C}{2}\right) = (1, 0, 1)$

On en déduit que I est le milieu de [BC] **l'affirmation 3 est vraie.**

Affirmation 4

Première méthode :

• Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

N'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires : les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles

• Les droites (AB) et (CD) sont donc soit sécantes, soit non coplanaires, selon que le point D appartient ou non au plan (ABC) :

- Une première manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

D appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Puisque $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = -1 + 4 = 3 \neq 0$, alors D n'appartient pas au plan (ABC).

- Une seconde manière de montrer que D n'appartient pas au plan (ABC) :

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, D appartient au plan (ABC) si et seulement

si le vecteur $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ s'écrit en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, autrement dit si et seulement si



il existe deux nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

$$\text{L'égalité ci-dessus est équivalente au système : } \begin{cases} 1 = 2\alpha - 2\beta \\ -1 = -2\alpha - 2\beta \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant incompatibles, D n'est pas un point du plan (ABC). Les droites (AB) et (CD) ne sont donc pas coplanaires : **l'affirmation 4 est fausse.**

Seconde méthode :

- Déterminons des représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) :

$$\text{La droite (AB) passe par } A(1; 2; 3) \text{ et est dirigée par } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{La droite (CD) passe par } C(-1; 0; 1) \text{ et est dirigée par } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\bullet \text{ Déterminons } (AB) \cap (CD) : \text{ Résolvons pour cela le système } \begin{cases} 1 + 2t = -1 + 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 3 - 2t = t' \end{cases} \quad (1) :$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3t' = -2 \\ 2t + t' = 2 \\ 2t + t' = 3 \end{cases}$$

Le système n'ayant pas de solution, on en déduit que les droites ne sont pas sécantes : **l'affirmation 4 est fausse.**