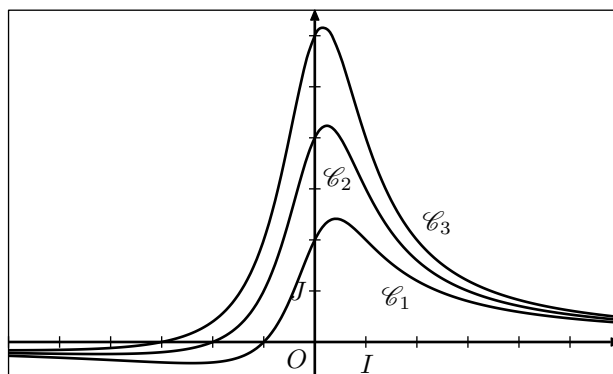




Exercices supplémentaires - Convexité

Exercice 1.

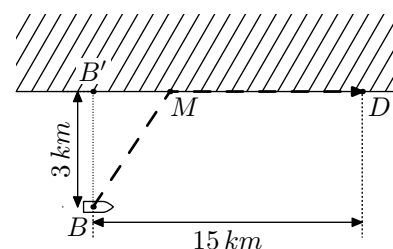
On considère pour tout entier naturel n non-nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f_n(x) = \frac{2(x+n)}{1+x^2}$. Dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n .



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'_n .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse 1.
3. (a) Etablir l'égalité suivante : $nx^3 - (2n+1)x^2 + (n+2)x - 1 = (x-1)^2(nx-1)$
 (b) Etudier la position relative de la droite (d_n) et de la courbe $\mathcal{C}_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Exercice 2.

Un bateau, représenté par le point B, se trouve à trois kilomètres du rivage ; le point B' représente le point du rivage le plus proche du bateau (*son projeté orthogonal*) ; le point D représente la destination à atteindre par le marin. Pour se faire, le marin décide d'atteindre un point M de la berge, puis de rejoindre le point D en voiture.



Le bateau navigue à une vitesse de 15 kmh^{-1} et la voiture se déplacer à une vitesse de 40 kmh^{-1} .

On note x la distance $B'M$:

1. Exprimer la distance BM et MD en fonction de x .
2. On note $h(x)$ le temps de parcours effectué lorsque $B'M = x$.
 (a) Justifier que : $h(x) = \frac{1}{120} (8\sqrt{x^2+9} + 45 - 3x)$
 (b) Déterminer l'expression de la fonction dérivée h' .
 (c) Dresser le tableau de variations de la fonction h .
3. En déduire la valeur de x pour laquelle le temps de trajet du marin est minimale.

**Exercice 3.**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

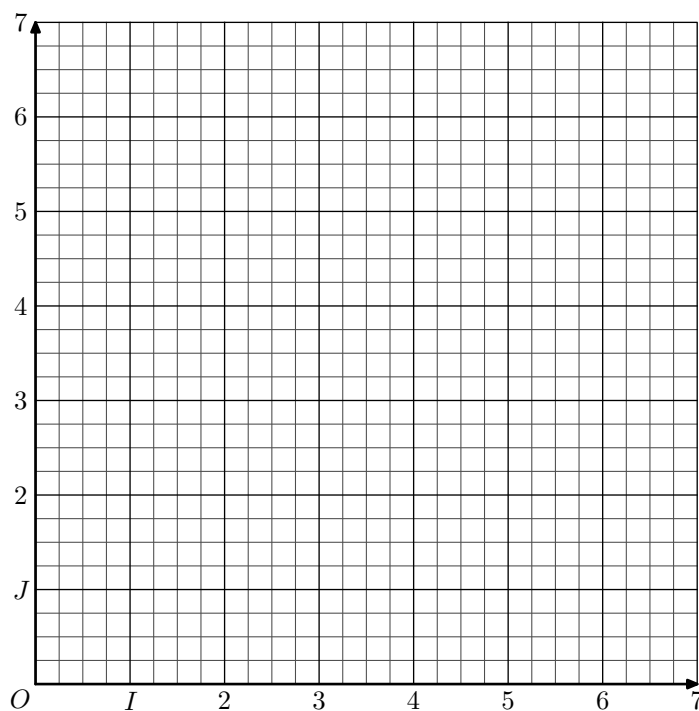
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm .

1. Etude des limites

- (a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
- (b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- (c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. Etude des variations de la fonction f .

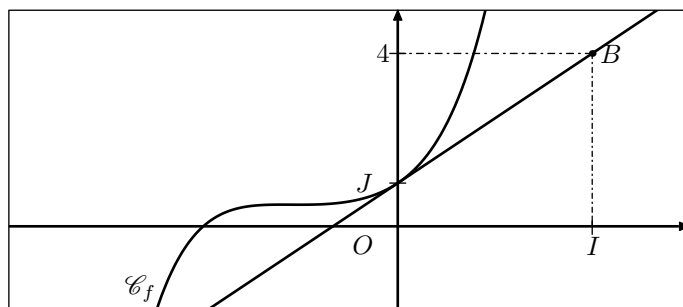
- (a) Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par : $f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$
- (b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- (c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

**Exercice 4.**

On considère la fonction f définie par la relation : $f(x) = (ax + 1)(2x^2 + x + 1)^2$

Dans un repère (O, I, J) orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f .

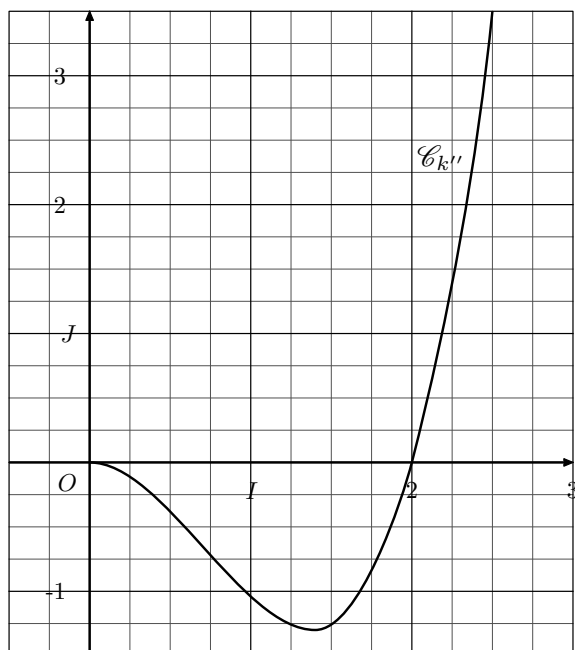


La droite (d) passe par les points J et $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

1. (a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point J .
 (b) Déterminer le coefficient de la droite (JB) .
 (c) Démontrer que tout réel x , on a : $f'(x) = [10ax^2 + (3a+8)x + (a+2)](2x^2 + x + 1)$
 (d) On suppose que la droite (JB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point J . Déterminer la valeur de a .
 Justifier votre réponse.
2. On admet que f' a pour expression : $f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1)$
 Déterminer les sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0; +\infty[$.



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte ?

1. k est concave sur l'intervalle $[1; 2]$.
2. k est convexe sur l'intervalle $[0; 2]$.
3. k est convexe sur $[0; +\infty[$.
4. k est concave sur $[0; +\infty[$.

**Exercice 6.**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2-1}$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

- (a) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$
 (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- On admet que pour tout réel x : $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$
 Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 7.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par : $f(x) = -x \ln(x) + 2x + 1$

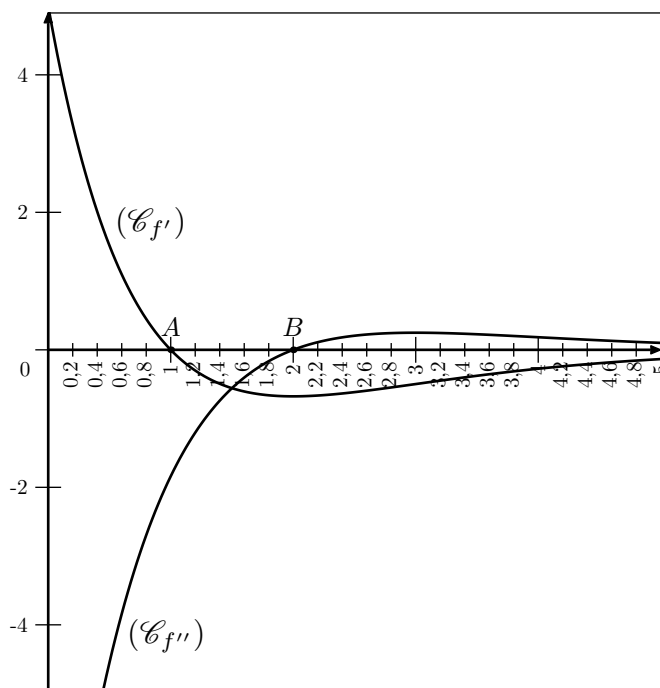
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0; 10]$.

Exercice 8.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$.

On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathcal{C}_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(\mathcal{C}_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0; 5]$.



Le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $(\mathcal{C}_{f'})$ et le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à la courbe $(\mathcal{C}_{f''})$.

- Déterminer le sens de variation de la fonction f . Justifier.
- Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.
- La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

**Exercice 9.**

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de papiers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0; 10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C .

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a : $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$

(a) Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0; a]$ inclus dans $[0; 10]$ sur lequel la fonction C est convexe.

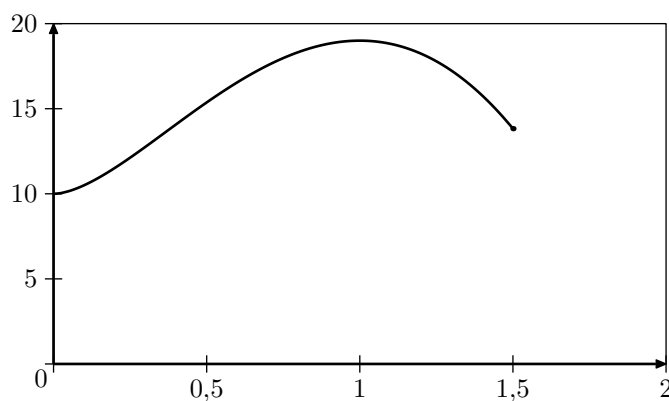
(b) Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ?

Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Exercice 10.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 15]$ par : $f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10$.

La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



On admet que $f''(x) = -36\ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1,5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} .

**Exercice 11.**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $f(x) = \frac{1}{0,5 + 100e^{-x}}$

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

1. Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle $[0; 10]$, on a : $f'(x) = \frac{100e^{-x}}{(0,5 + 100e^{-x})^2}$

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle $[0; 10]$.

Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$: $f''(x) = \frac{100e^{-x}(100e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100e^{-x})^3}$

2. (a) Montrer que, dans l'intervalle $[0; 10]$, l'inéquation $100e^{-x} - 0,5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation : $x \leq -\ln(0,005)$.

(b) En déduire le tableau de signes de la fonction f'' sur l'intervalle $[0; 10]$.

3. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f tracée dans un repère.

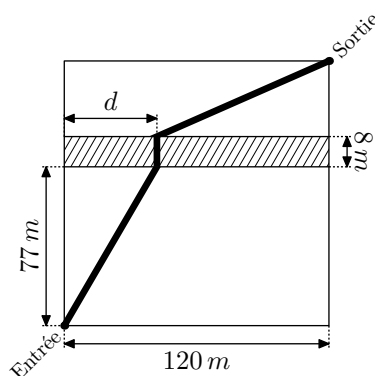
Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4. En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Exercice 12.

Une ville souhaite emménager un terrain de forme carré traversé par une rivière traversant latéralement le terrain.

La figure ci-dessous représente le terrain et la rivière est la partie hachurée :



A quelle distance d doit-on placer le pont pour que la distance parcourue par un visiteur soit minimale ?