



Produit scalaire et plans de l'espace

Histoire des mathématiques

Si les vecteurs peuvent être additionnés entre eux ou multipliés par un réel, il n'a pas encore été défini ce que pouvait être le produit de deux vecteurs. Celui-ci n'est pas un vecteur mais un nombre.

De par la nature de son résultat, on le nomme produit scalaire. Le produit scalaire est à l'origine une notion physique : le produit linéaire.

Cet outil fut élaboré par le physicien prussien **Hermann Grassman** (1809-1877) et le physicien américain **Josiah Gibbs** (1839-1903). Mais c'est le mathématicien irlandais **William Hamilton** (1805-1865) qui en donna une première définition mathématique en 1853.



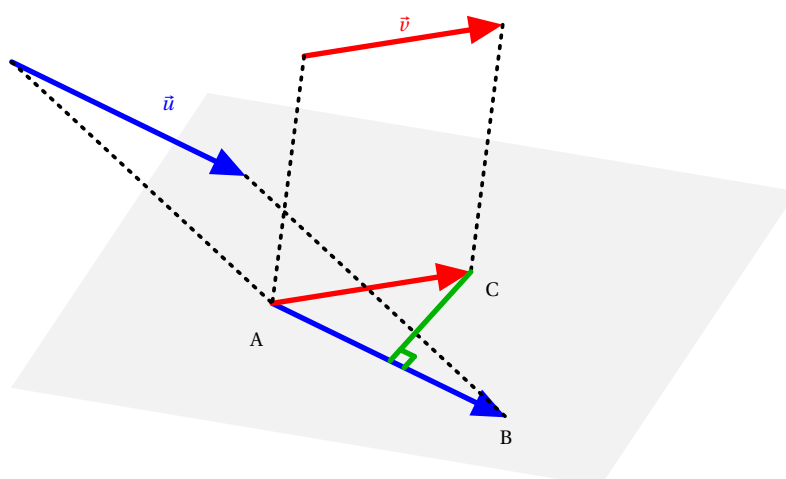
H Grassman

I Produit scalaire dans l'espace

On considère deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et trois points A, B et C tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$.

Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ calculé dans ce plan, on le note $\vec{u} \cdot \vec{v}$



Définition 1 : Produit scalaire

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.



Rappels

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{u}, \text{ lorsque } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

$$2. \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont orthogonaux.

3. Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.

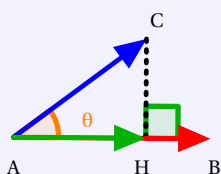
- s'ils ont le même sens : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD$
- s'ils sont de sens contraires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times CD$

4. Soient trois points A, B, C avec A et B distincts.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

si même sens

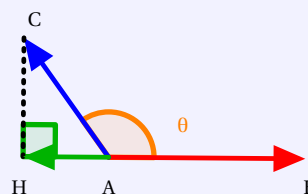
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

si sens contraire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Exemple : ABCDEFGH est un cube d'arête a

- On note $\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$

$$\text{Alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = BF \times BG \times \cos \widehat{FBG}$$

$$\text{Donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2 \times 2}{2} = a^2$$

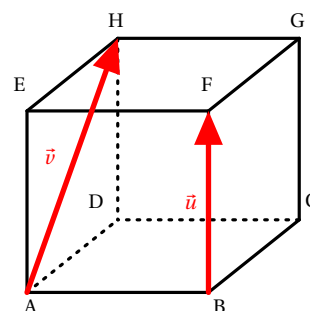
- comme dans le plan (AGC), C est le projeté orthogonal de G sur (AC) :

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

- pour calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG}$,

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BF} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} =$$

$$0 + a^2 = a^2$$





Propriété 1 : Propriétés algébriques

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel, alors :

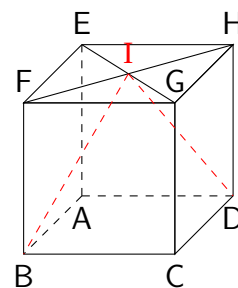
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
- $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Remarque : Seul le premier point requiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

Démonstration :

- Pour le premier point, on exprime analytiquement le membre de gauche et le membre de droite puis on compare les expressions obtenues.
- Pour les trois derniers points, on se place dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où l'on utilise les propriétés établies dans le plan en Première. Plus particulièrement, l'avant-dernier point provient des formules avec les carrés scalaires.

Exemple : Soit ABCDEFGH, un cube de côté 1 et I le centre de la face EFGH. Déterminer $\vec{IB} \cdot \vec{ID}$



Correction

$$\text{On a } \vec{IB} \cdot \vec{ID} = \left(\frac{1}{2} \vec{HF} + \vec{FB} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{FH} + \vec{HD} \right) = \left(\vec{FB} + \frac{1}{2} \vec{HF} \right) \cdot \left(\vec{FB} - \frac{1}{2} \vec{HF} \right) = \vec{FB}^2 - \frac{1}{4} \vec{HF}^2.$$

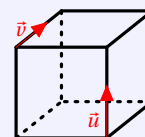
$$\text{Comme } FB = 1 \text{ et que } HF = \sqrt{2}, \text{ on en déduit que } \vec{IB} \cdot \vec{ID} = 1 - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$



Définition 2 : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux s'ils dirigent des droites orthogonales.

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.



Propriété : orthogonalité vecteurs

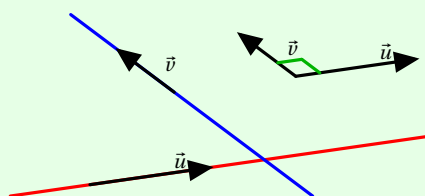
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Démonstration :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par définition
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, considérons les points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$
 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi les droites (AB) et (AC) sont orthogonales
 ssi $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$ ssi $\cos \widehat{BAC} = 0$ ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Propriété 2 : Orthogonalité

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.



Démonstration :

Étant donné la colinéarité de tous les vecteurs directeurs d'une même droite, il suffit de démontrer la propriété en choisissant un vecteur directeur par droite.

Soient (d_1) et (d_2) deux droites, dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Considérons (Δ_1) et (Δ_2) , les parallèles respectives à (d_1) et (d_2) passant par un même point ; elles sont aussi dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

(d_1) est orthogonale à (d_2) si, par définition, (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires c'est-à-dire si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux.



Propriété 3 : Expression analytique du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K) .

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

En particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Démonstration :

- Soit $\vec{i} = \vec{OI}$; $\vec{j} = \vec{OJ}$ et $\vec{k} = \vec{OK}$

On a $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1$, de même pour $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

- Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux donc $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

- On sait que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k} + (xy' + x'y)\vec{i} \cdot \vec{j} + (xz' + x'z)\vec{i} \cdot \vec{k} + (yz' + y'z)\vec{j} \cdot \vec{k} \\ &= xx' + yy' + zz' + 0 + 0 + 0 \\ &= xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations

$$\text{paramétriques } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -5 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui dirigent respectivement (d_1) et (d_2) sont orthogonaux puisque

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \times (-1) + 2 \times 4 + (-7) \times 1 = 0. \text{ Ainsi, } (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ sont orthogonales.}$$



Méthode 1 : Calculer un angle géométrique

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

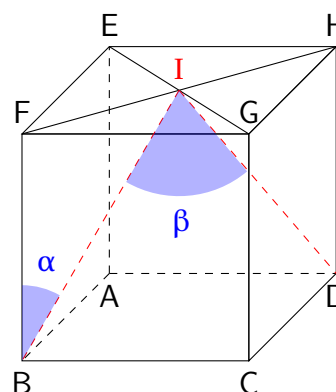
Exemple :

Soit ABCDEFGH, un cube de côté 1 et I le centre de la face EFGH.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

1. $\alpha = \widehat{IBF}$
2. $\beta = \widehat{BID}$



Correction

1. $\vec{BF} \cdot \vec{BI} = \vec{BF} \cdot \vec{BF}$ car $\vec{BF}$ est le projeté orthogonal de $\vec{BI}$ sur (BF) . Ainsi, $\vec{BI} \cdot \vec{BF} = 1$.

D'autre part, $\vec{BF} \cdot \vec{BI} = BF \times BI \times \cos(\alpha) = BI \times \cos(\alpha)$.

De plus, $B(1;0;0)$ et $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ donc $BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ainsi, $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\alpha) = 1$ et donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. On en déduit alors que $\alpha \approx 35^\circ$.

2. $\vec{IB} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{ID} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{IB} \cdot \vec{ID} = -0,25 - 0,25 + 1 = 0,5 = \frac{1}{2}$.

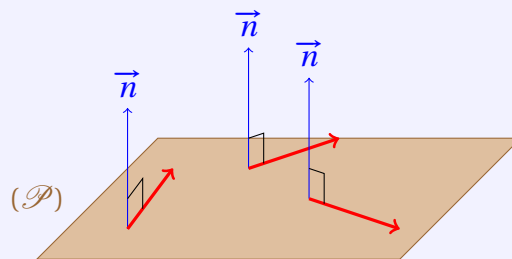
D'autre part, $\vec{IB} \cdot \vec{ID} = IB \times ID \times \cos(\beta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\beta) = \frac{3}{2} \cos(\beta)$. Par conséquent, $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cos(\beta)$, et donc $\cos(\beta) = \frac{1}{3}$. On en déduit alors que $\beta \approx 71^\circ$.



II Vecteur normal à un plan

Définition 3 : Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à un plan $(\mathcal{P})$ s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans $(\mathcal{P})$.



Propriété 4 : Caractérisation de l'orthogonalité

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

Démonstration :

Soient (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan.

Par définition, (d) est orthogonale à $(\mathcal{P})$ si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de $(\mathcal{P})$.

Cela signifie que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur contenu dans $(\mathcal{P})$, autrement dit, que $\vec{u}$ est un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

Propriété 5

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

Démonstration :

Soient $(\mathcal{P})$ un plan, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul $\vec{n}$.

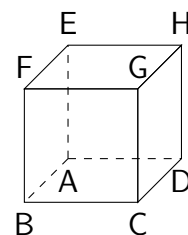
Montrons que $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathcal{P})$.

Ramenons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ à une même origine A : $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est alors un repère de $(\mathcal{P})$ et tout vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi, $\vec{w} \cdot \vec{n} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{n} + \beta \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple : Soit ABCDEFGH un cube d'arête $a > 0$.

Les faces ABFE et BCGF étant des carrés, le vecteur $\vec{FB}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

Ainsi, $\vec{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC). On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC).





Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1;1;1)$ et

$B(-2;0;2)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

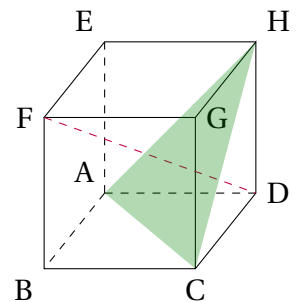
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan $(\mathcal{P})$ engendré par A , $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De plus, $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc $\vec{AB}$ est un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.

Exemple : Démontrer une orthogonalité

Soit ABCDEFGH, un cube d'arête 1.

Démontrons que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).



Correction

Il suffit de prouver que $\vec{FD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACH), par exemple $\vec{AC}$ et $\vec{HC}$. Démontrer alors que $\vec{FD} \cdot \vec{AC} = \vec{FD} \cdot \vec{HC} = 0$.

Calculons le premier produit scalaire en utilisant les propriétés algébriques et le second analytiquement :

$$\vec{FD} \cdot \vec{AC} = (\vec{FB} + \vec{BD}) \cdot \vec{AC} = \vec{FB} \cdot \vec{AC} + \vec{BD} \cdot \vec{AC}.$$

D'une part, et d'après l'exemple précédent, $\vec{FB}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc il est orthogonal à tout vecteur à ce plan, en particulier à $\vec{AC}$. Ainsi, $\vec{FB} \cdot \vec{AC} = 0$.

D'autre part, $\vec{BD} \cdot \vec{AC} = 0$ car [BD] et [AC] sont les diagonales du carré ABCD.

On en conclut que $\vec{FD} \cdot \vec{AC} = 0$.

$$\blacksquare \text{ En se plaçant dans le repère orthonormé } (A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}), \text{ on a } C(1;1;0), D(0;1;0), F(1;0;1) \text{ et}$$

$$H(0;1;1) \text{ et ainsi, } \vec{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{HC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par conséquent, } \vec{FD} \cdot \vec{HC} = -1 + 0 + 1 = 0.$$



Propriété 6

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à un plan $(\mathcal{P})$, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

Démonstration :

Soit $\vec{m}$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$, c'est-à-dire tel que $\vec{m} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}^*$. Montrons que $\vec{m}$ est orthogonal à tout vecteur de $(\mathcal{P})$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur de $(\mathcal{P})$. Alors $\vec{w} \cdot \vec{m} = \vec{w} \cdot (k\vec{n}) = k(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0$.

Remarque : La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathcal{P})$ est le point H appartenant à $(\mathcal{P})$ tel que (AH) soit orthogonale à $(\mathcal{P})$ ou, autrement dit, que $\overrightarrow{AH}$ soit un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Exemple :

En reprenant la configuration de l'exemple précédent, ABCDEFGH, un cube d'arête 1, et considérant I le centre de gravité de ACH.

Montrer que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH).

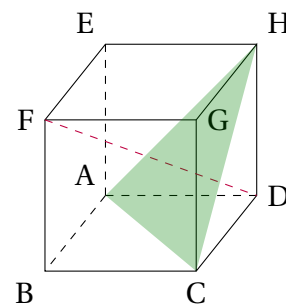
Pour rappel, on a déjà démontré que $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur normal à (ACH).

On a $\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HM}$, où M est le milieu de [AC], donc $\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{HD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$.

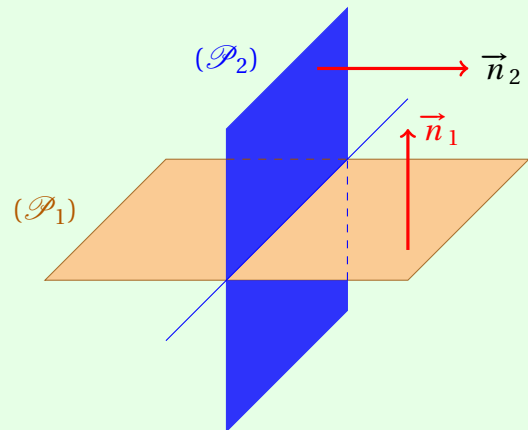
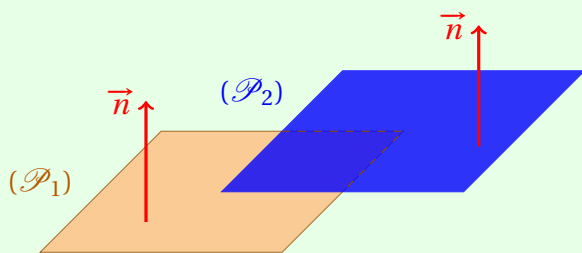
$\overrightarrow{FI}$ est donc aussi un vecteur normal à (ACH) et comme $I \in (ACH)$,

Alors on en déduit que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH).



**Propriété 7 : Parallélisme et perpendicularité de plans**

- Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.





Exemple : On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

- Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires : les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont donc parallèles.

- Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

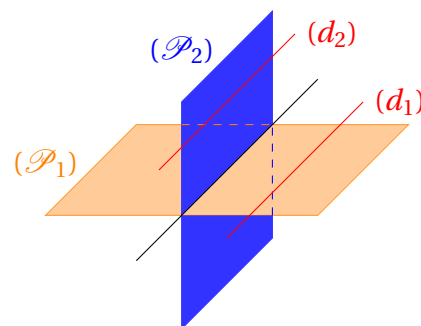
$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires : les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont donc sécants,

Mais $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ne sont pas perpendiculaires.

Remarque : Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$, deux plans perpendiculaires.

Si (d_1) est une droite de $(\mathcal{P}_1)$ et (d_2) est une droite de $(\mathcal{P}_2)$, alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.

Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.



Propriété 8

Soient $\vec{n}$ un vecteur non nul, A un point et $(\mathcal{P})$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Alors un point M appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Démonstration :

- Si M appartient à $(\mathcal{P})$ alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur de $(\mathcal{P})$ et est donc orthogonal à $\vec{n}$.
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Considérons H le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{P})$. Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$.
D'une part, $\overrightarrow{AH}$ est contenu dans $(\mathcal{P})$, donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.
D'autre part, $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\vec{n}\| \times HM$ ou $-\|\vec{n}\| \times HM$.
On en déduit donc que $\|\vec{n}\| \times HM = 0$ et ainsi, puisque $\vec{n} \neq \vec{0}$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H, il appartient donc à $(\mathcal{P})$.



III Équation cartésienne d'un plan

Propriété 9 : Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathcal{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

$$ax + by + cz + d = 0,$$

avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

- Réciproquement :

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathcal{P})$.

On dit que $(\mathcal{P})$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus,

$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Démonstration :

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par un point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

M appartenant à $(\mathcal{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

ou encore, en développant :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0 = 0.$$

Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ et $d = -\alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0$.

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0; y_0; z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:
 - si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
 - si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

ce qui peut aussi s'écrire : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

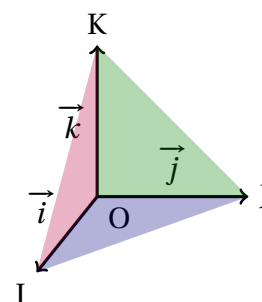
Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (car $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$), on en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Exemple : On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{i}$.
- Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{j}$.
- Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$.



Méthode 2 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)

Dans le cas où le plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du

plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1; -2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant données, le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer. Le point A appartient à $(\mathcal{P})$ donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.

Ainsi, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.



Méthode 3 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan ($\mathcal{P}$) :

1. s'assurer que le plan ($\mathcal{P}$) est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à ($\mathcal{P}$) ;
3. en déduire une équation cartésienne de ($\mathcal{P}$) en se référant à la méthode précédente.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0;1;1)$, $B(-4;2;3)$ et $C(4;-1;1)$.

Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan ($\mathcal{P}$) défini par ces trois points.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$: $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan ($\mathcal{P}$).

On note $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à ($\mathcal{P}$).

Alors $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$, ce qui donne les équations $-4a + b + 2c = 0$ et $4a - 2b = 0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} -8a + 2b + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4a + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = 2a \end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Avec $a = 1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, ($\mathcal{P}$) : $x + 2y + z + d = 0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.

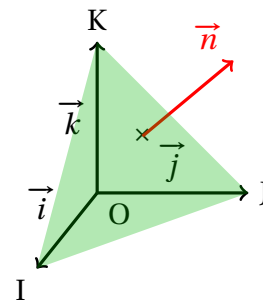
L'appartenance du point A à ($\mathcal{P}$) donne $d = -3$ et donc ($\mathcal{P}$) : $x + 2y + z - 3 = 0$.

Exemple :

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère on considère les points $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;0;1)$. Le plan (IJK)

a pour équation $x + y + z - 1 = 0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.


Méthode 4 : Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

(a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathcal{P})$;

(b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M.

2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathcal{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (d) de représentation

$$\text{paramétrique} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $3x + z + 7 = 0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathcal{P})$.



Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -3$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x; y; z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3x + z + 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \\ 3(1 - t) + 5 + 7 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 5 \\ x = -4 \\ y = 10 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ainsi, M(-4;10;5).

Exemple : Même consigne avec la droite $(d) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et le plan $(\mathcal{P}) : -6x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Correction

Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ sont parallèles.

De plus, le point A(1;2;3) par lequel passe (d) n'appartient pas à $(\mathcal{P})$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles.


Méthode 5 : Déterminer, si elle existe, l' intersection de deux plans

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :
 - (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
 - (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;
 - (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exemple : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives $x + 2y + z - 1 = 0$ et $2x - 3y - z + 2 = 0$.

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d) . Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x + 1 \\ z = 1 - x - 2y = -7x - 1 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x; 3x + 1; -7x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme

paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemple : Même consigne avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

Comme les deux équations sont équivalentes, on en déduit que $(\mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2)$.

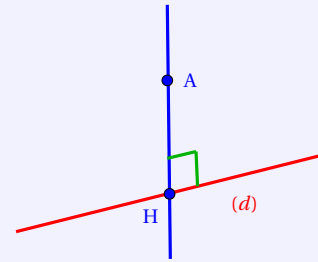


IV Distance d'un point à un plan

Définition 4 : Projection orthogonale d'un point sur une droite

Soit un point A et une droite (d) de l'espace.

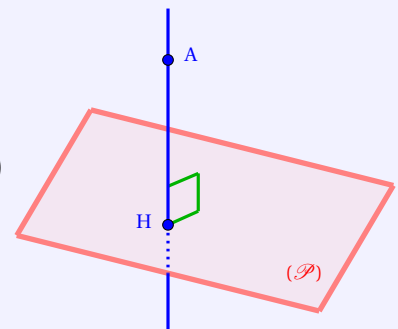
La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à (d) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d) .



Définition 5 : Projection orthogonale d'un point sur un plan

Soit un point A et un plan $(\mathcal{P})$ de l'espace.

La projection orthogonale de A sur $(\mathcal{P})$ est le point H appartenant à $(\mathcal{P})$ tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.



Propriété 10 : Distance d'un point à un plan

La distance d'un point à un plan est la plus courte distance séparant ce point et un point du plan. La distance du point A au plan $(\mathcal{P})$ correspond à la distance séparant A de son projeté orthogonal H sur le plan $(\mathcal{P})$.

Démonstration :

Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan $(\mathcal{P})$.

Supposons qu'il existe un point K du plan $(\mathcal{P})$ plus proche de M que le point H .

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M .

Donc $KM^2 \leq HM^2$

Or, (MH) est orthogonale à $(\mathcal{P})$, donc (MH) est orthogonale à toute droite de $(\mathcal{P})$.

En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK) .

Le triangle MHK est donc rectangle en H , d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$

Donc $HK^2 \leq 0$

Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H .

On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M .

