CHAPITRE 5 Dérivation et convexité

Manuel p. 136-167

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

L'objectif de ce chapitre est de compléter les notions de dérivation vues en 1er et d'introduire la notion de convexité d'une fonction.

Ainsi, nous avons fait le choix d'activités d'introduction de diverses natures, progressives et qui suivent la trame du cours.

Ceci est accompagné d'exercices au niveau croissant de difficulté et de TP de recherche et d'algorithmique permettant une appropriation progressive des différents contenus par l'élève.

Objectifs

- ➔ **Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée.**
- ➔ **Calculer la dérivée d'une fonction composée et en déduire le tableau de variations de cette fonction.**
- ➔ **Étudier la convexité d'une fonction par différentes méthodes.**
- ➔ **Déterminer les coordonnées des points d'inflexion par différentes méthodes.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 137

1. Déterminer un nombre dérivé

1. a) Graphiquement on trouve $f'(0) = -2$, $f(0) = 0$, $f'(1) = 3$ et $f(1) = 0$.

b) Graphiquement, la tangente est horizontale pour $x = -1{,}2$ et $x = 0{,}6$.

2. $g(x) = 3x^2$ et $g''(x) = 6x$.

a) $g'(3) = 3 \times 3^2 = 27$

et $g'(-3) = 3\times (-3)^2 = 27$. On remarque que

$g'(-3) = -g'(3)$.

C'est normal car la fonction $x \mapsto 3x^2$ est paire.

b) $g'(a) = 12$ ssi $3a^2 = 12$ ssi $a^2 = 4$ ssi $a = 2$ (abscisse positive).

2. Déterminer une équation de tangente

1. a) $f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$ et

$f(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 11$.

b) $\mathcal{T}_2 : y = f'(2)(x - 2)+ f(2)$.

$\mathcal{T}_2 : y = 7(x - 2) + 11 = 7x - 3$.

2. $g(x) = e^x$ donc $g'(x) = e^x$.

$\mathcal{T}_0 : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$.

$\mathcal{T}_0 : y = 1(x) + 1$.

$\mathcal{T}_0 : y = x + 1$.

3. Calculer des dérivées

a) $f'(x) = \dfrac{2}{3}(3x^2) + 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = 4 - 7\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 4 + \dfrac{7}{x^2}$

c) $h'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

d) $i'(x) = \dfrac{(2xe^x + x^2e^x)(x + 5) - (x^2e^x + 3)(1)}{(x + 5)^2}$

$= \dfrac{(2x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x + 5x^2e^x) - (x^2e^x + 3)}{(x + 5)^2}$

$= \dfrac{2x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x + 5x^2e^x - x^2e^x - 3}{(x + 5)^2}$

$= \dfrac{6x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x - 3}{(x + 5)^2}$

4. Étudier des tableaux de signes

1.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$sgn(f(x))$		$-$		$-$		$+$	
$sgn(g(x))$		$-$		$+$		$+$	
$sgn(f(x) \times g(x))$		$+$		$-$		$+$	

2. $h(x) = (x - 3)(x + 3)(3x + 4)$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$sgn(x - 3)$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$sgn(x + 3)$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$sgn(3x + 4)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$sgn(h(x))$		$-$		$+$		$-$		$+$	

5. Calculer la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$

1. $f'(x) = 3e^{3x+1}$

2. $g'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{-2x+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{-2x+1}}$

Activités p. 138-139

1. Voir des fonctions... à l'intérieur d'autres fonctions !

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectifs :** Introduire la notion de fonction composée et montrer la construction de fonctions à partir de fonctions de référence.

A. Schéma de composition avec deux fonctions

1. $f(1) = \sqrt{3 \times 1} = \sqrt{3}$. La dernière opération effectuée est la racine carrée.

2. $x \mapsto u(x) = 3x \mapsto v(u(x)) = v\,(3x) = \sqrt{3x}$.

3. C'est l'algorithme A.

4. a) $D_u = \mathbb{R}_+$ et $D_v = \mathbb{R}$.

b) $u(v(x)) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{3x}$ et $v(u(x)) = 3u(x) = 3\sqrt{x}$.

c) $D_{u \circ v} = \mathbb{R}_+$ et $D_{v \circ u} = \mathbb{R}_+$. Ces deux domaines de définition sont égaux.

5. $u \circ v(0) = u(v(0)) = u(\sqrt{0}) = 0$

et $v \circ u(0) = v(u(0)) = v(3 \times 0) = 0$

$u \circ v(4) = u(v(4)) = u(\sqrt{4}) = u(2) = 3 \times 2 = 6$

et $v \circ u(4) = v(u(4)) = v(3 \times 4) = v(12) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

donc $u \circ v(4) \neq v \circ u(4)$.

On peut en conclure que les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ ne sont pas égales.

B. Schéma de composition avec trois fonctions

$$x \overset{w}{\mapsto} x+1 \overset{v}{\mapsto} (x+1)^2 \overset{u}{\mapsto} \frac{1}{(x+1)^2}$$

$u \circ v \circ w(x) = u \circ v(w(x)) = u \circ v(x + 1)$

$= u(v(x + 1)) = u((x + 1)^2) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

de même $(u \circ v)(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$(u \circ v) \circ w(x) = (u \circ v)(w(x)) = (u \circ v)(x + 1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

de même $(v \circ w)(x) = (x + 1)^2$

$u \circ (v \circ w)(x) = u((x+1)^2) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

donc $u \circ v \circ w(x) = (u \circ v) \circ w(x) = u \circ (v \circ w)(x)$.

2 Étudier une dérivée

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Conjecturer et démontrer la formule de la dérivée d'une fonction composée.

1.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de u	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$		$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$		$+$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$		$+$	

3. Il s'agit de la fonction g qui présente le bon signe (contrairement à h) mais également les bonnes valeurs (contrairement à f), en effet sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, donc $g'(-3) = -g'(3)$ ce qui correspond à la situation de u.

4. $(v \circ w)'(x) = w'(x) \times v'(w(x))$

5. a) Il suffit de simplifier par $v(a+h)-v(a)$ le produit à droite de l'égalité.

b) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u\circ v(a+h)-u\circ v(a)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u\circ v(a+h)-u\circ v(a)}{v(a+h)-v(a)}\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u\circ v(a+h)-u\circ v(a)}{v(a+h)-v(a)}\times\lim_{h\to 0}\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

$= u'\circ v(a)\times v'(a)$. Ceci est vérifié pour tout réel a de I d'où $(u\circ v)' = (vu'\circ v)\times v'$.

3 Utiliser une fonction de production

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier différentes fonctions et leurs particularités.

1. a) $\dfrac{f(0)+f(20)}{2}=\dfrac{0+20\sqrt{20}}{2}=10\sqrt{20}\approx 44{,}72<50.$

La stratégie ne semble pas efficace.

b) $\dfrac{f(10)+f(10)}{2}=\dfrac{20\sqrt{10}+20\sqrt{10}}{2}=20\sqrt{10}\approx 63{,}25>50.$

La stratégie semble efficace.

c) Si on trace la courbe représentative de la fonction f et les points $A(4\ ;f(4))$ et $B(16\ ;f(16))$ alors le point $M(t\times 4+(1-t)\times 16\ ;f(t\times 4+(1-t)\times 16))$ est situé au-dessus du point

$N(t\times 4+(1-t)\times 16\ ;tf(4)+(1-t)\times f(16))$

donc $f(t\times 4+(1-t)\times 16)\geqslant tf(4)+(1-t)f(16)$.

<u>Autre manière :</u>

$tf(4)=40t$ et $(1-t)f(16)=(1-t)80=80-80t$

donc $tf(4)+(1-t)f(16)=80-40t$

De plus : $f(4t+16(1-t))=f(16-12t)=20\sqrt{16-12t}$

Soit g la fonction définie par

$g(t)=20\sqrt{16-12t}-(80-40t)$.

Alors $g'(t)=40+\dfrac{20(-12)}{2\sqrt{16-12t}}=40-\dfrac{120}{\sqrt{16-12t}}$.

$40-\dfrac{120}{\sqrt{16-12t}}\geqslant 0$ ssi $\dfrac{40}{120}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{16-12t}}$ ssi

$\sqrt{16-12t}\geqslant\dfrac{120}{40}$ ssi $\sqrt{16-12t}\geqslant 3$ ssi $16-12t\geqslant 9$

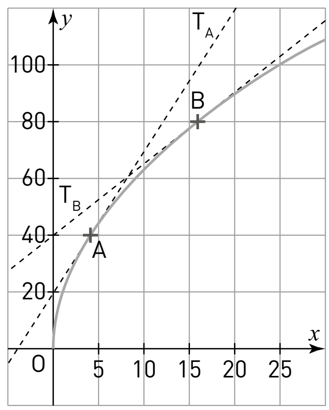
ssi $7\geqslant 12t$ ssi $t\leqslant\dfrac{7}{12}$.

t	0	$\frac{7}{12}$	1
Signe de $g'(t)$	$+$		$-$
Variations de g	0 ↗	$g\left(\frac{7}{12}\right)$	↘ 0

Donc $g(t)\geqslant 0$ sur $[0\ ;1]$ d'où :

$f(t\times 4+(1-t)\times 16)\geqslant tf(4)+(1-t)f(16)$.

d)



Les tangentes sont situées au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. a) $\dfrac{f(0)+f(20)}{2}=\dfrac{0+\frac{4}{25}\times 20^2}{2}=32<50$

La stratégie ne semble pas efficace.

b) $\dfrac{f(10)+f(10)}{2}=\dfrac{\frac{4}{25}\times 10^2+\frac{4}{25}\times 10^2}{2}=16<50$

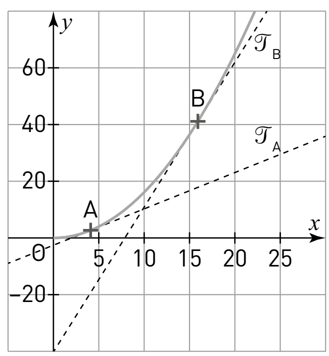
La stratégie ne semble pas efficace.

c) Si on trace la courbe représentative de la fonction f et les points $A(4\ ;f(4))$ et $B(16\ ;f(16))$ alors le point $M(t\times 4+(1-t)\times 16\ ;f(t\times 4+(1-t)\times 16))$ est situé en-dessous du point

$N(t\times 4+(1-t)\times 16\ ;tf(4)+(1-t)\times f(16))$

donc $f(t\times 4+(1-t)\times 16)\leqslant tf(4)+(1-t)f(16)$.

d)



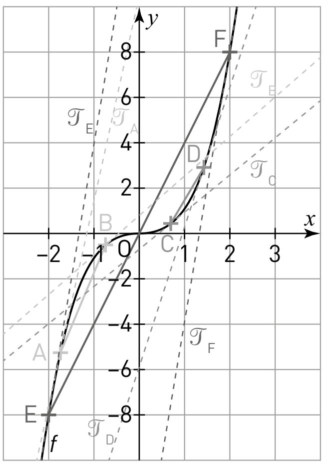
Les tangentes sont situées en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Cela dépend de la modélisation. Dans la 1re modélisation, la 2e stratégie semblait efficace. Dans la 2e modélisation, la 2e stratégie était moins efficace que la 1re, elle donne même des résultats moindres. Les fonctions des questions 1. et 2. ne présentent pas la même orientation de courbe. La 1re est orientée vers le bas, la 2nde vers le haut, ce qui donne des valeurs pour $f(10)$ très différentes ! Par la suite, nous verrons que la 1re est concave et la 2e est convexe.

4 Voir le lien entre courbes, sécantes et tangentes

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Conjecturer des positions relatives de courbes, de sécantes et de tangentes.

1.



2. Voir graphique ci-dessus.

Le segment [AB] est situé en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. Voir graphique ci-dessus.

Le segment [CD] est situé au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Le segment [EF] traverse la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Les tangentes $\mathscr{T}_A$, $\mathscr{T}_B$ et $\mathscr{T}_E$ sont au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$. Les tangentes $\mathscr{T}_C$, $\mathscr{T}_D$ et $\mathscr{T}_F$ sont en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5. Il existe un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ ici, il s'agit de l'origine du repère.

6.

Sur $]-\infty\ ;\ 0]$	Sur $[0\ ;\ +\infty[$
• Les sécantes sont en dessous de $\mathscr{C}_f$. • Les tangentes sont au-dessus de $\mathscr{C}_f$.	• Les tangentes sont en dessous de $\mathscr{C}_f$. • Les sécantes sont au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

Avec un point d'inflexion d'abscisse 0.

À vous de jouer p. 141

1. Le schéma de composition de la fonction f est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 & \mapsto & (x+2)^3 \end{array}$$

2. Le schéma de composition de la fonction g est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2-5 & \mapsto & \sqrt{3x^2-5} \end{array}$$

3. $f\circ g(6) = f(g(6)) = f\left(\dfrac{1}{6}\right) = 3\left(\dfrac{1}{6}\right) + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$

4. $f\circ g(1) = f(g(1)) = f(0) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

5. $f'(x) = (-1)\mathrm{e}^{3}x + (-x+1)3\mathrm{e}^{3}x = \mathrm{e}^{3}x(-1-x+1)$
$= -x\mathrm{e}^{3}x.$

6. $f'(x) = 2x\cos(x^2+1)$

7. $f(x) = \sqrt{2+\cos(x)}$; $f'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{2\sqrt{2+\cos(x)}}$

or $2\sqrt{2+\cos(x)} > 0$ et $-\sin(x) \geqslant 0$ ssi $\sin(x) \leqslant 0$ ssi $x \in [-\pi + 2k\pi\ ;\ 0 + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc f est croissante sur $[-\pi + 2k\pi\ ;\ 0 + 2k\pi]$ et décroissante sur $[0 + 2k\pi\ ;\ \pi + 2k\pi]$.Le tableau de variations est donc le suivant, pour $k = 0$.

x	0	π	2π
Variations de f	$\sqrt{3}$ ↘	1	↗ $\sqrt{3}$

8. $g(x) = -2xe^{-x^2}$ or $-2e^{-x^2} < 0$ pour tout réel x donc le signe de $g'(x)$ est le contraire du signe de x. Donc $g'(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et g est croissante sur $\mathbb{R}_-$. De plus $g(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$ d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	|	−
Variations de g	0 ↗	1	↘ 0

9. D'après le graphique, la courbe de f est en-dessous de ses sécantes sur [−1 ; 0,5] et est au-dessus de ses sécantes sur [0,5 ; 1,5]. Donc f est convexe sur [−1 ; 0,5] et concave sur [0,5 ; 1,5].

10. f est convexe sur [0,25 ; 1,5] et concave sur [−1 ; 0,25].

11. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur et utilise le signe ⩽ au lieu de ⩾. L'erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ ssi $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}$ ssi

$\sqrt{a+b} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

12. $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ ssi $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \dfrac{a^3+b^3}{2}$

ssi $(a+b)^3 \leqslant \dfrac{8(a^3+b^3)}{2}$ ssi $(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)$

13. f' est décroissante sur]−∞ ; 0]∪[1 ; +∞[donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur [0 ; 1] donc f est convexe sur cet intervalle.

14. f' est décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{4}\right]$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur $\left[\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$ donc f est convexe sur cet intervalle.

15. $f(x) = xe^{-x}$ donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ et $f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$.

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x et $x - 2 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 2$.

Donc $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 2$ et $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x \leqslant 2$. Donc f est convexe sur [2 ; +∞[et f est concave sur]−∞ ; 2].

16. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3e^{x+2}$ et $f''(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{4x^2} - 3e^{x+2} \leqslant 0$

donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

17. Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0{,}7$.

18. Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point de coordonnées (−2 ; 1).

19. $f(x) = (x+1)e^{-x}$ donc

$f'(x) = e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}$ et

$f''(x) = -1e^{-x} + (xe^{-x}) = e^{x}(x-1)$

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x donc f'' change de signe pour $x = 1$. Donc le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(1 ; f(1))$ c'est-à-dire $(1 ; 2e^{-1})$.

20. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ donc $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ et

$f''(x) = \dfrac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$

or $e^{-x}(x^2 - 2x + 2) > 0$ pour tout réel x donc f'' a le même signe que x. Elle changerait de signe pour $x = 0$ mais n'est pas définie en 0. Donc il n'y a pas de point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

21. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}e^{3\sqrt{x}} > 0$

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	||	+
Variations de g	1	↗ $+\infty$

22. $\dfrac{1}{1+x} > 0$ ssi $1 + x > 0$ ssi $x > -1$ donc

D_g =]−1 ; +∞[∩]0 ; +∞[=]0 ; +∞[

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2} < 0$$ donc g est strictement décroissante.

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	
Variations de g	1 ↘	0

23. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$; $f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ et $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

f'' change de signe pour $x = 1$ donc la croissance commence à ralentir au bout du premier mois c'est-à-dire à partir du 1[er] février 2020.

24. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

Donc f' est strictement croissante. Elle ne diminue jamais.

Exercices apprendre à démontrer p. 152

Pour s'entraîner

Soit f une fonction deux fois dérivable, f' sa dérivée première et f'' sa dérivée seconde. On admet que f'' est négative sur un intervalle I.

Soit ϕ la fonction définie sur I par :

$$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$$
$$= f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0).$$

ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$$

or f'est négative sur I donc f'est décroissante sur I. D'où :

- si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$ donc ϕ est décroissante sur $[x_0 ; +\infty[$.
- si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$ donc ϕ est croissante sur $]-\infty ; x_0]$.

Donc ϕ admet un maximum pour φ et ce maximum est égal à :

$$\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0) = 0.$$

Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \leqslant 0$ donc $f(x) \leqslant f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$: la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

Conclusion : si f'' est négative, alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

Exercices calculs et automatismes p. 153

25. Shéma de composition 1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur : il est écrit $e^{x^{2+1}}$ au lieu de e^{x^2+1}. L'erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 & \mapsto & e^{x^2+1} \end{array}$$

2. Schéma de composition de la fonction g

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} & w & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 & \mapsto & \sqrt{x+2} & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x+2}} \end{array}$$

26. Dérivée d'une fonction composée

$f'(x) = -6x\sin(3x^2 + 1)$

27. Dérivée d'une fonction composée

$$f'(x) = -\frac{7}{2(\sqrt{7x-1})^3} = -\frac{7}{2(7x-1)\sqrt{7x-1}}$$

28. Dérivée d'une fonction composée

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

29. Convexité

D'après le graphique, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont représentatives de fonctions convexes.

30. Somme de deux fonctions convexes

Vrai. Soit $h = f + g$ avec f et g deux fonctions convexes. Alors, pour tout réel x vérifiant les conditions de définition des trois fonctions : $h''(x) = f''(x) + g''(x) \geqslant 0$ donc h est aussi convexe.

31. Convexité

Vrai. Si f est convexe alors $f''(x) \geqslant 0$ donc $-f''(x) \leqslant 0$ donc $-f$ est concave.

32. Exemples de fonctions convexes et concaves

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, la fonction racine est concave sur $\mathbb{R}_+$.

33. Exemple de point d'inflexion

La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$, elle présente un point d'inflexion en l'origine du repère.

34. Cube

La fonction a pour dérivée $x \mapsto 3x^2$ et pour dérivée seconde $x \mapsto 6x$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée positive), convexe sur $\mathbb{R}_+$ (dérivée seconde positive), et concave sur $\mathbb{R}_-$ (dérivée seconde négative). Réponses a) et d).

35. Racine carrée

La fonction a pour dérivée $x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et pour dérivée seconde $x \to \dfrac{-\sqrt{x}}{4x^2}$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée positive), et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée seconde négative). Réponses a) et d).

36. Puissance

La fonction a pour dérivée

$x \mapsto -10x^4$ et pour dérivée seconde

$x \mapsto -40x^3$. Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée négative), et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée seconde négative). Réponses b) et d).

37. Point d'inflexion

La fonction a pour dérivée

$x \mapsto 3(x-2)^2$ et pour dérivée seconde

$x \mapsto 6(x-2)$. La dérivée seconde change de signe pour $x = 2$ donc admet un point d'inflexion d'abscisse 2. Réponse a).

38. Fonctions affines

Vrai. Les fonctions affines ont leurs dérivées secondes nulles, donc à la fois positives et négatives donc elles sont à la fois convexes et concaves.

39. Fonctions trigonométriques

a) Faux, la fonction cosinus est concave sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Vrai, la fonction sinus est concave sur $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

Exercices d'application p. 155-157

Étudier un schéma de composition

40. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \to & x^2+1 & \to & \sqrt{x^2+1}. \end{array}$$

2. Comme $x^2 + 1 > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f = \mathbb{R}$.

41. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_* & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1}{x}} \end{array}$$

Schéma de composition de la fonction f.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+ & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_* & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

2. $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$

42. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2-8x+15 & \mapsto & \sqrt{x^2-8x+15} \end{array}$$

2. Comme $x^2 - 8x + 15 \geqslant 0$ ssi $x \in]-\infty ; 3] \cup [5 ; +\infty[$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f =]-\infty ; 3] \cup [5 ; +\infty[$.

43. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & -x+3 & \mapsto & (-x+3)^4 \end{array}$$

2. Comme $x \mapsto -x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction puissance est définie sur $\mathbb{R}$ alors $D_f = \mathbb{R}$.

44. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_* & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} & \mapsto & e^{\frac{1}{x}} \end{array}$$

2. Comme $x \to \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$et que la que la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ alors $D_f = \mathbb{R}^*$.

45. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x+1}{x} & \mapsto & \sqrt{\dfrac{e^x+1}{x}} \end{array}$$

2. Comme $\frac{e^x+1}{x} > 0$ ssi $x > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée

46. $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$f \circ g(3) = f(g(3)) = f\ \frac{1}{3}\ = \sqrt{\frac{1}{3}+1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$

47. $g \circ f(-2) = g(e^{-2}) = (e^{-2})^2 = e^{-4}$

$f \circ g(-1) = f((-1)^2) = f(1) = e^1 = e$

48. 1. $f(1) = \frac{1}{4}$

2. $g(1) = 4$

3. Mettre x ou $\sqrt{x}$ à la place du $x + 3$.

49. $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(1) = -2$

$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(4) = 2$

$f \circ g(-1)$ n'existe pas car g n'est pas définie en -1.

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(-2)$ n'existe pas car g n'est pas définie en -2.

50. $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(4)= 2$

$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 1$

51. $g = \exp(f)$. La fonction exp est :

i) définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_g = D_f$.

ii) strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc les variations de g seront celles de f.

iii) strictement positive donc g est strictement positive.

a) $]-\infty\ ;\ 3]$ réponse d).

b) $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ donc $g'(1) = f'(1)e^{f}(1) = 2e^0 = 2$, réponse a).

c) g est strictement positive donc réponse c).

52. 1. $\cos(f(0)) = \cos(\pi) = -1$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)} = +\infty$.

Calculer la dérivée d'une fonction composée

53. $f'(x) = -e^{-x+2}$

54. $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

55. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}e^{\frac{1}{x+1}}$

56. $f'(x) = -e^{-x}$

57. $f'(x) = -4\sin(4x)$

58. $f'(x) = 3(-4e^{-x})(4e^{-x} + 1)^2 = -12e^{-x}(4e^{-x} + 1)^2$

59. 1. $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = \cos(x)$ et $f^{(4)}(x) = \sin(x)$.

2. $f^{(4)}(x) = f(x)$

3. $f^{(1789)}(x) = f^{(4\times447+1)}(x) = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos(x)$

60. $f_n'(x) = n(-\sin(x))(\cos(x))^{n-1} = -n\sin(x)(\cos(x))^{n-1}$

Étudier une fonction composée et dresser son tableau de variations

61. 1. Schéma de composition de la fonction f.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \to & x^3-1 & \to & \sqrt{x^3-1}. \end{array}$$

2. f existe ssi $x^3 - 1 \geqslant 0$ ssi $x^3 \geqslant 1$ ssi $x \geqslant 1$

donc $D_f = [1\ ;\ +\infty[$.

3. $g'(x) = 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici son tableau de variations.

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$0 \nearrow +\infty$

4. On en déduit le tableau de variations de f.

x	1		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

62. 1. Schéma de composition de la fonction f.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x} & \mapsto & \sqrt{\dfrac{1}{1+x}} \end{array}$$

2. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et

$\dfrac{1}{1+x} \geqslant 0$ ssi $1+x > 0$ ssi $x > -1$ donc $D_g =]-1\ ;+\infty[$.

3. $$g'(x) = \frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2} < 0$$

donc g est strictement décroissante.

x	-1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	‖	$-$	
Variations de g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

4. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc f est strictement décroissante.

x	-1		$+\infty$
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

63. [ERRATUM] la première édition présente une erreur. Il est écrit e^{x2-2x}, alors qu'il faut utiliser l'expression e^{x^2-2x}. Cette erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-2x & \mapsto & e^{x^2-2x} \end{array}$$

2. $x \mapsto x^2 - 2x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

3. $g'(x) = 2x - 2$ donc $g'(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 1$ donc g est croissante sur $[1\ ;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\ ;1]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$		$+$
Variations de g	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$		$+$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$	$e^1 = e$	$\nearrow$ $+\infty$

64. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{x^2} & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$$

2. $x \to -\dfrac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$et $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

3. $g'(x) = \dfrac{2}{x^3}$ donc $g'(x) > 0$ ssi $x > 0$ donc g est croissante sur $]0\ ;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\ ;0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	‖	$+$
Variations de g	0 $\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0

4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	‖	$+$
Variations de f	1 $\searrow$	0 ‖ 0	$\nearrow$ 1

Lire les intervalles où *f* est convexe ou concave

65. *f* est concave sur $[-2\,;-1]$ et convexe sur $[-1\,;+\infty[$.

66. *f* est convexe sur $[-3\,;0]$ et concave sur $[0\,;2]$.

67. *g* est concave sur $[-6\,;-3]$ et convexe sur $[-3\,;0[$.

68. *h* est concave sur $[-4\,;1]$ et convexe sur $[1\,;4[$.

Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

69. $x \mapsto e^x$ est convexe donc sa courbe au-dessus de ses tangentes. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 est

$\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 1 = x + 1$

donc $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel x.

70. $x \to \sqrt{x}$ est concave donc sa courbe en-dessous de ses tangentes. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 est

$\mathcal{T}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$

donc $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(x+1)$ pour tout réel x positif.

71. 1. $x \to \sqrt{x}$ est concave donc $x \to -\sqrt{x}$ est convexe.

2. $\mathcal{T}_9 : y = f(9)(x-9) + f(9) = \frac{1}{6}(x-9) + 3 = \frac{1}{6}x + 1{,}5$

3. Donc $-\sqrt{x} \geqslant \frac{1}{6}x + 1{,}5$ pour tout réel x positif.

Étudier la convexité de *f* à partir des variations de *f′*

72. f' est croissante sur $]-\infty\,;6]$ et f' est décroissante sur $[6\,;+\infty[$ donc *f* est convexe sur $]-\infty\,;6]$ et *f* est concave sur $[6\,;+\infty[$.

73. 1. f' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et f' est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. *f* est concave sur $]-\infty\,;0]$ et *f* est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

74. *f* est concave sur $\left]-\infty\,;2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[2+\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right[$ et

f est convexe sur $\left[2-\frac{1}{\sqrt{3}}\,;2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

75. 1. $f'(x) = -24x^2 + 480x - 2400$

$= -24(x^2 - 20x + 100) = -24(x-10)^2$

2. $x \mapsto (x-10)^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;10]$ et croissante sur $[10\,;+\infty[$. Donc f' est croissante sur $]-\infty\,;10]$ et décroissante sur $[10\,;+\infty[$.

3. *f* est convexe sur $]-\infty\,;10]$ et concave sur $[10\,;+\infty[$.

Étudier la convexité de *f* à partir du signe de *f″*

76. 1. $f'(x) = 3x^2 + 12x$ et $f''(x) = 6x + 12$.

2. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $6x + 12 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -\frac{12}{6}$ ssi $x \geqslant -2$.

Donc *f* est convexe sur $[-2\,;+\infty[$.

77. 1. $f(x) = \frac{-(x+1)-(3-x)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$ et

$f''(x) = \frac{(-4)(-2)}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}$.

2. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x > -1$.

Donc *f* est convexe sur $]-1\,;+\infty[$.

78. 1. $f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = 0 - \frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$.

Donc $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x > 0$.

2. Donc *f* est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

79. 1. $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x \in [-4\,;4]$ et $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \in\,]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$.

2. Donc *f* est convexe sur $]-\infty\,;-4] \cup [4\,;+\infty[$ et concave sur $[-4\,;4]$.

80. 1. a) $f'(x) = \frac{-9\sqrt{x}+6}{2}$ et $f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{x}}$.

b) $f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{x}} < 0$

2. a) $f''(x) < 0$ donc *f* est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) *f* est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa courbe représentative est située au dessus de ses sécantes et en-dessous de ses tangentes.

Lire les points d'inflexion

81. Graphiquement, les points d'inflexion sont ceux d'abscisses -2 et 2.

82. $\mathcal{C}_f$ a pour points d'inflexion les points d'abscisses -1 et 1.

Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

83.1. Tableau de signes de $f''(x)$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0	−	

2. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse 4 et pour ordonnée $6 + (6 - 4)\, e^{4-5} = 6 + 2e^{-1}$.

84. 1. $f'(x) = 7(-x + 1)e^{-x}$

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $-x + 1 \geqslant 0$ ssi $1 \geqslant x$. Donc f est croissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. a) $f''(x) = 7(x - 2)\, e^{-x}$

b) $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x - 2 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 2$. Donc f est concave sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et convexe sur $[2\ ;+\infty[$. De plus $f(2) = \dfrac{14}{e^2}$.

Le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(2\,;\dfrac{14}{e^2}\right)$.

85. 1. $f'(x) = (x + 1)^2e^x$. $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f''(x) = (x + 1)(x + 3)e^x$.

b) $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \in\ ]-\infty\ ;\ -3]\cup[-1\ ;\ +\infty[$ et $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x \in [-3\ ;\ -1]$.

De plus $f(-3 = \dfrac{10}{e^3}$ et $f(-1) = \dfrac{2}{e}$.

Les points d'inflexion de la courbe ont pour coordonnées $\left(-3\,;\dfrac{10}{e^3}\right)$ et $\left(-1\,;\dfrac{2}{e}\right)$.

86. 1. $f'(x) = -\left(x + \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)e^{-x}$

$f'(x) \geqslant 0$ ssi $x \in \left[-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\,;-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$ donc f est croissante sur $\left[-\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\,;-\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$ et décroissante sinon.

2. a) $f''(x) = (x - 1)(x + 4)e^{-x}$

b) $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \in\ ]-\infty\ ;\ -4]\cup[1\ ;\ +\infty[$ et $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x \in [-4\ ;\ 1]$.

De plus $f(-4) = -4e^4$ et $f(1) = \dfrac{16}{e}$.

Les points d'inflexion de la courbe ont pour coordonnées $(-4\ ;\ -4e^4)$ et $\left(1\,;\dfrac{16}{e}\right)$.

Exercices d'entraînement p. 158-159

Étude de fonctions composées

87. 1. a) $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$ ssi $x \in\ ]-\infty\ ;\ 2]\cup[5\ ;\ +\infty[$. (Calculer le discriminant Δ pour trouver les racines puis le signe du polynôme en fonction de a).

b) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc : $D_g =\ ]-\infty\ ;\ 2]\cup[5\ ;\ +\infty[$.

2. a) Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - 7x + 10 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = \dfrac{2x-7}{2\sqrt{x^2 - 7x + 10}}$.

Donc $g'(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant \dfrac{7}{2}$ donc g est croissante sur $\left[\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{2}\right]$.

c) Tableaux de variations des fonctions f et g.

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	0	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$ ↘	0	0	↗ $+\infty$

88.1. a) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geqslant 0$ ssi $x \in \mathbb{R}$.

b) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$ donc il faut que $(x+1)^2$ soit strictement positif, autrement dit que x soit différent de -1. $D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

2. a) Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x + 1)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to-1}(x + 1)^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty.$

b) $g'(x) = \dfrac{-\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{|f(x)|} = -\dfrac{f'(x)}{2|f(x)|\sqrt{f(x)}} = -\dfrac{2x+2}{2|f(x)|\sqrt{f(x)}}.$

Donc $g'(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -2x - 2 \geqslant 0$ ssi $x \leqslant -1$ donc g est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$ et croissante sur $]-\infty\,;-1[$.

c) Tableau de variations de la fonction g.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	‖	$-$	
Variations de g	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

89. 1. Les fonctions $x \mapsto x^3 - 1$ et $x \mapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $D_g = \mathbb{R}$.

2. a) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

b) $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} = 3x^2e^{x^3-1} \geqslant 0$. Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Tableaux de variations des fonctions f et g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$+$		
Variations de f	$-\infty$		↗		$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$			$+$		
Variations de g	0		↗		$+\infty$

90. 1. $f'(x) = -k\sin(kx)$, $f''(x) = -k^2\cos(kx)$,

$f^{(3)}(x) = -k^2(-k)\sin(kx) = k^3\sin(kx)$

et $f^{(4)}(x) = k^4\cos(kx)$.

2. $f^{(4)}(x) = k^4 f(x)$

3. $f^{(2020)}(x) = f^{(4\times 505)}(x) = (k^4)^{505} f(x) = k^{2020} f(x)$

Étudier la convexité d'une fonction pour résoudre un problème

91. f est concave sur $[0\,;\pi]$ et convexe sinon. g est concave sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et convexe sinon.

92. 1. f est convexe sur $[4\,;10]$ et concave sur $[-1{,}8\,;4]$.

2. Le point d'inflexion a pour abscisse 4.

93. 1. $f'(x) = 1 \times e^{0{,}4x} + (x - 2{,}5) \times 0{,}4e^{0{,}4x}$

$$= 0{,}4\left(\frac{1}{0{,}4} + x - 2{,}5\right)e^{0{,}4x} = 0{,}4xe^{0{,}4x}$$

2. $f''(x) = 0{,}4e^{0{,}4x} + 0{,}4x \times 0{,}4e^{0{,}4x}$

$$= (0{,}4 + 0{,}16x)e^{0{,}4x} = \frac{2}{25}(2x+5)e^{0{,}4x}$$

3. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $2x + 5 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -\dfrac{5}{2}$. Donc f est convexe sur $\left[-\dfrac{5}{2}\,;7\right]$ et concave sur $\left[-5\,;-\dfrac{5}{2}\right]$.

94. $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et $g''(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$

or $g''(x) \leqslant 0$ ssi $x + 1 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -1$. Donc g est concave sur $[0\,;+\infty[$.

95. 1. $f'(x) = \dfrac{(e^x - 6)(2e^x - 3)}{(e^x - 3)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{3e^x(e^x + 3)}{(e^x - 3)^3}$.

Or, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\backslash\{\ln(3)\}$, $3e^x(e^x + 3) > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $(e^x - 3)^3$ càd celui de $(e^x - 3)$. Donc $f''(x) \geqslant 0$ ssi $e^x - 3 \geqslant 0$ ssi $e^x \geqslant 3$ ssi $x \geqslant \ln(3)$.

2. $f''(x)$ changerait de signe pour $x = \ln(3)$. Or $\ln(3)$ ne fait pas partie du domaine de définition de f ni de celui de f''. Il n'y a donc pas de point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

96. 1. $f'(x) = (-5x + 5)e^{-x}$ et

$f''(x) = (5x - 10)\,e^{-x} = 5(x - 2)e^{-x}$

2. $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x - 2 \leqslant 0$ ssi $x \leqslant 2$. Donc f est concave sur $]-\infty\,;2]$.

97. 1. $f'(x) = 1 + (16x + 52)\,e^{-0,5x} + (8x^2 + 52x + 88)(-0,5)\,e^{-0,5x}$
$= e^{-0,5x}(-4x^2 - 10x + 8) + 1$
et $f''(x) = e^{-0,5x}(-0,5)(-4x^2 - 10x + 8) + e^{-0,5x}(-8x - 10)$
$= e^{-0,5x}(2x^2 - 3x - 14) = (x + 2)(2x - 7)e^{-0,5x}$.

2. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \in [-4\ ;\ -2] \cup [3,5\ ;\ 10]$. Donc f est convexe sur $[-4\ ;\ -2] \cup [3,5\ ;\ 10]$ et concave sur $[-2\ ;\ 3,5]$.

98. 1. $f'(x) = 2(x + 1)e^{-x}$
et $f''(x) = 2(1)\,e^{-x} + 2(x + 1)(-1)e^{-x} = -2xe^{-x}$.

2. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \leqslant 0$. De plus $f(0) = -4$.
Donc le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(0\ ;\ -4)$.

99.1. $g'(x) = -x(x - 2)e^{-x}$ et $g''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Il faut utiliser $(u \times v)' = u'v + uv'$ à chaque fois.

2. Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, le signe de $g''(x)$ est celui de $x^2 - 4x + 2$.
Or $x^2 - 4x + 2 = (x - (-\sqrt{2} + 2))(x - (\sqrt{2} + 2))$.
Donc $x^2 - 4x + 2 \geqslant 0$ ssi $x \in \,]-\infty\ ;\ -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2\ ;\ +\infty[$ et $x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$ ssi $x \in [-\sqrt{2} + 2\ ;\ \sqrt{2} + 2]$. Donc g est convexe sur $]-\infty\ ;\ -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2\ ;\ +\infty[$ et g est concave sur $[-\sqrt{2} + 2\ ;\ \sqrt{2} + 2]$.
De plus $g(-\sqrt{2} + 2) = (-4\sqrt{2} + 6)e^{\sqrt{2} - 2}$ et
$g(\sqrt{2} + 2) = (4\sqrt{2} + 6)e^{-\sqrt{2} - 2}$.
Donc les points d'inflexion de $\mathscr{C}_g$ ont pour coordonnées $(-\sqrt{2} + 2\ ;\ (-4\sqrt{2} + 6)e^{\sqrt{2} - 2})$ et $(\sqrt{2} + 2\ ;\ (4\sqrt{2} + 6)e^{-\sqrt{2} - 2})$

100. 1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur. Il est écrit $h''(x) = -2\sin(x)e^{-x}$, mais il faut utiliser $h''(x) = -2\sin(x)e^{x}$. Cette erreur est corrigée dans les éditions suivantes.
$h'(x) = -\sin(x)e^{x} + \cos(x)e^{x}$
et $h''(x) = -\cos(x)e^{x} - \sin(x)\,e^{x} - \sin(x)\,e^{x} + \cos(x)e^{x}$
$= -2\sin(x)e^{x}$.

2. $h''(x)$ change de signe ssi $\sin(x)$ change de signe donc pour $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc les coordonnées des points d'inflexion de $\mathscr{C}_h$ sont $(k\pi\ ;\ (-1)^k e^{k}\pi)$.

101. 1. $f''(x) = x(x - 7)(x + 2)e^{x}$.

2. $f(0) = -26$, $f(7) = -54e^7$ et $f(-2) = -\dfrac{126}{e^2}$. Les points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées $(0\ ;\ -26)$, $(7\ ;\ -54e^7)$ et $\left(-2\ ;\ -\dfrac{126}{e^2}\right)$.

102. 1. $g'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} + 3x}{x}$ et $g''(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{x^2} < 0$.

2. Comme $g''(x)$ ne change jamais de signe, $\mathscr{C}_g$ n'admet pas de point d'inflexion.

103. f' est croissante sur $]-3\ ;\ -2] \cup [0\ ;\ 1]$ donc f est convexe sur cet intervalle. f' est décroissante sur $]-2\ ;\ 0]$ donc f est concave sur cet intervalle.

104. f'' est positive sur $]-\infty\ ;\ -7] \cup [-1\ ;\ 3]$ donc f est convexe sur cet intervalle. f''est négative sur $[-7\ ;\ -1] \cup [3\ ;\ +\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

105. $f''(x) = m^2e^{mx} \geqslant 0$ donc f est convexe quelque soit la valeur de m.

106.1. $f''(x) = e^{-x+1} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses sécantes.

107. 1. $g''(x) = \dfrac{-8\sqrt{x} - x^2}{4x^3\sqrt{x}} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
donc g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La courbe représentative de g est au-dessus de ses sécantes et en dessous de ses tangentes.

108. Après présentation d'une courte biographie de Newton et de Leibniz, discussion concernant la paternité du calcul infinitésimal (regroupant calcul différentiel et calcul intégral) et ses conséquences sur les mathématiques anglais (division entre les mathématiciens partisans de Newton avec ceux du reste de l'Europe).

109. Ensemble convexe : objet géométrique tel que, pour tous points A et B de cet ensemble, le segment [AB] est aussi situé en intégralité dans cet ensemble.

Epigraphe : portion du plan située au-dessus du graphe d'une fonction. Dans le cas d'une fonction convexe, cet ensemble est convexe.

Hypographe : portion du plan située en dessous du graphe d'une fonction. Dans le cas d'une fonction concave, cet ensemble est convexe.

110. Thèmes pouvant être abordés (liste non exhaustive) :

– aspect graphique : courbes, sécantes, tangentes

– aspect algébrique : croissance de la dérivée, positivité de la dérivée seconde

– vitesse de production

– coût moyen

– accélération de croissance.

Exercices bilan p. 160

111. Étude d'une fonction composée

1. La fonction $x \to \dfrac{20}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $x \mapsto 7e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. a) $f'(x) = 7\left(-\dfrac{20}{x^2}\right)e^{\frac{20}{x}} = -\dfrac{140}{x^2}e^{\frac{20}{x}}$.

b) $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

3. a) $f''(x) = \dfrac{280(x+10)}{x^4}e^{\frac{20}{x}}$.

b) f'' change de signe pour $x = -10$. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -10$ donc f est convexe sur $[-10\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ et concave sur $]-\infty\ ;\ -10]$.

c)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(1, 30)
y=7*np.exp(20/x)
plt.ylim(0, 1000)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

112. Composition de fonctions et limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f'(2) = 0$.

2. a) $f'(x) = -x(x-2)\ e^{-x+1}$ $f'(x) \geqslant 0$ ssi $x \in [0\ ;\ 2]$. Donc f est croissante sur $[0\ ;\ 2]$ et décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

b)

x	0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$\dfrac{4}{e}$	↘	0

c) $\mathcal{T}_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$\mathcal{T}_4 : y = -8e^{-3}(x - 4)+16e^{-3}$

$\mathcal{T}_4 : y = -8e^{-3x} + 48e^{-3}$

3. a) $f''(x) = (x - \sqrt{2} - 2)(x + \sqrt{2} - 2)e^{-x+1}$

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \in [0\ ; -\sqrt{2}+2]\cup[\sqrt{2}+2\ ; +\infty[$.

Donc f est convexe sur $[0\ ; -\sqrt{2}+2]\cup[\sqrt{2}+2\ ; +\infty[$

et concave sur $[-\sqrt{2}+2\ ; \sqrt{2}+2]$.

b) $f''(x)$ change de signe pour $x \in \{-\sqrt{2}+2\ ; \sqrt{2}+2\}$ donc les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont ceux d'abscisses $-\sqrt{2}+2$ et $\sqrt{2}+2$.

4. $g'(x) = -f'(x)e^{-f(x)} = x(x-2)e^{-x+1}e^{x^2e^{-x+1}}$.

$g'(x) \leqslant 0$ ssi $x \in [0\ ;\ 2]$. Donc g est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$ et croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	1	↘	$\dfrac{1}{e^{\frac{4}{e}}}$	↗	1

5. $h(x) = \sqrt{f(x)} = xe^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ et $h'(x) = \dfrac{1}{2}(-x+2)e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$.

$h'(x) \geqslant 0$ ssi $-x + 2 \geqslant 0$ ssi $2 \geqslant x$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	0	↗	$2e^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

113. Domaine de définition

1. $x^3 + 8 \geqslant 0$ ssi $x^3 \geqslant -8$ ssi $x \geqslant -2$ donc $D_f = [-2\ ; +\infty[$.

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + 8 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

De plus $f(-2) = \sqrt{(-2)^3 + 8} = 0$.

3. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}} \geqslant 0$. Donc $f'(x) \geqslant 0$sur $[-2\ ;+\infty[$ et f est croissante sur $[-2\ ;+\infty[$.

4. a) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}} \geqslant 0$. Donc $f'(x) \geqslant 0$sur $[-2\ ;+\infty[$ et f est croissante sur $[-2\ ;+\infty[$.

b) $f''(x) = \dfrac{3(x^3+32)x\sqrt{x^3+8}}{4(x^3+8)^2}$

c) $f''(x)$ change de signe pour $x = 0$

($x^3 + 32 > 0$ car par ensemble de définition, nous avons déjà $x^3 + 8 \geqslant 0$).

Or $f(0) = 2$ donc le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour coordonnées $(0\ ;2)$.

114. Exponentielle de fonctions

1. a) $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 0$.

b) f semble concave sur $]-1\ ;2]$ et convexe sur $[2\ ;+\infty[$.

c) f semble avoir pour point d'inflexion le point de coordonnées $(2\ ;0{,}6)$.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = 0$.

b) La fonction exp étant une fonction croissante, les variations de g sont celles de f.

x	-1		1		3		$+\infty$
Variations de g	0	↗	e^2	↘	$\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

$g'(1) = f'(1)e^{f(1)} = 0$ et $g'(0) = f'(0)e^{f(0)} = 3e^1 = 3e$.

115. Convexité d'une fonction

1. a) $f'(x) = 1e^{x^2-1} + x(2x)e^{x^2-1} = (1+2x^2)e^{x^2-1}$

b) $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f''(x) = 4xe^{x^2-1} + (1+2x^2)(2x)e^{x^2-1}$

$= (6x + 4x^3)e^{x^2-1} = 2x(2x^2+3)e^{x^2-1}$

b) $f''(x) \geqslant 0$ssi $x \geqslant 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

3. a) $h(x) = x - f(x) = x - xe^{x^2-1} = x(1 - e^{x^2-1})$

b) Sur $[-1\ ;1]$, $1 - e^{x^2-1} \geqslant 0$ donc le signe de $h(x)$ est celui de x. Donc $h(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de D ssi $x \geqslant f(x)$ ssi $x \geqslant 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de D sur $[0\ ;1]$ et au-dessus de D sur $[-1\ ;0]$.

116. Tangente

1. $f'(x) = 5x^4 + \dfrac{100}{3}x^3 + 20x^2 - 160x + 8$ et

$f''(x) = 20x^3 + 100x^2 + 40x - 160$.

2. $20(x-1)(x+2)(x+4) = (20x - 20)(x^2 + 6x + 8)$

$= 20x^3+100x^2+40x - 160 = f''(x)$

3. $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \in [-4\ ;-2]\cup[1\ ;+\infty[$ et $f''(x) \leqslant 0$ ssi $x \in\ ]-\infty\ ;-4]\cup[-2\ ;1]$.

De plus $f(-4) = -\dfrac{1885}{3}$, $f(-2) = -287$ et $f(1) = -55$.

Donc les points d'inflexion ont pour coordonnées $\left(-4\ ;-\dfrac{1885}{3}\right)$, $(-2\ ;-287)$ et $(1\ ;-55)$.

4. $T_{-1} : y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$

$T_{-1} : y = \dfrac{479}{3}(x+1) - \dfrac{259}{3}$

$T_{-1} : y = \dfrac{479}{3}x + \dfrac{220}{3}$

Préparer le BAC
Je me teste p. 162

117. B f est décroissante sur $]2\ ;+\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

118. B $g(2) = e^{f(2)} = e^4$.

119. D $g'(x) = f'(x)\ e^{f(x)}$ donc $g'(-1) = f'(-1)e^{f(-1)} = 0^{e-3} = 0$.

120. A f est décroissante sur $]2\ ;+\infty[$, $x \mapsto x + 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

121. C $h'(x) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+5}}$.

122. A $f'(x) = 0{,}2xe^{0{,}2x}$ et $f''(x) = \dfrac{x+5}{25}e^{0{,}2x}$.

123. D Comme $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -5$ alors f' est croissante sur $[-5\ ;\ 10]$ et décroissante sur $[-10\ ;\ -5]$.

124. D Comme $f''(x) \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -5$ alors f est convexe sur $[-5\ ;\ 10]$ et concave sur $[-10\ ;\ -5]$.

125. A et **D** f est convexe sur $[0\ ;\ 5]$.

126. D f est convexe sur $[-5\ ;\ 10]$ et concave sur $[-10\ ;-5]$ donc admet un point d'inflexion pour $x = -5$.

Préparer le BAC
Je révise p. 163

127. Image d'un nombre

1. $g \circ u(-1) = g(u(-1)) = g(2) = -1$
et $u \circ g(2) = u(g(2)) = u(-1) = 2$.

2. Sur $]-\infty\ ;\ -1]$, la fonction u est décroissante et cet intervalle a pour image l'intervalle $[2\ ;\ 4]$. Or sur $[2\ ;\ 4]$, la fonction g est croissante. Donc la fonction $g \circ u$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -1]$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(u(x)) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} g(X) = +\infty$ et on conclut par théorème sur les limites de composée.

128. Étudier une fonction trigonométrique

1. Les fonctions $x \mapsto mx$ et $x \mapsto \cos(x) + x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $D_{gm} = \mathbb{R}$.

2. $g_m(1) = \cos(m) + m$ et $g_m(-1)$
$= \cos(-m) - m = \cos(m) - m$

Donc, pour $m > 0$; $g_m(-1) \neq g_m(1)$ et,
pour $m \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $g_m(-1) \neq -g_m(1)$. Donc la fonction g_m n'est ni paire ni impaire.

La fonction $x \mapsto \cos(mx)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{m}$ mais la fonction $x \mapsto mx$ n'est pas périodique.

Donc g_m n'est pas périodique. On ne peut restreindre l'intervalle d'étude de cette fonction.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \cos(mx) + mx = \cos(0) + 0 = 1$

et $\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{m}} \cos(x) + mx = \cos(2\pi) + 2\pi = 1 + 2\pi$.

$g_m'(x) = -m\sin(mx) + m = m(1 - \sin(mx)) \geqslant 0$

Donc g_m est croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{2\pi}{m}\right]$.

4.

x	0	$\dfrac{2\pi}{m}$
Variations de g_m	1	$\nearrow$ $1 + 2\pi$

129. Points d'inflexion

1. $f(x) = (-5x^2 + 5)e^x$

donc $f'(x) = (-10x)e^x + (-5x^2 + 5)e^x = (-5x^2 - 10x + 5)e^x$.

Par suite, $f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x$
$= -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 5 \times 5 = 400 - 100 = 300 > 0$
d'où $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

Donc $5x^2 + 20x + 5 \geqslant 0$ ssi
$x \in]-\infty\ ;\ -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}\ ;\ +\infty[$.

Or $-e^x < 0$ pour tout réel x. Donc $f''(x) \leqslant 0$ ssi
$x \in]-\infty\ ;\ -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}\ ;\ +\infty[$ et $f''(x) \geqslant 0$ ssi
$x \in]-2 - \sqrt{3}\ ;\ -2 + \sqrt{3}\ [$.

3. Les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ sont donc : $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4. f est concave sur $]-\infty\ ;\ -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}\ ;\ +\infty[$ et convexe sur $[-2 - \sqrt{3}\ ;\ -2 + \sqrt{3}\ ]$.

130. Étudier une fonction composée

1. $-x + 1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$ et la fonction $x \mapsto xe^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x + 1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{-x+1}} = e^0 = 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Un raisonnement analogue en $-\infty$ conduit à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} (-x + 1) = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{-x + 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{1}{-x+1}} = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-}(-x+1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 1^-}\dfrac{1}{-x+1} = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty. \\ \lim\limits_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{-x+1}} = +\infty \end{cases}$$

3. $f'(x) = -\dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{-x+1}}$. Or $-e^{\frac{1}{-x+1}} < 0$ pour tout réel de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\dfrac{x}{x-1}$. Or $\dfrac{x}{x-1} > 0$ ssi $x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$ et négatif sinon. Donc f est décroissante sur $]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[$ et croissante sur $[0 ; 1]$.

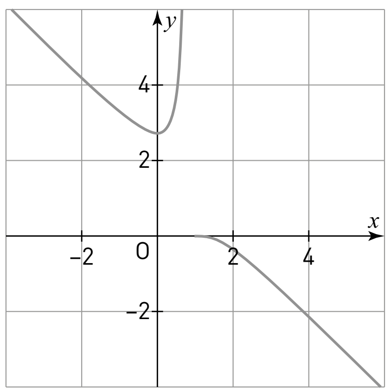
La fonction possède deux extrema locaux à savoir :

- un minimum local pour $x = 0$: A(0 ; e).
- un maximum local pour $x = 1$: B(1 ; 0).

4. On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	e ↗	$+\infty$ ‖ 0 ↘	$-\infty$

5.



131. Étudier la convexité d'une fonction

1. $f'(x) = 0 + 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x+42)\left(-\dfrac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}}$

$$= \left(14 - 14x - \frac{42}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}(-14x+28)e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. $\dfrac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $-14x + 28$. $-14x + 28 \geqslant 0$ ssi

$28 \geqslant 14x$ ssi $\dfrac{28}{14} \geqslant x$ ssi $2 \geqslant x$.

x	0	2	60
Variations de f	112 ↗	$70 + 70e^{-94}$ ↘	$70 + 882e^{-12}$

3. a) $f''(7) = 0$. Le point A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

b) $\dfrac{14}{25}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ pour tout réel x donc

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $x - 7 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 7$. Donc f est convexe sur $[7 ; 60]$ et concave sur $[0 ; 7]$.

c) L'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum est 7 et correspond au point d'inflexion précédemment cité.

Exercices vers le supérieur p. 164-165

132. Courbe de Lorenz

1. a) $f'(x) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{3(x^2+2x+1)-2}{2(x+1)^2}$

$$= \frac{3x^2+6x+1}{2(x+1)^2} = \frac{\left(x + \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)(3x+3-\sqrt{6})}{2(x+1)^2}$$

b) $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; 1]$ donc f est croissante sur $[0 ; 1]$.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	0 ↗	1

$f(0) = \dfrac{3}{2} \times 0 + \dfrac{1}{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$

c) $x - f(x) = x - \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{x+1} + 1$

$$= \frac{2x(x+1) - 3x(x+1) + 2(x+1)}{2(x+1)}$$

$$= \frac{-x^2+x}{2(x+1)} = \frac{-x(x-1)}{2(x+1)}$$

Sur $[0 ; 1]$, $-x$ et $x - 1$ sont négatifs, 2 et $x + 1$ donc positifs donc $x - f(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $x \geqslant f(x)$ sur $[0 ; 1]$.

2. [ERRATUM] la première édition du manuel comporte une erreur. Il est inscrit :

$g(x) = e^x - (e-2)x + 1$.

Il faut utiliser l'expression :

$g(x) = e^x - (e-2)x - 1$.

Cette erreur est corrigée dans les éditions suivantes du manuel.

a) $g'(x) = e^x - (e-2) = e^x - e + 2$. Or pour $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$ donc $e^x - e + 2 \geqslant 1 - e + 2 = 3 - e$. Or $3 - e \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$ donc g est croissante sur $[0 ; 1]$.

b) $g(0) = e^0 - (e-2)\times 0 - 1 = 0$

$g(1) = e^1 - (e-2)\times 1 - 1 = e - e + 2 - 1 = 1$

c)

x	0		$\ln(e-1)$		1
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h	0	$\nearrow$	$h(\ln(e-1))$	$\searrow$	0

$$\begin{aligned} h(\ln(e-1)) &= \ln(e-1) - e^{\ln(e-1)} + (e-2)\ln(e-1) + 1 \\ &= (e-1)\ln(e-1) - (e-1) + 1 \\ &\approx 0{,}2 \end{aligned}$$

Donc $h(x) \geqslant 0$ donc $x - g(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, $g(x) \leqslant x$.

3. Chaque fonction (f ou g) vérifie les trois conditions énoncées plus haut dans l'activité. Ce sont donc bien toutes deux des courbes de Lorenz.

133. Composition avec l'opposé

1. $g'(x) = -f'(-x)$

2. Si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ pour tout réel $x \in$ I alors : $-f'(-x) = f'(x)$

Donc f' est impaire.

3. Si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel $x \in$ I alors :

$-f'(-x) = -f'(x)$ c'est-à-dire $f'(-x) = f'(x)$.

Donc f' est paire.

4. Si f' est impaire alors pour tout réel $x \in$ I :

$-f'(-x) = f'(x)$.

En cherchant des primitives à gauche et à droite on obtient :

$f(-x) + k_1 = f(x) + k_2$.

Or pour $x = 0$, on obtient $k_1 = k_2$ donc $f(x) = f(-x)$ donc f est paire.

5. Si f' est paire alors pour tout réel $x \in$ I :

$f'(-x) = f'(x)$.

En cherchant des primitives à gauche et à droite on obtient :

$-f(-x) + k_1 = f(x) + k_2$.

Or pour $x = 0$, $f(0) = 0$ donc on obtient $k_1 = k_2$ donc $f(x) = -f(-x)$ donc f est impaire.

134. Étudier une fonction composée

1. $mx + 1 \neq 0$ c-à-d $x \neq -\dfrac{1}{m}$ donc $D_{f_m} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{m}\right\}$.

Dans la suite de la correction on notera :

$x \to -\dfrac{1}{m}^-$ le fait que x tende vers $-\dfrac{1}{m}$ et que $x < -\dfrac{1}{m}$.

$x \to -\dfrac{1}{m}^+$ le fait que x tende vers $-\dfrac{1}{m}$ et que $x > -\dfrac{1}{m}$.

2. Si $m > 0$ alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (mx+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{mx+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{mx+1}} = e^0 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Un raisonnement analogue en $-\infty$ conduit à $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\frac{1}{m}^+} (-x+1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{m}^+} \dfrac{1}{-x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{m}^+} e^{\frac{1}{-x+1}} = +\infty \end{cases} \text{donc } \lim_{x\to-\frac{1}{m}^+} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\frac{1}{m}^-} (-x+1) = 0^- \\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{m}^-} \dfrac{1}{-x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\frac{1}{m}^-} e^{\frac{1}{-x+1}} = 0 \end{cases} \text{donc } \lim_{x\to-\frac{1}{m}^-} f(x) = 0.$$

Si $m < 0$ alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (mx+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{mx+1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{mx+1}} = e^0 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Un raisonnement analogue en $-\infty$ conduit à $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{m}^+} (-x+1) = 0^- \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{m}^+} \dfrac{1}{-x+1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{m}^+} e^{\frac{1}{-x+1}} = 0 \end{cases} \text{donc } \lim_{x \to -\frac{1}{m}^+} f(x) = 0.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{m}^+} (-x+1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{m}^+} \dfrac{1}{-x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{m}^-} e^{\frac{1}{-x+1}} = +\infty \end{cases} \text{donc } \lim_{x \to -\frac{1}{m}^-} f(x) = +\infty.$$

3. $f_m'(x) = me^{\frac{1}{mx+1}} + \dfrac{(-m)(mx+1)e^{\frac{1}{mx+1}}}{(mx+1)^2} = \dfrac{m^2 x e^{\frac{1}{mx+1}}}{mx+1}$

Or $m^2 e^{\frac{1}{mx+1}} > 0$ pour tout réel de $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{m}\right\}$.

Donc le signe de $f_m'(x)$ dépend de celui de $\dfrac{x}{mx+1}$.

Si $m > 0$ alors :

$\dfrac{x}{mx+1} > 0$ ssi $x \in \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{m}\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$ et négatif sinon. Donc f est croissante sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{1}{m}\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{m}\,;0\right]$.

La fonction possède deux extrema locaux à savoir :

- un minimum local pour $x = 0$: A(0 ; e).
- un maximum local pour $x = -\dfrac{1}{m}$: $B\left(-\dfrac{1}{m}\,;0\right)$.

Si $m < 0$ alors :

$\dfrac{x}{mx+1} < 0$ ssi $x \in \left]-\infty\,;0\right[\cup \left]-\dfrac{1}{m}\,;+\infty\right[$ et négatif sinon.

Donc f est décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right[\cup \left]-\dfrac{1}{m}\,;+\infty\right[$ et croissante sur $\left[0\,;-\dfrac{1}{m}\right]$.

La fonction possède deux extrema locaux à savoir :

- un minimum local pour $x = 0$: A(0 ; e).
- un maximum local pour $x = -\dfrac{1}{m}$: $B\left(-\dfrac{1}{m}\,;0\right)$.

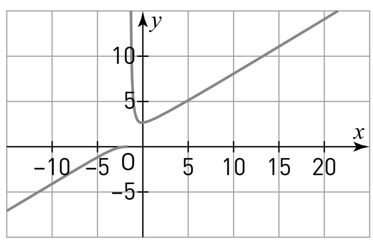
4. Si $m > 0$ alors on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{m}$		0		$+\infty$
Signe de $f_m'(x)$		+	||	−		+	
Variations de f_m	$-\infty$	↗	0 || $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

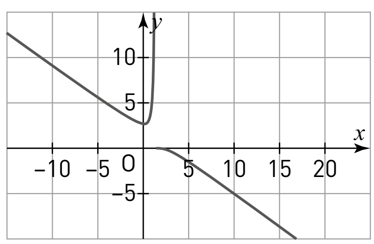
Si $m < 0$ alors on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$-\dfrac{1}{m}$		$+\infty$
Signe de $f_m'(x)$		−		+	||	−	
Variations de f_m	$+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$ || 0	↘	$-\infty$

5. Si $m > 0$:



Si $m < 0$:



135. Dérivée *n*-ième d'une fonction (1)

1. $f'(x) = nx^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

2. $f^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 1x^{n-n} = n!x^0 = n!$

136. Dérivée *n*-ième d'une fonction (2)

1. $f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$ et $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$

2. $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$

3. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$:

Initialisation : pour $k = 1$

– d'une part $f^{(k)}(x) = f^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

– d'autre part $\dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = \dfrac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = -\dfrac{1}{x^2}$

Donc $f^{(1)}(x) = \dfrac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}}$ donc la relation est vérifiée au rang $k = 1$.

Hérédité : supposons la relation vérifiée à un rang k fixé et démontrons-la au rang $k + 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

alors $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \times \dfrac{-(k+1)}{x^{k+1+1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}$

donc la relation est vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

4. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$ (pour $a \in \mathbb{R}$).

Initialisation : pour $k = 1$

- d'une part $f^{(k)}(x) = f^{(1)}(x) = -\dfrac{1}{(a+x)^2}$
- d'autre part $\dfrac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}} = \dfrac{(-1)^k 1!}{(a+x)^{1+1}} = -\dfrac{1}{(a+x)^2}$

donc $f^{(1)}(x) = \dfrac{(-1)^1 1!}{(a+x)^{1+1}}$ donc la relation est vérifiée au rang $k = 1$.

Hérédité : supposons la relation vérifiée à un rang k fixé et démontrons-la au rang $k + 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$$

alors $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \times \dfrac{-(k+1)}{(a+x)^{k+1+1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(a+x)^{k+2}}$

donc la relation est vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$.

5. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(a-x)^{k+1}}$ (pour $a \in \mathbb{R}$).

Initialisation : pour $k = 1$

- d'une part $f^{(k)}(x) = f^{(1)}(x) = \dfrac{1}{(a-x)^2}$
- d'autre part $\dfrac{k!}{(a-x)^{k+1}} = \dfrac{1!}{(a-x)^{1+1}} = \dfrac{1}{(a-x)^2}$

donc $f^{(1)}(x) = \dfrac{1!}{(a-x)^{1+1}}$ donc la relation est vérifiée au rang $k = 1$.

Hérédité : supposons la relation vérifiée à un rang k fixé et démontrons-la au rang $k + 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}$$

alors $f^{(k+1)}(x) = k! \times \dfrac{(-1)(-(k+1)}{(a-x)^{k+1+1}} = \dfrac{(k+1)!}{(a-x)^{k+2}}$

donc la relation est vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(a-x)^{k+1}}$.

137. Dérivée *n*-ième d'une fonction (3)

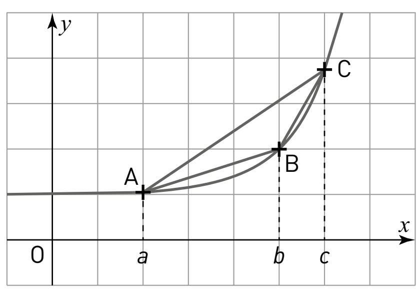
1. $f'(x) = ke^{kx}$ et $f''(x) = k^2e^{kx}$

2. $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

3. $f^{(n)}(x)$ est du signe de k^n. Donc si k est positif alors $f^{(n)}(x)$ est positif quel que soit la valeur de n.

Si k est négatif alors $f^{(n)}(x)$ est positif pour n pair et négatif pour n impair.

138. Théorème des pentes



Soit a, b et c trois réels tels que $a < b < c$. Soit f une fonction convexe et A(a ; $f(a)$), B(b ; $f(b)$) et C(c ; $f(c)$) trois points de $\mathscr{C}_f$.

1re inégalité :

soit $t = \dfrac{b-a}{c-a}$ alors $t \in [0\ ;\ 1]$ et $b = tc + (1-t)a$.

Or f est convexe donc :

$$f(b) \leqslant tf(c) + (1-t)f(a)$$

c-à-d $f(b) \leqslant \dfrac{b-a}{c-a}f(c) + \left(1 - \dfrac{b-a}{c-a}\right)f(a)$

c-à-d $f(b) \leqslant \dfrac{b-a}{c-a}f(c) + \dfrac{c-b}{c-a}f(a)$

c-à-d $(c1 - a)f(b) \leqslant (b1 - a)f(c) + (c1 - b)f(a)$

c-à-d $(f(b)1 - f(a))(c1 - a) \leqslant (f(c)1 - f(a))(b1 - a)$

c-à-d, comme $c1 - a \neq 0$ et $b1 - a \neq 0$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

2e inégalité :

soit $t = \dfrac{c-b}{c-a}$ alors $t \in [0\ ;\ 1]$ et

$t(c-a) = c-b$ c-à-d $tc - ta = c - b$

c-à-d $b = ta + (1-t)c$.

Or f est convexe donc :

$f(b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(c)$

c-à-d $f(b) \leqslant \dfrac{c-b}{c-a}f(a) + \left(1 - \dfrac{c-b}{c-a}\right)f(c)$

c-à-d $f(b) \leqslant \dfrac{c-b}{c-a}f(a) + \dfrac{b-a}{c-a}f(c)$

c-à-d $(c-a)f(b) \leqslant (c-b)f(a) + (b-a)f(c)$

c-à-d $(c-a)(f(b) - f(c)) \leqslant (b-c)(f(c) - f(a))$

c-à-d $-(c-a)(f(c) - f(b)) \leqslant -(c-b)(f(c) - f(a))$

c-à-d $(c-b)(f(c) - f(a)) \leqslant (c-a)(f(c) - f(b))$

c-à-d, comme $c - a \neq 0$ et $c - b \neq 0$

$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}.$

Conclusion :

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

139. Inégalité de convexité (1)

Ici $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ et la fonction ln est concave d'où :

$$\ln\left(\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}\right) \geqslant \frac{1}{a}\ln(x^a) + \frac{1}{b}\ln(y^b) = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

D'où, par croissance de la fonction exp,

$$\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geqslant xy.$$

140. Inégalité de convexité (2)

La fonction sinus est concave sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Donc sa courbe est au-dessus de ses sécantes donc, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, on obtient :

$$\sin\left((1-t)\times 0 + t\frac{\pi}{2}\right) \geqslant (1-t)\sin(0) + t\sin\ \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \geqslant t$$

Pour $t = \dfrac{2x}{\pi}$, on obtient $\sin(x) \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$.

D'autre part, sa courbe est en dessous de ses tangentes, notamment de sa tangente à l'origine.

$$\mathscr{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$

D'où, pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

141. Inégalité arithmético-géométrique

La généralisation de la formule de convexité donne :

« soit n un entier naturel, soient x_i des réels, pour $t_i \in [0\ ;\ 1]$ tel que $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, si f est une fonction convexe (resp. concave) alors :

$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n)$

(resp. $f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \geqslant t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n)$) »

Ici $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \ldots + \dfrac{1}{n} = 1$ et la fonction ln est concave d'où :

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ldots + \frac{1}{n}x_n\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + \ldots + \frac{1}{n}\ln(x_n)$$

c-à-d

$$\frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln x_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(x_n) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ldots + \frac{1}{n}x_n\right)$$

c-à-d

$$\ln\left(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right) \leqslant \ln\ \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

En opérant par la fonction exponentielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

142. Avec une exponentielle

Soit $t = \frac{1}{2} \in [0\,;1]$. La fonction exp est convexe donc :

$$\exp\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \leqslant \frac{1}{2}\exp(a) + \frac{1}{2}\exp(b)$$

D'où $e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(e^a + e^b)$.

143. Concavité de la fonction réciproque

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Alors pour tous a et b de I et pour tout $t \in [0\,;1]$:

$$f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$$

Comme f est strictement monotone de I vers J, f^{-1} est définie sur J vers I et il existe $x \in$ I et $y \in$ J tels que $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$.

On obtient donc :

$$f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y)) \leqslant tf(f^{-1}(x)) + (1-t)f(f^{-1}(y))$$

c-à-d

$$f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y)) \leqslant tx + (1-t)y$$

Maintenant f et f^{-1} ont même monotonie $\left((f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\right)$, donc :

i) si f est strictement croissante alors f^{-1} l'est aussi et donc :

$$f^{-1}(f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y))) \leqslant f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

c-à-d

$$tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

autrement dit ceci montre que f^{-1} est concave.

ii) si f est strictement décroissante alors f^{-1} l'est aussi et donc :

$$f^{-1}(f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y))) \geqslant f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

c-à-d

$$tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

autrement dit ceci montre que f^{-1} est convexe.

144. Avec un paramètre

1. $g_\lambda(-x) = e^{-\lambda(-x2)} = e^{-\lambda x2} = g_\lambda(x)$ donc g_λ est paire.

2. Si $\lambda > 0$ alors : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$.

Si $\lambda < 0$ alors : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\lambda x^2} = +\infty$.

3. $g'_\lambda(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$

Si $\lambda > 0$ alors on obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'_\lambda(x)$		+	0	−	
Variations de g'_λ	0	↗	1	↘	0

Si $\lambda < 0$ alors on obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'_\lambda(x)$		−	0	+	
Variations de g'_λ	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4. $g''_\lambda(x) = -2\lambda e^{-\lambda x^2} + (-2\lambda x)^2 e^{-\lambda x^2} = 2\lambda(-1 + 2\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}$

5. Si $\lambda < 0$ alors $g_\lambda''(x)$ ne change pas de signe donc il n'y a pas de point d'inflexion.

Si $\lambda > 0$ alors $g_\lambda''(x)$ change de signe pour $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ donc il y a deux points d'inflexion donc deux points en lesquels la courbe traverse sa tangente.

145. Point d'inflexion (1)

1. a) $f'(x) = \frac{(6x+15)(3x^2) - (3x^2 + 15x - 10)(6x)}{(3x^2)^2}$

$$= \frac{-45x^2 + 60x}{9x^4} = \frac{-15x + 20}{3x^3}$$

b)

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $(-15x + 20)$		+	‖	+		−	
Signe de $(3x^3)$		−	‖	+		+	
Signe de $f'(x)$		−	‖	+		−	
Variations de f	1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{23}{8}$	↘	1

2. a) $f''(x) = \dfrac{(-15)(3x^3) - (-15x+20)(9x^2)}{(3x^3)^2}$

$= \dfrac{-45x^3 + 135x^3 - 180x^2}{9x^6} = \dfrac{10x - 20}{x^4}$

b) $f''(x) \geqslant 0$ ssi $10x - 20 \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 2$.

Donc f est convexe sur $[2\,;+\infty[$.

c) $f''(x)$ change de signe en 2, donc 2 est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

146. Convexité d'une fonction (1)

$f'(x) = 4ax^3 + b$ et $f''(x) = 12ax^2$ donc le signe de $f''(x)$ est le même que celui de a. Si a est positif alors f est convexe et si a est négatif alors f est concave.

147. Convexité d'une fonction (2)

1. $f'(x) = 3e^{-x^2} + (3x)(-2x)e^{-x^2} = 3(1-2x^2)e^{-x^2}$

Or $f'(x) \geqslant 0$ ssi $1 - 2x^2 \geqslant 0$ ssi $\dfrac{1}{2} \geqslant x^2$

ssi $x \in \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

2. $f''(x) = 6xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$

$f''(x)$ change de signe en 0. Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

3. $\mathscr{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$; $\mathscr{T}_0 : y = 3x - 1$

cherchons le signe de $g(x)$.

$g(x) = f(x) - (3x-1) = 3xe^{-x^2} - 3x = 3x(e^{-x^2} - 1)$

Or pour tout réel x, $e^{-x^2} - 1 < 0$, donc le signe de $g(x)$ est celui de x. Donc $g(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Autrement dit $f(x) \geqslant 3x - 1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \leqslant 3x - 1$ sur $\mathbb{R}_-$ c-à-d $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}_0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{T}_0$ sur $\mathbb{R}_-$.

$\mathscr{T}_0$ traverse $\mathscr{C}_f$ en le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0.

On retrouve le fait que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

148. Point d'inflexion (2)

1. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$ donc :

i) si $a > 0$ alors : $f''(x) \geqslant 0$ ssi $6ax + 2b \geqslant 0$ ssi $x \geqslant -\dfrac{2b}{6a}$ ssi $x \geqslant -\dfrac{b}{3a}$. Donc f est convexe sur $\left[-\dfrac{b}{3a}\,;+\infty\right[$ et concave sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{3a}\right]$.

ii) si $a < 0$ alors : $f''(x) \geqslant 0$ ssi $6ax + 2b \geqslant 0$ ssi $x \leqslant -\dfrac{2b}{6a}$ ssi $x \leqslant -\dfrac{b}{3a}$. Donc f est concave sur $\left[-\dfrac{b}{3a}\,;+\infty\right[$ et convexe sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{3a}\right]$.

2. Quel que soit le signe de a, la dérivée seconde $f''(x)$ change de signe en $-\dfrac{b}{3a}$, la courbe représentative de f admet donc un point d'inflexion d'abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$.

3. Ici $a = 2$ et $b = 6$ donc $\alpha = -\dfrac{b}{3a} = -\dfrac{6}{6} = -1$.

La courbe représentative de f admet donc un point d'inflexion d'abscisse $\alpha = -1$.

149. Avec un logiciel de calcul formel

1. a) $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} \times \dfrac{e^1}{e^x} = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{e}{\sqrt{x}}$ avec $x > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{e}{\sqrt{x}} = 0 \times 0 = 0$

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{1-x} + \sqrt{x}(-1)e^{1-x}$

$= e^{1-x}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) = e^{1-x}\left(\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right)$

b) Comme $e^{1-x} > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2x$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ ssi $1 - 2x \geqslant 0$ ssi $1 \geqslant 2x$ ssi $\dfrac{1}{2} \geqslant x$. Donc f est croissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

c) $\mathscr{T}_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\mathscr{T}_1 : y = -\dfrac{1}{2}(x-1) + 1 = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

d) Chaque facteur est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf $4x^2 - 4x - 1 = 4\left(x - \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Donc $4x^2 - 4x - 1$ change de signe pour $x = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ et pour $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ qui sont donc les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

f est donc convexe sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\,;+\infty\right[$ et concave sur $\left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Travaux pratiques

p. 166-167

TP 1. Des composées particulières

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Étudier certaines fonctions particulières et pour certaines leurs réciproques.

A. Fonctions réciproques l'une de l'autre

1. On remarque que les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. a) $g\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $f\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

b) $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

Ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}_+$ mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier (sur $\mathbb{R}_-^*$, la fonction $g\circ f$ n'est pas définie).

3. $g\circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f\circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$

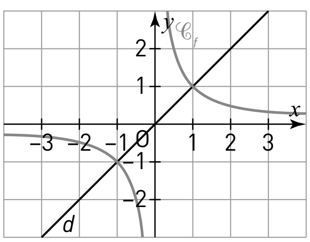
$f\circ g(x) = f(g(x)) = g(e^x) = \ln(e^x) = x$

Ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier (sur $\mathbb{R}_-$, la fonction $g\circ f$ n'est pas définie).

B. Fonctions involutives

1. a) $f\circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} = x$

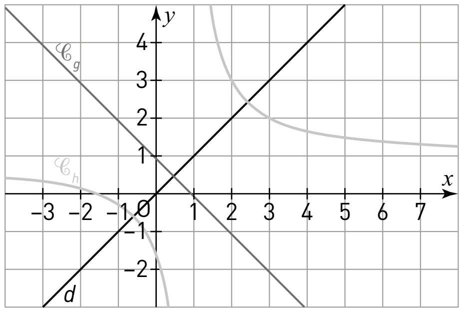
b)



$\mathscr{C}_f$ est son propre symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. g est affine donc définie sur $\mathbb{R}$. h est homographique et définie pour $x \neq a$ donc est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.

b)



$\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ admettent la droite d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

c) $g\circ g(x) = g(g(x)) = g(a - x) = a - (a - x) = x$

$$h\circ h(x) = h(h(x)) = h\left(\frac{b}{x-a} + a\right) = \frac{b}{\dfrac{b}{x-a} + a - a} + a$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{\dfrac{b}{x-a}} + a = \frac{1}{\dfrac{1}{x-a}} + a = x - a + a = x$$

À chaque calcul on obtient x d'où : $g\circ g = h\circ h = Id$ chacune de ces fonctions est sa propre réciproque.

C. Fonctions idempotentes

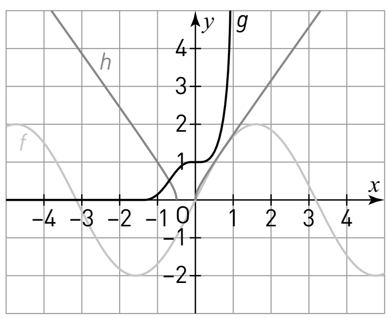
i) Si $x \geqslant 0$ alors $abs(abs(x)) = abs(x) = x$.

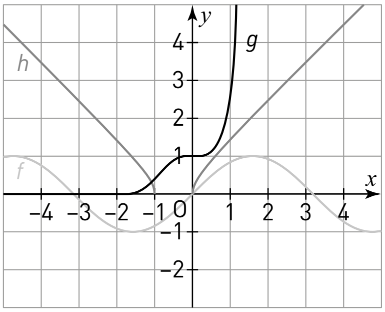
ii) Si $x \leqslant 0$ alors $abs(abs(x)) = abs(-x) = x = abs(x)$.

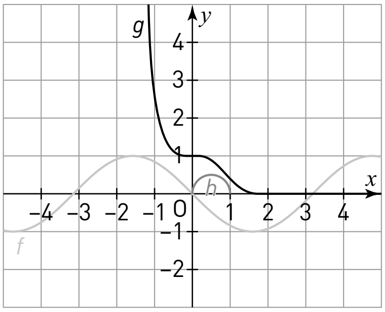
iii) Dans les deux cas, $abs(abs(x)) = abs(x)$, la fonction valeur absolue est dite idempotente.

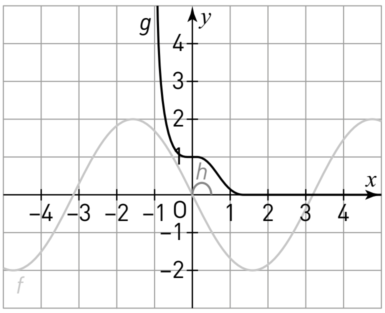
TP 2. Étude d'une fonction à paramètre

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Étudier l'incidence d'un paramètre sur certaines fonctions.









A. Étude d'une fonction trigonométrique

1. Voir courbe gris clair sur les graphiques ci-dessus.

2. Quel que soit le réel t, f est définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période 2π. On remarque que, si t est de signe constant, seule l'amplitude de la courbe varie.

Étudions les variations sur $[0\,;\,2\pi]$:

i) Si $t > 0$ alors f est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Variations de f	0	↗	t	↘	0	↘	$-t$	↗	0

ii) Si $t < 0$ alors f est décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Variations de f	0	↘	t	↗	0	↗	$-t$	↘	0

iii) Si $t = 0$ alors f est constante égale à 0.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Variations de f	0	→		→	0

B. Étude d'une fonction exponentielle

1. Voir courbe noire sur les graphiques ci-dessus.

2. Quel que soit le réel t, g est définie sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto tx^3$ est une fonction polynomiale (définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$) et exp est définie sur $\mathbb{R}$.

Étudions les variations sur $\mathbb{R}$:

i) Si $t > 0$ alors g est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g	0	↗	1	↗	$+\infty$

ii) Si $t < 0$ alors g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	↘	1	↘	0

iii) Si $t = 0$ alors g est constante égale à 1.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de g	1	→	1

C. Étude d'une fonction racine carrée

1. Voir courbe gris moyen sur les graphiques ci-dessus.

2. $h(x) = \sqrt{tx^2 + x} = \sqrt{x(tx + 1)}$

i) Si $t > 0$, alors la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est positive pour $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{t}\right] \cup [0\,;+\infty[$ et négative pour $x \in \left[-\frac{1}{t}\,;0\right]$. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$D_h = \left]-\infty\,;-\frac{1}{t}\right] \cup [0\,;+\infty[.$$

De plus la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{t}\right]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. La fonction racine est également croissante donc la composition par cette fonction conserve la monotonie.

Donc la fonction h est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{t}\right]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{t}$		0		$+\infty$
Variations de h	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

ii) Si $t < 0$, alors la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est négative pour $x \in \left]-\infty\,;0\right] \cup \left[-\frac{1}{t}\,;+\infty\right[$ et positive pour $x \in \left[0\,;-\frac{1}{t}\right]$. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$D_h = \left[0\,;-\frac{1}{t}\right].$$

De plus la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est croissante sur $\left[0\,;-\frac{1}{2t}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{2t}\,;-\frac{1}{t}\right]$. La fonction racine est également croissante donc la composition par cette fonction conserve la monotonie.

Donc la fonction h est croissante sur $\left[0\,;-\frac{1}{2t}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{2t}\,;-\frac{1}{t}\right]$.

$$h\left(-\frac{t}{2}\right) = \sqrt{-\frac{1}{2t}\left(t \times \frac{-1}{2t} + 1\right)} = \sqrt{-\frac{1}{4t}}$$

x	$-\infty$	0		$-\frac{1}{2t}$		$-\frac{1}{t}$	$+\infty$
Variations de f		0	↗	$\sqrt{-\frac{1}{4t}}$	↘	0	

iii) Si $t = 0$ alors la fonction h est la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x}$.

x	0		1		$+\infty$
Variations de h	0	↗	1	↗	$+\infty$

TP 3. Déterminer le lieu de vitesse maximale de la montagne russe

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Calculer.

1. $f''(x) = \dfrac{1\,200\sqrt{3}(2x - 27)}{(4x^2 - 108x + 1\,029)^2}$

2. $f''(x)$ change de signe pour $x = \frac{27}{2} = 13{,}5$. Donc le point d'inflexion a pour coordonnées $(13{,}5\,; f(13{,}5))$.

3. En ce point, $f'(13{,}5) = -\sqrt{3}$. Il s'agit du coefficient directeur de la tangente en ce point. Si $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$ alors $\alpha \approx -\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire à un angle géométrique de 60°.

4. La vitesse est maximale pour $x = 13{,}5$.