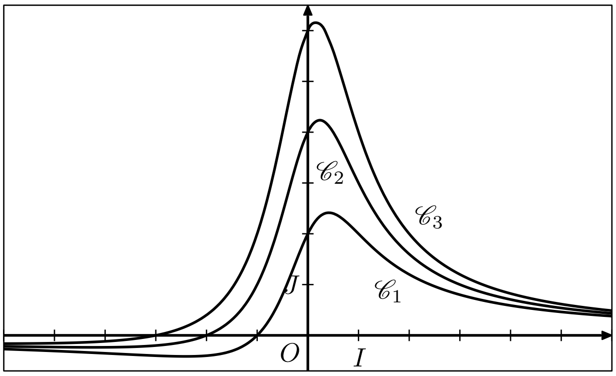
Exercices - Convexité

Exercice 1

On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2\cdot(x+n)}{1+x^2}$$

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'_n.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1.

3. a. Etablir l'égalité suivante :
$$n\cdot x^3 - (2\cdot n+1)\cdot x^2 + (n+2)\cdot x - 1 = (x-1)^2\cdot(n\cdot x-1)$$

   b. Etudier la position relative de la droite (d_n) et de la courbe $\mathscr{C}_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Correction 1

1. L'expression de la fonction f_n est définie par le quotient des formules :
$$u(x) = 2\cdot(x+n) \quad ; \quad v(x) = 1+x^2$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x$$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f'_n dérivée de la fonction f_n :
$$f'_n(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{2\cdot(1+x^2) - 2\cdot(x+n)\cdot 2\cdot x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2+2\cdot x^2 - 4\cdot x^2 - 4\cdot n\cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2\cdot x^2 - 4\cdot n\cdot x + 2}{(1+x^2)^2}$$

2. On a les deux valeurs :
   - $f_n(1) = \dfrac{2\cdot(1+n)}{1+1^2} = \dfrac{2\cdot(1+n)}{2} = 1+n$
   - $f'_n(1) = \dfrac{-2\times 1^2 - 4\cdot n\times 1 + 2}{(1+1^2)^2} = \dfrac{-2-4\cdot n+2}{2^2}$
   $= \dfrac{-4\cdot n}{4} = -n$

   L'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1 s'exprime par :
$$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$$
$$y = -n\cdot(x-1) + (1+n)$$
$$y = -n\cdot x + n + 1 + n$$
$$y = -n\cdot x + (2\cdot n+1)$$

3. a. On a les transformations algébriques :
$$(x-1)^2\cdot(n\cdot x-1) = (x^2-2\cdot x+1)\cdot(n\cdot x-1)$$
$$= n\cdot x^3 - x^2 - 2n\cdot x^2 + 2\cdot x + n\cdot x - 1$$
$$= n\cdot x^3 - (2n+1)\cdot x^2 + (n+2)x - 1$$

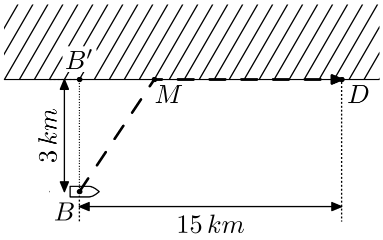
   b. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (d_n), on considère la soustraction suivante :
$$f_n(x) - \big[-n\cdot x + (2\cdot n+1)\big] = \frac{2\cdot(x+n)}{1+x^2} + n\cdot x - (2\cdot n$$
$$= \frac{2\cdot x + 2\cdot n + n\cdot x\cdot(1+x^2) - (2\cdot n+1)(1+x^2)}{1+x^2}$$
$$= \frac{2\cdot x + 2\cdot n + n\cdot x + n\cdot x^3 - 2\cdot n - 2\cdot n\cdot x^2 - 1 - x^2}{1+x^2}$$
$$= \frac{n\cdot x^3 - (2\cdot n+1)\cdot x^2 + (n+2)\cdot x - 1}{1+x^2}$$
D'après la question précédente :
$$= \frac{(x-1)^2\cdot(n\cdot x-1)}{1+x^2}$$
On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{n}$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$n\cdot x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+x^2$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-\big[-n\cdot x+(2\cdot n+1)\big]$		$-$	0	$+$	0	$+$	

   c. On en déduit :
   - La courbe $\mathscr{C}_n$ se situe strictement au dessus de la droite (d_n) sur l'ensemble $\left]\dfrac{1}{n}\,;1\right[\cup\left]1\,;n\right[$
   - La courbe $\mathscr{C}_n$ se situe strictement en dessous de la droite (d_n) sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{n}\right[$
   - La courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite (d_n) s'interceptent aux points d'abscisses $\dfrac{1}{n}$ et 1.

Exercice 2*

Un bateau, représenté par le point B, se trouve à trois kilomètres du rivage ; le point B' représente le point du rivage le plus proche du bateau *(son projeté orthogonal)* ; le point D représente la destination à atteindre par le marin. Pour se faire, le marin décide d'atteindre un point M de la berge, puis de rejoindre le point D en voiture.



Le bateau navigue à une vitesse de $15\,{}^{km}\!/_h$ et la voiture se déplacer à unevitesse de $40\,{}^{km}\!/_h$.

On note x la distance $B'M$:

1. Exprimer la distance BM et MD en fonction de x.
2. On note $h(x)$ le temps de parcours effectué lorsque $B'M = x$.
   a. Justifier que : $h(x) = \dfrac{1}{120}\cdot\big(8\sqrt{x^2+9}+45-3x\big)$
   b. Déterminer l'expression de la fonction dérivée h'.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
3. En déduire la valeur de x pour laquelle le temps de trajet du marin est minimale.

Correction 2

1. Les distances ci-dessous, exprimées en fonction de x, sont mesurées en km :
   - Le triangle BMB' est rectangle en B'. D'après le théorème de Pythagore, on a :
     $BM^2 = BB'^2 + BM'^2$
     $BM^2 = 3^2 + x^2$
     $BM^2 = x^2 + 9$
     $BM = \sqrt{x^2+9}$
   - $MA = 15 - x$
2. a. La formule reliant la distance et la durée d'un parcours à sa vitesse moyenne donne la relation suivante :
   $v = \dfrac{d}{t} \implies t = \dfrac{d}{v}$
   - le bateau parcours une distance de $\sqrt{x^2+9}\,km$ à une vitesse de $15\,{}^{km}\!/_h$. La durée de son parcours est de :
     $t_1 = \dfrac{d}{v} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{15}$ heures.
   - la voiture effectue un parcours de $(15-x)\,km$ à une vitesse de $40\,{}^{km}\!/_h$. La durée du parcours en voiture est de :
     $t_2 = \dfrac{d}{v} = \dfrac{15-x}{40}$ heures.

   La durée totale pour aller du point B au point D est de :
   $$h(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+9}}{15} + \frac{15-x}{40}$$
   $$= \frac{8\sqrt{x^2+9}}{120} + \frac{3\cdot(15-x)}{120}$$
   $$= \frac{1}{120}\cdot\big[8\sqrt{x^2+9} + 3(15-x)\big]$$
   $$= \frac{1}{120}\cdot\big(8\sqrt{x^2+9} + 45 - 3x\big)$$

   b. Considérons la fonction u définie par la relation :
   $u(x) = x^2 + 9 \quad ; \quad u'(x) = 2x$
   L'expression de la fonction f peut donc s'écrire :
   $h(x) = \dfrac{1}{120}\cdot\big(8\cdot\sqrt{u(x)} + 45 - 3x\big)$
   La formule de dérivation de la racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :
   $$h'(x) = \frac{1}{120}\cdot\Big(8\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} + 0 - 3\Big)$$
   $$= \frac{1}{120}\cdot\Big(\frac{8x}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{3\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}\Big)$$
   $$= \frac{1}{120}\cdot\Big(\frac{8x - 3\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}\Big) = \frac{8x - 3\sqrt{x^2+9}}{120\cdot\sqrt{x^2+9}}$$
   $$= \frac{\big(8x - 3\sqrt{x^2+9}\big)\big(8x + 3\sqrt{x^2+9}\big)}{120\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\big(8x+3\sqrt{x^2+9}\big)}$$
   $$= \frac{(8x)^2 - \big(3\sqrt{x^2+9}\big)^2}{120\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\big(8x+3\sqrt{x^2+9}\big)}$$
   $$= \frac{64x^2 - 9(x^2+9)}{120\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\big(8x+3\sqrt{x^2+9}\big)}$$
   $$= \frac{64x^2 - 9x^2 - 81}{120\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\big(8x+3\sqrt{x^2+9}\big)}$$
   $$= \frac{55x^2 - 81}{120\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\big(8x+3\sqrt{x^2+9}\big)}$$

   c. Le dénominateur de l'expression de h' est positif. Le signe de h' ne dépend que de son numérateur.
   Le polynôme $55x^2-81$ admet les deux racines suivantes :
   $x_1 = \sqrt{\dfrac{81}{55}} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{\dfrac{81}{55}}$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{81}{55}}$		0		$\sqrt{\frac{81}{55}}$		$+\infty$
$55x^2-81$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$						$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction h admet le tableau de variations ci-dessous :

x	0		$\sqrt{\frac{81}{55}}$		$+\infty$
Variation de h		$\searrow$		$\nearrow$	

3. Le tableau de variations indique que la durée du trajet sera minimal lorsque la distance BM aura pour mesure :

$$BM = \sqrt{\frac{81}{55}} \approx 1{,}21\,km$$

Exercice 3*

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

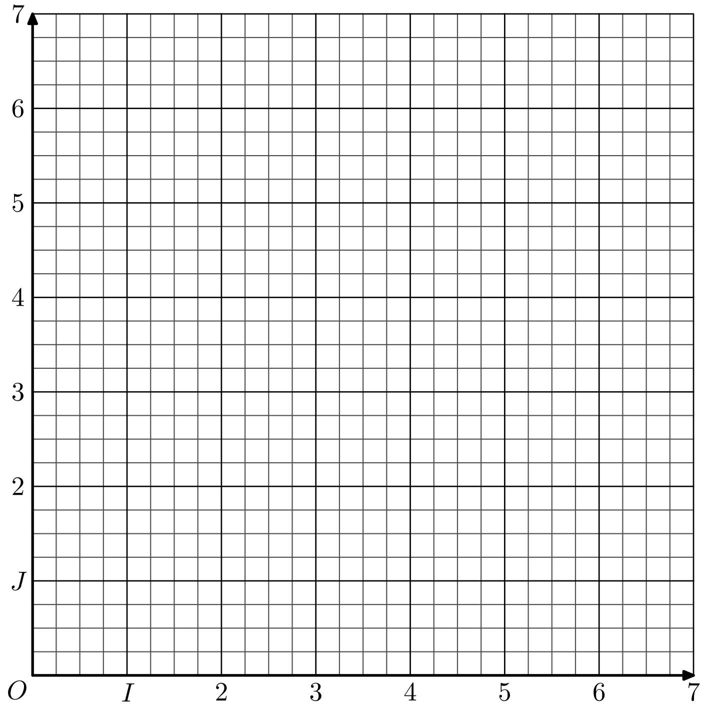
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\big(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\big)$. L'unité graphique est $1\,cm$.

1. Etude des limites
   a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
   c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Etude des variations de la fonction f.
   a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot(2x+1)$$
   b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormé $\big(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\big)$.



Correction 3

1. a. Travaillant sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, lorsque x tend vers 0 alors $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Ainsi :
   $$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \text{ s'identifie à } \lim_{x\mapsto+\infty} X^2\cdot\mathrm{e}^X$$
   qui a pour valeur : $\lim_{X\mapsto+\infty} X^2\cdot\mathrm{e}^X = +\infty$
   On en déduit la limite : $\lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = +\infty$

   b. On a les deux limites suivantes :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$$
   Par le produit des limites, on obtient :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$$

   c. La courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes :
   - La droite horizontale d'équation $y=0$ en $+\infty$;
   - la droite verticale d'équation $x=0$.

2. a. La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :
   $$u(x) = \frac{1}{x^2} \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Déterminons les dérivées de ces deux fonctions :

- La fonction u est définie par le quotient de 1 par la fonction w où :
  $w(x) = x^2 \quad ; \quad w'(x) = 2x$
  La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction donne l'expression de la fonction u' :
  $u'(x) = -\dfrac{w'(x)}{\big[w(x)\big]^2} = -\dfrac{2x}{\big(x^2\big)^2} = -\dfrac{2x}{x^4} = -\dfrac{2}{x^3}$
- La fonction v est la composée de la fonction r avec la fonction exponentielle où :
  $r(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad r'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
  La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction v' :
  $v'(x) = r'(x) \cdot \mathrm{e}^{r(x)} = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \Big(-\frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big)$$

$$= -\frac{2}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4} \cdot (2x+1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

b. Sur $\big]0\,;+\infty\big[$, les facteurs x^3, $(2x+1)$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sont positif ; on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\big]0\,;+\infty\big[$.

On a le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	0

c. On a les limites aux bornes de $\big[0\,;+\infty\big[$:
$\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$

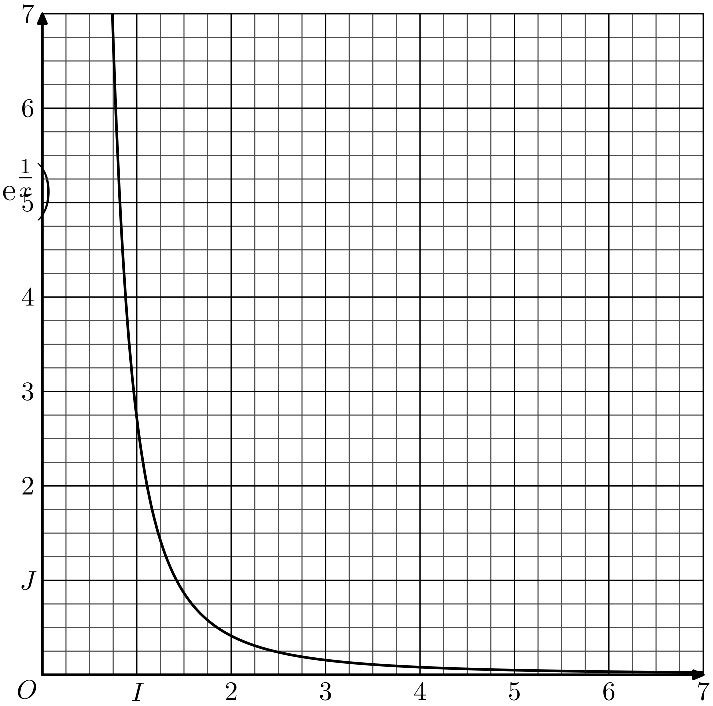
De plus :

- La fonction f est continue sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- La fonction f est strictement décroissante sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- le nombre 2 est compris entre les limites aux bornes de son ensemble de définition.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédaires, il existe une unique valeur α vérifiant :
$f(\alpha) = 2$

L'étude de la courbe à la calculatrice permet d'affirmer :
$\alpha \approx 1{,}11$

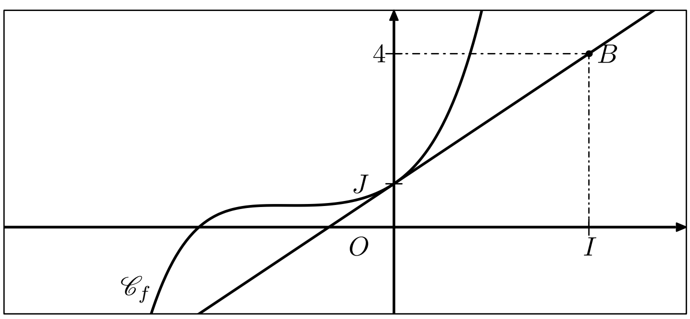
3. Voici le tracé de la courbe :



Exercice 4

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x) = (a \cdot x + 1) \cdot \big(2x^2 + x + 1\big)^2$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f :



La droite (d) passe par les points J et $B(1\,;4)$.

1. a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J.

   b. Déterminer le coefficient de la droite (JB).

   c. Démontrer que tout réel x, on a :
   $f'(x) = \big[10ax^2 + (3a+8) \cdot x + (a+2)\big] \cdot \big(2x^2 + x + 1\big)$

   d. On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point J. Déterminer la valeur de a. Justifier votre réponse.

2. On admet que f' a pour expression :
   $f'(x) = \big(10x^2 + 11x + 3\big)\big(2x^2 + x + 1\big)$

   Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Correction 4

1. a. On a l'image suivante par la fonction f :

$f(0)=\big(a\times 0+1\big)\big(2\times 0^2+0+1\big)^2=1\times 1^2=1$

Ainsi, le point de coordonnée $(0\,;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$: on a $\mathscr{C}_f$ qui passe par le point J.

b. Le coefficient de la droite (JB) a pour valeur :

$$\frac{y_B-y_J}{x_B-x_J}=\frac{4-1}{1-0}=\frac{3}{1}=3$$

c. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x)=a{\cdot}x+1 \quad ; \quad v(x)=\big(2x^2+x+1\big)^2$$

qui admetent pour dérivées :

$$u'(x)=a \quad ; \quad v'(x)=2\big(4x+1\big)\big(2x^2+x+1\big)$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)\\
&=a{\cdot}\big(2x^2+x+1\big)^2+\big(a{\cdot}x+1\big)\Big[2\big(4x+1\big)\big(2x^2+x+1\big)\Big]\\
&=\Big[a{\cdot}\big(2x^2+x+1\big)+\big(a{\cdot}x+1\big)\big(8x+2\big)\Big]{\cdot}\big(2x^2+x+1\big)\\
&=\big(2a{\cdot}x^2+a{\cdot}x+a+8a{\cdot}x^2+2a{\cdot}x+8x+2\big){\cdot}\big(2x^2+x+1\big)\\
&=\big[10a{\cdot}x^2+(3a{+}8){\cdot}x+(a{+}2)\big]{\cdot}\big(2x^2+x+1\big)
\end{aligned}$$

d. Si la droite (JB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 alors le nombre dérivé de la fonction f en 0 a pour valeur le coefficient directeur de la droite (JB) :

$$\begin{aligned}
f'(0)&=3\\
\big[10a\times 0^2+(3a{+}8){\cdot}0+(a{+}2)\big]{\cdot}\big(2\times 0^2+0+1\big)&=3\\
(a+2)\times 1&=3\\
a&=3-2\\
a&=1
\end{aligned}$$

2. Etudions le signe des deux facteurs du produit définissant la fonction f' :

- Pour le polynôme $10x^2{+}11x{+}3$, on a le discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=11^2-4\times 10\times 3=121-120=1$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-11-1}{2\times 10}=\frac{-12}{20}=-\frac{3}{5}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-11+1}{2\times 10}=\frac{-10}{20}=-\frac{1}{2}$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, on en déduit que ce polynôme est négatif sur l'intervalle $\Big[-\frac{3}{5}\,;-\frac{1}{2}\Big]$.

- Pour le polynôme $2x^2{+}x{+}1$, on a le discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=1^2-4\times 2\times 1=1-8=-7$

Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que ce polynôme a pour signe sur $\mathbb{R}$ le signe de son coefficient du second degré.

On obtient le tableau de signes :

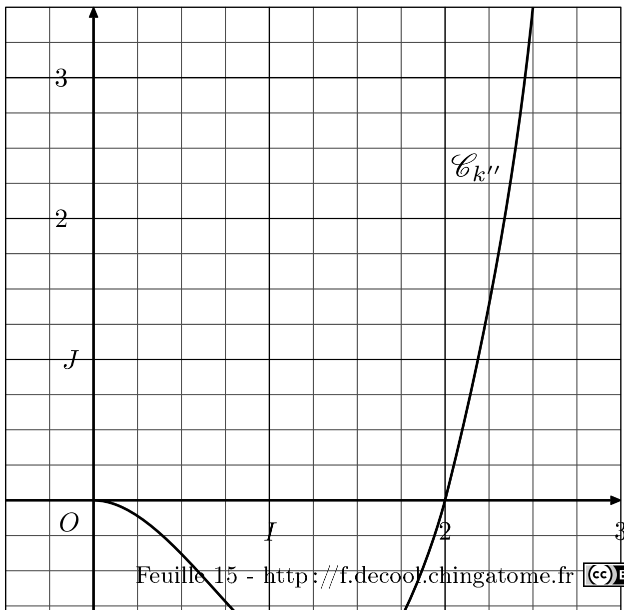
x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$10x^2{+}11x{+}3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x^2{+}x{+}1$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit les sens de variations de la fonction f :

- La fonction f est croissante sur l'intervalle $\Big]-\infty\,;-\frac{3}{5}\Big]$ et sur l'intervalle $\Big[-\frac{1}{2}\,;+\infty\Big[$.
- La fonction f est décroissante sur $\Big[-\frac{3}{5}\,;-\frac{1}{2}\Big]$

Exercice 5

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$.



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

1. k est concave sur l'intervalle $\big[1\,;2\big]$.
2. k est convexe sur l'intervalle $\big[0\,,2\big]$.
3. k est convexe sur $\big[0\,;+\infty\big[$.
4. k est concave sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Correction 5

1. **Vrai :**
La fonction k'' est négative sur l'intervalle $\big[1\,;2\big]$: on en déduit que la fonction k est concave sur l'intervalle $\big[1\,;2\big]$.
2. **Faux :**
La fonction k'' est négative sur l'intervalle : la fonction k est concave sur cet intervalle. Elle n'est donc pas convexe.
3. **Faux :**
On a vu que la fonction k est concave sur $\big[0\,;2\big]$, elle n'est pas convexe sur $\big[0\,;+\infty\big[$.
4. **Faux :**
La fonction k'' est positive sur $\big[2\,;2{,}5\big]$: la fonction k est convexe sur cet intervalle.
La fonction k ne peut pas être concave sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Exercice 6*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1. a. Montrer que pour tout réel x :
$f'(x) = \big(2{\cdot}x^2+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$
b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que pour tout réel x :
$f''(x) = 2x{\cdot}\big(2{\cdot}x^2+3\big){\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Correction 6

1. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme des produits u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f dérivée de la fonction f :
$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1} + x{\cdot}\big(2{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-}$
$= \mathrm{e}^{x^2-1} + 2{\cdot}x^2{\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1} = \big(1+2{\cdot}x^2\big){\cdot}\mathrm{e}^{x^2-1}$
b. Les facteurs $1{+}2{\cdot}x^2$ et e^{x^2-1} étant strictement positifs sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le signe de la fonction f' :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	

Ainsi, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Les facteurs $2{\cdot}x^2{+}3$ et e^{x^2-1} étant strictements positifs sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de signes de la fonction f'' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est dérivable deux fois et sa dérivée seconde est positive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$: la fonction f est convexe sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\big]0\,;10\big]$ par :
$f(x) = -x{\cdot}\ln\big(x\big) + 2{\cdot}x + 1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $\big]0\,;\,10\big]$.

Correction 7

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = u(x){\cdot}v(x) + 2{\cdot}x + 1$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x) = -x \quad ; \quad v(x) = \ln\big(x\big)$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) + 2 + 0$
$= -1{\cdot}\ln\big(x\big) + \big(-x\big){\cdot}\dfrac{1}{x} + 2 = -\ln\big(x\big) - 1 + 2$
$= -\ln\big(x\big) + 1$
- La fonction f'' dérivée seconde de la fonction f admet pour expression :

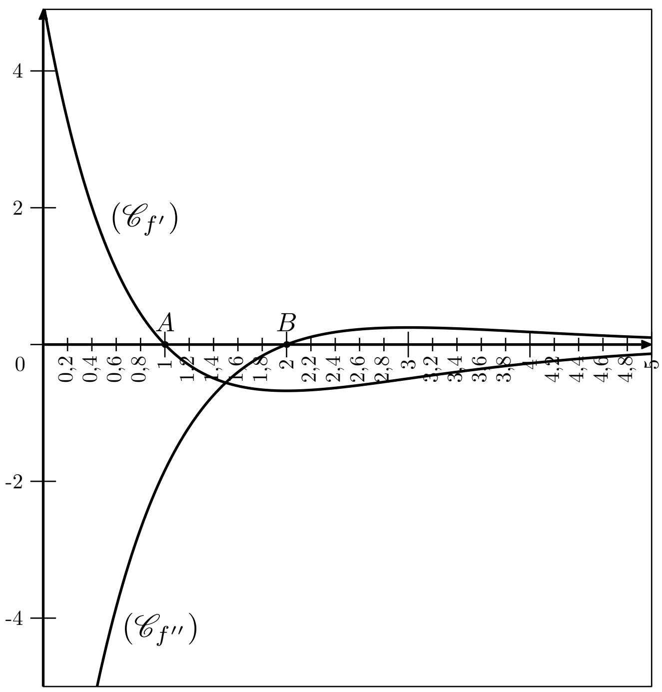
$$f''(x) = -\frac{1}{x} + 0 = -\frac{1}{x}$$

On en déduit que la fonction f est concave sur l'intervalle $]0\,;10]$: toutes ses tangentes se situent au dessus de la courbe représentive de la fonction f.

Exercice 8*

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathscr{C}_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(\mathscr{C}_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;5]$.



Le point A de coordonnées $(1\,;0)$ appartient à $(\mathscr{C}_{f'})$ et le point B de coordonnées $(2\,;0)$ appartient à la courbe $(\mathscr{C}_{f''})$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.
2. Déterminer sur quel*(s)* intervalle*(s)*, la fonction f est convexe. Justifier.
3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion? Justifier. Si oui, préciser leur*(s)* abscisse*(s)*.

Correction 8

1. D'après les données de l'énoncé, on a : $f'(1)=0$
De plus graphiquement, on a le tableau de signes :

x	0		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit :
- la fonction f est croissante sur $[0\,;1]$.
- la fonction f est décroissante sur $[1\,;\,5]$.

2. D'après les données de l'énoncé, on a : $f''(2)=0$

Graphiquement, on en déduit le tableau de signes de la fonction f'' :

x	0		2		5
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit que la fonction f'' est positive sur l'intervalle $[2\,;5]$: la fonction f est convexe sur l'intervalle $[2\,;5]$.

3. D'après le tableau de signes obtenu à la question précédente, la fonction f'' s'annule et change de signe une seule fois pour $x=2$.
Ainsi, la courbe de la fonction f admet un unique point d'inflexion dans l'abscisse a pour valeur 2.

Exercice 9*

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}\cdot x^4 + \frac{5}{16}\cdot x^3 + 5\cdot x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de papiers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.
2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a :
$$C''(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{15}{8}\cdot x$$
   a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\,;a]$ inclus dans $[0\,;10]$ sur lequel la fonction C est convexe.
   b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C?
Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Correction 9

1. La fonction C_m dérivée de la fonction C a pour expression :

$$C_m(x) = -\frac{1}{48}\cdot\left(4\cdot x^3\right) + \frac{5}{16}\cdot\left(3\cdot x^2\right) + 5 = -\frac{1}{12}\cdot x^3 + \frac{15}{16}\cdot x^2 + 5$$

Ainsi, le coût marginal pour six cents paniers vendus a pour valeur :

$$C_m(6) = -\frac{1}{12}\times 6^3 + \frac{15}{16}\times 6^2 + 5 = -\frac{1}{12}\times 216 + \frac{15}{16}\times 36 + 5$$
$$= -18 + \frac{135}{4} + 5 = \frac{-90+135+20}{4} = \frac{65}{4} = 16{,}25$$

2. a. L'expression de la fonction C'' est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = \left(\frac{15}{8}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 0 = \frac{225}{64}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{15}{8}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{15}{8}-\frac{15}{8}}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-2\times\frac{15}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\times\frac{2}{1} = \frac{15}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\frac{15}{8}+\frac{15}{8}}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{0}{-\frac{1}{2}} = 0$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, la fonction C'' admet le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{15}{2}$		$+\infty$
$-\frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{15}{8}\cdot x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de signes de la fonction C'' :

x	0		$\frac{15}{2}$		10
$C''(x)$	0	$+$	0	$-$	

Une fonction dérivable deux fois est convexe lorsque sa dérivée seconde est strictement positive. On en déduit que la fonction C est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{15}{2}\right]$.

Ainsi, a a pour valeur : $a=\frac{15}{2}$

b. La dérivée seconde de la fonction C changeant de signe en a, on en déduit que la courbe représentative de la fonction C admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

D'après le tableau de signes de la fonction C'', on en déduit que :

- la fonction C_m est croissante sur $\left[0\,;\frac{15}{2}\right]$;
- la fonction C_m est décroissante sur $\left[\frac{15}{2}\,;10\right]$

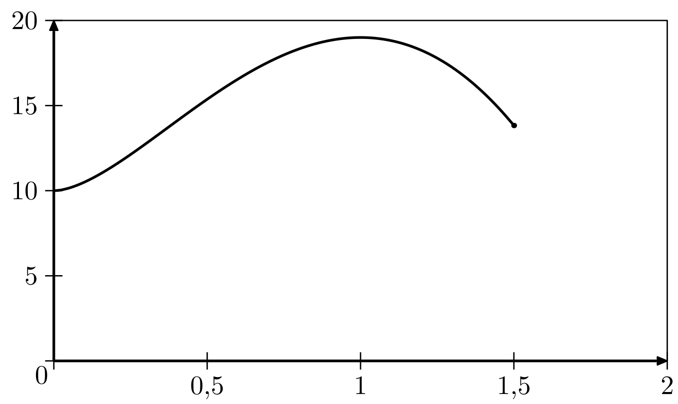
On en déduit que la fonction C_m admet un maximum en a. Le coût marginal sera maximal pour $a=\frac{15}{2}$

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]0\,;15\right]$ par :

$f(x)=9\cdot x^2\cdot\left(1-2\cdot\ln x\right)+10.$

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x)=-36{\cdot}\ln x-36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1}.

Correction 10

Etudions le signe de la dérivée seconde de la fonction f:

$$\begin{aligned} f''(x) &\geqslant 0 \\ -36{\cdot}\ln x - 36 &\geqslant 0 \\ -36{\cdot}\ln x &\geqslant 36 \\ \ln x &\leqslant \frac{36}{-36} \\ \ln x &\leqslant -1 \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\ln x} &\leqslant \mathrm{e}^{-1} \\ x &\leqslant \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f'' dérivée seconde de la fonction f admet le tableau de signes:

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est dérivable deux fois et sa dérivée seconde change de signe en e^{-1}: la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse e^{-1}.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par:

$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0\,;10]$, on a:
$$f'(x)=\frac{100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{\left(0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}{\cdot}\left(100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\right)}{\left(0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\right)^3}$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $[0\,;10]$, l'inéquation $100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation:
$x\leqslant -\ln(0{,}005)$.

   b. En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0\,;10]$.

3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question 2., que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Correction 11

1. La fonction f est l'inverse de la fonction u définie par:
$u(x)=0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$; $u'(x)=-100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$
La formule de dérivation de la fonction inverse permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f:
$$f'(x)=-\frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}=-\frac{-100{\cdot}\mathrm{e}^{-1}}{\left(0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

2. a. On a les transformations algébriques suivantes:
$$\begin{aligned} 100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}-0{,}5 &\geqslant 0 \\ 100{\cdot}\mathrm{e}^{-x} &\geqslant 0{,}5 \\ \mathrm{e}^{-x} &\geqslant \frac{0{,}5}{100} \end{aligned}$$
La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\begin{aligned} \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) &\geqslant \ln\left(0{,}005\right) \\ -x &\geqslant \ln\left(0{,}005\right) \\ x &\leqslant -\ln\left(0{,}005\right) \end{aligned}$$

   b. Les expressions $100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$ et $0{,}5+100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$ sont strictement positives sur $[0\,;10]$, ainsi le signe de f'' ne dépend que du facteur $100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}-0{,}5$.
On en déduit le tableau de signes:

x	0		$-\ln(0{,}005)$		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

3. La fonction f est deux fois dérivable et change de signes une seule fois sur l'intervalle $[0\,;10]$.
On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion sur l'intervalle $[0\,;10]$ dont la

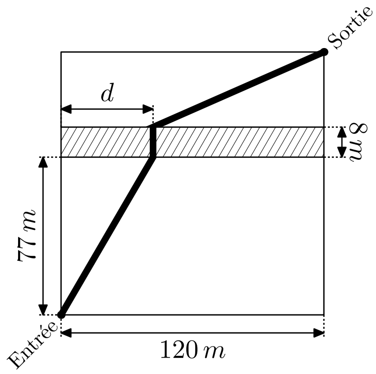
valeur exacte:
$x = -\ln(0{,}005)$.

4. La fonction f est dérivalle deux fois et sa dérivée seconde est négative sur l'intervalle $\big[0\,;-\ln(0{,}005)\big]$: la fonction f est concave sur cet intervalle.

Exercice 12

La ville "*Promenade*" souhaite emmenager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.

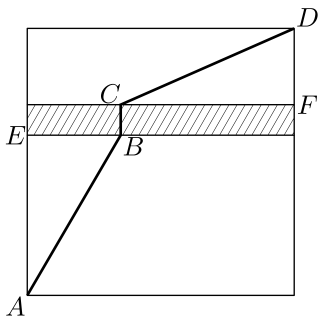
La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée:



A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale?

Correction 12

Considérons les points placés ci-dessous sur la figure:



Notons x la distance EB et déterminons la distance de la ligne brisée $ABCD$:

- Dans le triangle ABE rectangle en E, le théorème de Pythagore permet d'obtenir l'égalité:

$$AB^2 = AE^2 + EB^2$$
$$AB^2 = 77^2 + x^2$$
$$AB = \sqrt{x^2 + 5929}$$

- $BC = 8$
- Dans le triangle ABE rectangle en E, le théorème de Pythagore permet d'obtenir l'égalité:

$$CD^2 = CF^2 + FD^2$$
$$CD^2 = (120 - x)^2 + (120 - 77 - 8)^2$$
$$CD = \sqrt{(120 - x)^2 + 35^2}$$
$$CD = \sqrt{(120 - x)^2 + 1225}$$

On remarque que, chacune des expressions définissant AB et CD, sont définies et strictement positives pour tout nombre réel x: l'expression sous leur radical est obtenu par la somme de deux carrés dont l'un, au moins, est non-nul.

Notons f la fonction qui associe à la valeur de x, l'expression de la longueur de la ligne brisée $ABCD$. Cette fonction admet pour expression:

$$f(x) = AB + BC + CD$$
$$= \sqrt{x^2 + 5929} + 8 + \sqrt{(120 - x)^2 + 1225}$$

En utilisant l'expression de la dérivée de la racine carrée, on a:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2 + 5929}} + 0 + \frac{2x - 240}{2\cdot\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}}$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5929}} + \frac{x - 120}{\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}}$$
$$= \frac{x\sqrt{(120 - x)^2 + 1225} + (x - 120)\sqrt{x^2 + 5929}}{\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}\times\sqrt{x^2 + 5929}}$$

Le dénominateur de l'expression de la fonction f' étant strictement positif, le signe de la fonction f' ne dépend que de son numérateur. Ainsi, l'étude du signe de la fonction f' se traduit par:

$$f'(x) \geqslant 0$$
$$\frac{x\sqrt{(120 - x)^2 + 1225} + (x - 120)\sqrt{x^2 + 5929}}{\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}\times\sqrt{x^2 + 5929}} \geqslant 0$$
$$x\sqrt{(120 - x)^2 + 1225} + (x - 120)\sqrt{x^2 + 5929} \geqslant 0$$
$$x\sqrt{(120 - x)^2 + 1225} \geqslant -(x - 120)\sqrt{x^2 + 5929}$$
$$x\sqrt{(120 - x)^2 + 1225} \geqslant (120 - x)\sqrt{x^2 + 5929}$$

Le nombre x étant une longueur, il est strictement posi

$$\frac{\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}}{\sqrt{x^2 + 5929}} \geqslant \frac{120 - x}{x}$$

Le nombre x représente une longueur inférieure à 120:

$$\frac{\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}}{\sqrt{x^2 + 5929}} \geqslant \frac{120 - x}{x} \geqslant 0$$

La fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(\frac{\sqrt{(120 - x)^2 + 1225}}{\sqrt{x^2 + 5929}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{120 - x}{x}\right)^2$$
$$\frac{(120 - x)^2 + 1225}{x^2 + 5929} \geqslant \frac{(120 - x)^2}{x^2}$$

$$\frac{(120-x)^2+1225}{x^2+5929}-\frac{(120-x)^2}{x^2}\geqslant 0$$

$$\frac{\big[(120-x)^2+1225\big]\cdot x^2-(120-x)^2(x^2+5929)}{x^2(x^2+5929)}\geqslant 0$$

Le dénominateur de cette expression étant strictement positive, son signe ne dépend que de son numérateur :

$$\begin{aligned}
\big[(120-x)^2+1225\big]\cdot x^2-(120-x)^2(x^2+5929) &\geqslant 0\\
(120-x)^2\cdot x^2+1225\cdot x^2-(120-x)^2\cdot x^2-5929(120-x)^2 &\geqslant 0\\
1225\cdot x^2-5929(120-x)^2 &\geqslant 0\\
1225\cdot x^2-5929(120^2-2\times120\times x+x^2) &\geqslant 0\\
-4704\cdot x^2+1\,422\,960\cdot x-85\,377\,600 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c &= (1\,422\,960)^2-4\times(-4704)\times(-85\,377\,600)\\
&= 418\,350\,240\,000
\end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{418\,350\,240\,000}=646800$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\\
&= \frac{-1\,422\,960-646\,800}{2\times(-4704)}\\
&= \frac{-2\,069\,760}{-9408}\\
&= 220
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\\
&= \frac{-1\,422\,960+646}{2\times(-4704)}\\
&= \frac{-776\,160}{-9408}\\
&= \frac{165}{2}
\end{aligned}$$

Ce polynôme du second degré, admettant un coefficient du terme du second degré strictement négatif, on en déduit le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		$\frac{165}{2}$		220		$+\infty$
$-4704\cdot x^2+1\,422\,960\cdot x-85\,377\,600$			0	$+$	0	$-$	

Ainsi, la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;120]$ admet le tableau de variations ci-dessous :

x	0		$\frac{165}{2}$		120
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f admettant un minimum pour $x=\dfrac{165}{2}$, on en déduit que la longueur minimale de la ligne brisée $ABCD$ sera atteinte lorsque le point B sera placé à $82{,}5\,m$ du bord.

