Produit scalaire et plans de l'espace

Histoire des mathématiques

Si les vecteurs peuvent etre additionnés entre eux ou multipliés par un réel, il n'a pas encore été défini ce que pouvait etre le produit de deux vecteurs. Celui-ci n'est pas un vecteur mais un nombre.

De par la nature de son résultat, on le nomme produit scalaire. Le produit scalaire est à l'origine une notion physique : le produit linéaire.

H Grassman

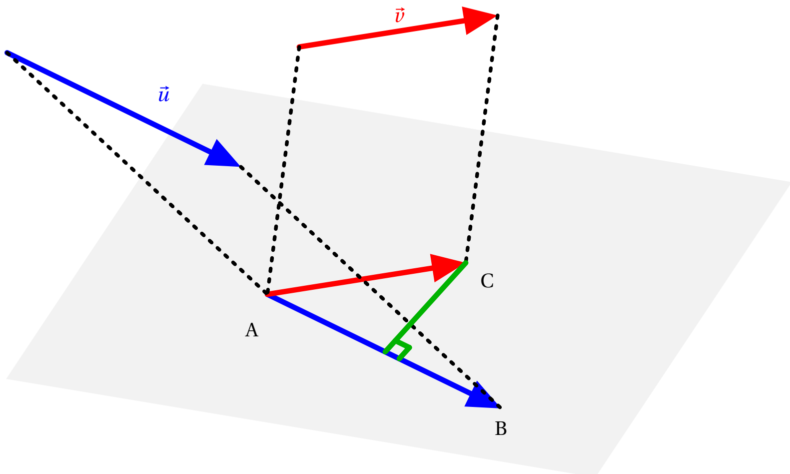
Cet outil fut élaboré par le physicien prussien **Hermann Grassman** (1809-1877) et le physicien américain **Josiah Gibbs** (1839-1903). Mais c'est le mathématicien irlandais **William Hamilton** (1805-1865) qui en donna une premiere définition mathématique en 1853.

I Produit scalaire dans l'espace

On considere deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans ce plan, on le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$



Définition 1 : Produit scalaire

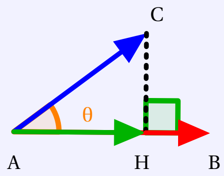
Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Rappels

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{u}$, lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.
3. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.
   - s'ils ont le meme sens : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = AB \times CD$
   - s'ils sont de sens contraires : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -AB \times CD$
4. Soient trois points A, B , C avec A et B distincts.
   Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

si meme sens

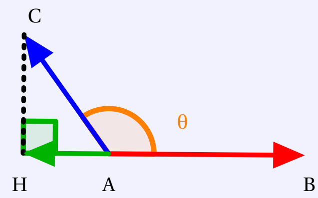
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = AB \times AH$$



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

si sens contraire

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$$

Exemple : ABCDEFGHest un cube d'arete a

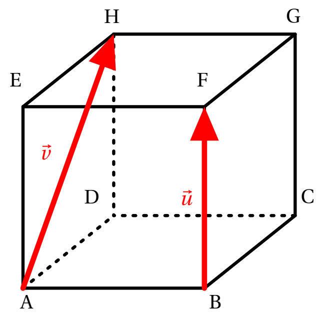
- On note $\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

  Alors $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ ....

  Donc $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ....
- comme dans le plan (AGC), C est le projeté orthogonal de G sur (AC) :

  $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}$ ....
- pour calculer $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AG}$,

  $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AG}$ ....



Propriété 1 : Propriétés algébriques

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel, alors :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ *(commutativité)*
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ $\quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ *(distributivité)*
- $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$ et $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2-\vec{v}^2$

Remarque : Seul le premier point recquiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

Démonstration :

- Pour le premier point, on exprime analytiquement le membre de gauche et le membre de droite puis on compare les expressions obtenues.
- Pour les trois derniers points, on se place dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où l'on utilise les propriétés établies dans le plan en Première. Plus particulièrement, l'avant-dernier point provient des formules avec les carrés scalaires.

Exemple : Soit ABCDEFGH, un cube de côté 1 et I le centre de la face EFGH. Déterminer $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{ID}$

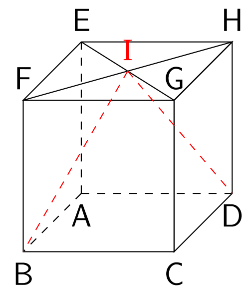
. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

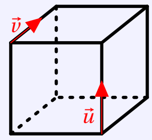
. . . .

. . . .

Définition 2 : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux s'ils dirigent des droites orthogonales.

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.



Propriété : orthogonalité vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ ....

<u>Démonstration :</u>

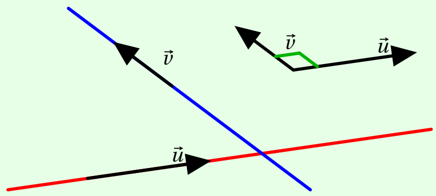
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ par définition
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, considérons les points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

  Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi les droites (AB) et (AC) sont orthogonales

  ssi $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$ ssi $cos\widehat{BAC} = 0$ ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Propriété 2 : Orthogonalité

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont ....



<u>Démonstration :</u>

Étant donné la colinéarité de tous les vecteurs directeurs d'une même droite, il suffit de démontrer la propriété en choisissant un vecteur directeur par droite.

Soient (d_1) et (d_2) deux droites, dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Considérons (Δ_1) et (Δ_2), les parallèles respectives à (d_1) et (d_2) passant par un même point ; elles sont aussi dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

(d_1) est orthogonale à (d_2) si, par définition, (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires c'est-à-dire si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.

Propriété 3 : Expression analytique du produit scalaire

L'espace est muni d'un repere orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} =$ ....

En particulier : $\vec{u}\cdot\vec{u} =$... et $||\vec{u}|| =$ ....

Démonstration :

- Soit $\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$; $\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}$

  On a $\vec{i}\,.\,\vec{i} = ||\vec{i}\,||2 = 1$, de meme pour $\vec{j}\,.\,\vec{j} = 1$ et $\vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$
- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux donc $\vec{i}\,.\,\vec{j} = i.\vec{k} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0$
- On sait que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

  donc
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})\\ &= xx'\vec{i}\,.\,\vec{i} + yy'\vec{j}\,.\,\vec{j} + zz'\vec{k}\,.\,\vec{k} + (xy' + x'y)\,\vec{i}\,.\,\vec{j} + (xz' + x'z)\,\vec{i}\,.\,\vec{k} + (yz' + y'z)\,\vec{j}\,.\,\vec{k}\\ &= xx^{'} + yy^{'} + zz^{'} + 0 + 0 + 0\\ &= xx^{'} + yy^{'} + zz^{'}\end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations

paramétriques $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -5-7t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x = 5-t \\ y = -1+4t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Méthode 1 : Calculer un angle géométrique

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

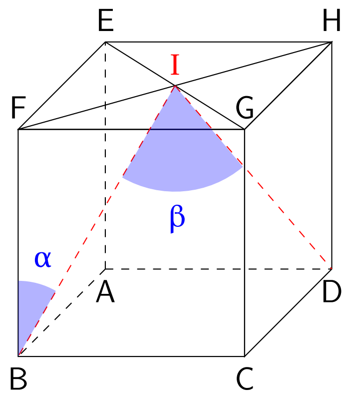
Exemple :

Soit ABCDEFGH, un cube de côté 1 et I le centre de la face EFGH.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

1. $\alpha = \widehat{IBF}$
2. $\beta = \widehat{BID}$



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

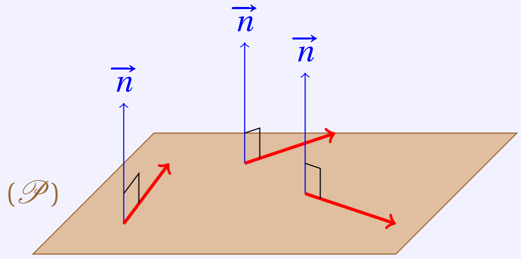
....

....

II Vecteur normal à un plan

Définition 3 : Vecteur normal

Un vecteur $\overrightarrow{n}$ est dit normal à un plan $(\mathscr{P})$ s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans $(\mathscr{P})$.



Propriété 4 : Caractérisation de l'orthogonalité

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

<u>Démonstration :</u>

Soient (d) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan.

Par définition, (d) est orthogonale à $(\mathscr{P})$ si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de $(\mathscr{P})$.

Cela signifie que $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à tout vecteur contenu dans $(\mathscr{P})$, autrement dit, que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

Propriété 5

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur .... à ce plan.

<u>Démonstration :</u>

Soient $(\mathscr{P})$ un plan, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$.

Montrons que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.

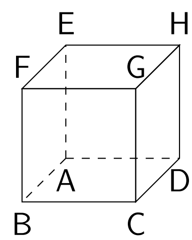
Ramenons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ à une même origine A : $(\mathrm{A}; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est alors un repère de $(\mathscr{P})$ et tout vecteur $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi, $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = \alpha\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} + \beta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

<u>Exemple :</u> Soit ABCDEFGH un cube d'arête $a > 0$.

Les faces ABFE et BCGF étant des carrés, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FB}}$ est .... aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ qui sont deux vecteurs .... du plan (ABC).

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{FB}}$ est un vecteur .... au plan (ABC).

On peut aussi dire que la droite (FB) est .... au plan (ABC).



Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on considère les points $A(1;1;1)$ et $B(-2;0;2)$ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

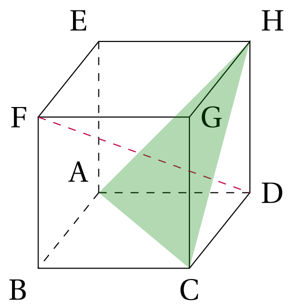
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas .... donc on peut définir le plan $(\mathscr{P})$ engendré par ....

De plus, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}....\\....\\....\end{pmatrix}$ est .... à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur .... au plan $(\mathscr{P})$.

Exemple : Démontrer une orthogonalité

Soit ABCDEFGH, un cube d'arête 1.

Démontrons que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).



. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Propriété 6

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathscr{P})$, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de $(\mathscr{P})$.

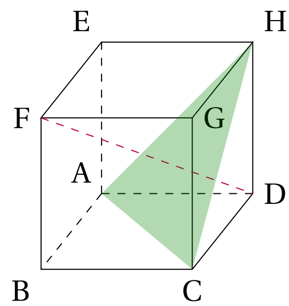
Démonstration :

Soit $\vec{m}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire tel que $\vec{m} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}^*$. Montrons que $\vec{m}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathscr{P})$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur de $(\mathscr{P})$. Alors $\vec{w} \cdot \vec{m} = \vec{w} \cdot (k\vec{n}) = k(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0$.

Remarque : La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathscr{P})$ est le point H appartenant à $(\mathscr{P})$ tel que (AH) soit orthogonale à $(\mathscr{P})$ ou, autrement dit, que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

Exemple :



En reprenant la configuration de l'exemple précédent, ABCDEFGH, un cube d'arête 1, et considérant I le centre de gravité de ACH.

Montrer que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH).

Pour rappel, on a déjà démontré que $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal à (ACH).

....

....

....

....

....

....

....

....

....

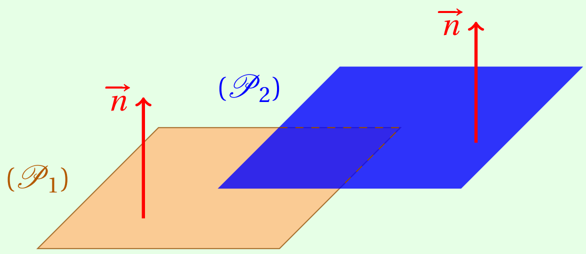
....

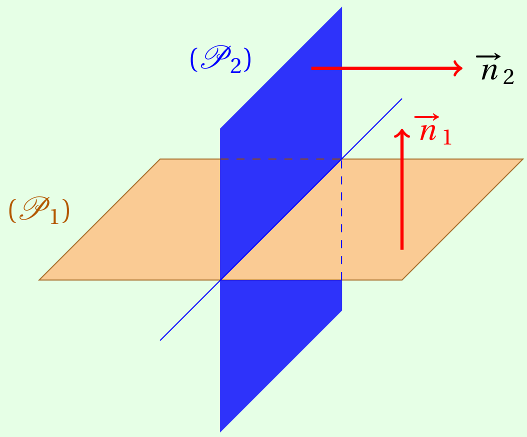
....

....

Propriété 7 : Parallélisme et perpendicularité de plans

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.





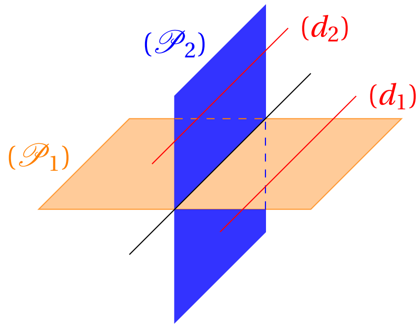
<u>Exemple :</u> On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

  $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ .... : les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont donc ....

- Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

  $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ .... : les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont donc ....,
  et $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 =$ .... d'où ....
  donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ne sont pas ....



Remarque : Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$, deux plans perpendiculaires.

Si (d_1) est une droite de $(\mathscr{P}_1)$ et (d_2) est une droite de $(\mathscr{P}_2)$, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.

Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.

Propriété 8

Soient $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathscr{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Alors un point M appartient à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$.

Démonstration :

- Si M appartient à $(\mathscr{P})$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est un vecteur de $(\mathscr{P})$ et est donc orthogonal à $\overrightarrow{n}$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$. Considérons H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$. Alors $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}}) = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} + \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HM}}$.

  D'une part, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ est contenu dans $(\mathscr{P})$, donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont orthogonaux et ainsi $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0$.

  D'autre part, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires et donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HM}} = \|\overrightarrow{n}\| \times \mathrm{HM}$ ou $-\|\overrightarrow{n}\| \times \mathrm{HM}$.

  On en déduit donc que $\|\overrightarrow{n}\| \times \mathrm{HM} = 0$ et ainsi, puisque $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$, $\mathrm{HM} = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathscr{P})$.

III Équation cartésienne d'un plan

Propriété 9 : Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $\mathrm{M}(x;y;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathscr{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
$$ax+by+cz+d=0,$$
avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

- Réciproquement :
Lensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ de lespace vérifiant une relation du type $ax+by+cz+d=0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que lon note $(\mathscr{P})$.

On dit que $(\mathscr{P})$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.

<u>Démonstration :</u>

- Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par un point $\mathrm{A}(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(\alpha;\beta;\gamma)$.
M appartenant à $(\mathscr{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :
$$(x-x_0)\alpha+(y-y_0)\beta+(z-z_0)\gamma=0$$
ou encore, en développant :
$$\alpha x+\beta y+\gamma z-\alpha x_0-\beta y_0+\gamma z_0=0.$$
Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=\gamma$ et $d=-\alpha x_0-\beta y_0+\gamma z_0$.

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $\mathrm{A}(x_0;y_0;z_0)$ tel que $ax_0+by_0+cz_0+d=0$:
  - si $a\neq 0$, alors le triplet $\left(-\dfrac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'égalité $ax+by+cz+d=0$;
  - si $a=0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b\neq 0$ ou $c\neq 0$.

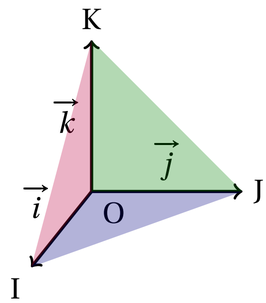
  Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :
$$ax+by+cz+d=ax_0+by_0+cz_0+d,$$
ce qui peut aussi s'écrire : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

  Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{n}(a;b;c)$ (puisque $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0$),

  On en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple : On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur ....
- Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur ....
- Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur ....



Méthode 2 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)

Dans le cas où le plan $(\mathscr{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathscr{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Méthode 3 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathscr{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathscr{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathscr{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathscr{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0;1;1)$, $B(-4;2;3)$ et $C(4;-1;1)$.

Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ défini par ces trois points.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

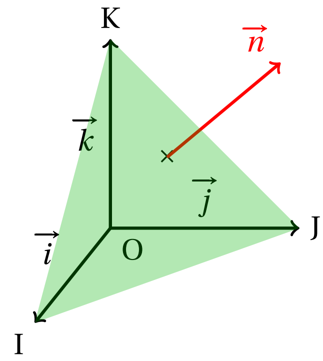
....

....

Exemple :

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère on considère les points $\mathrm{I}(1;0;0)$, $\mathrm{J}(0;1;0)$ et $\mathrm{K}(0;0;1)$. Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-1=0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} .... \\ .... \\ .... \end{pmatrix}$.



Méthode 4 : Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathscr{P})$ en calculant $\vec{u}\cdot\vec{n}$:
   (a) si $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathscr{P})$;
   (b) si $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$, alors (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M.
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathscr{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne $3x+z+7=0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

<u>Exemple :</u> Même consigne avec la droite $(d) : \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2-2t \\ z = 3+5t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$
et le plan $(\mathscr{P}) : -6x-2y-2z+1=0$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Méthode 5 : Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans

Soient $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_2$.
2. Si les plan ne sont pas parallèles :
   (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$;
   (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;
   (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $x+2y+z-1=0$ et $2x-3y-z+2=0$.

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exemple : Même consigne avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives $2x-4y+3z-5=0$ et $-4x+8y-6z+10=0$.

....

....

....

....

....

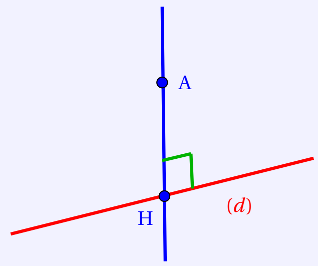
....

IV Distance d'un point à un plan

Définition 4 : Projection orthogonale dun point sur une droite

Soit un point A et une droite (d) de lespace.

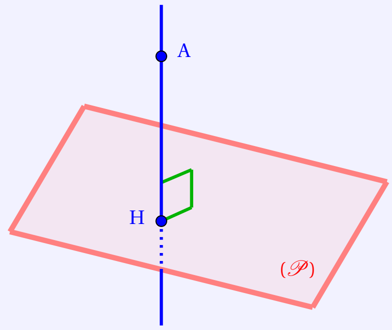
La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à (d) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d).



Définition 5 : Projection orthogonale dun point sur une plan

Soit un point A et un plan $(\mathscr{P})$ de lespace.

La projection orthogonale de A sur $(\mathscr{P})$ est le point H appartenant à $(\mathscr{P})$ tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan $(\mathscr{P})$.



Propriété 10 : Distance d'un point à un plan

La distance d'un point à un plan est la plus courte distance séparant ce point et un point du plan. La distance du point A au plan $(\mathscr{P})$ correspond à la distance séparant A de son projeté orthogonal H sur le plan $(\mathscr{P})$.

Demonstration :

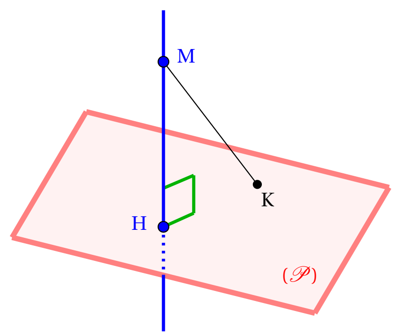
Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan $(\mathscr{P})$.

Supposons quil existe un point K du plan $(\mathscr{P})$ plus proche de M que lest le point H.

$\mathrm{KM} \leq \mathrm{HM}$ car K est le point de la droite le plus proche de M.

Donc $\mathrm{KM}^2 \leq \mathrm{HM}^2$

Or, (MH) est orthogonale à $(\mathscr{P})$, donc (MH) est orthogonale à toute droite de $(\mathscr{P})$.



En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).

Le triangle MHK est donc rectangle en H, d'après légalité de Pythagore, on a : $\mathrm{HM}^2 + \mathrm{HK}^2 = \mathrm{KM}^2$

Donc $\mathrm{HM}^2 + \mathrm{HK}^2 \leq \mathrm{HM}^2$

Donc $\mathrm{HK}^2 \leq 0$

Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.

On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M.