



Dérivation et convexité

I Compléments de dérivation

I.1 Fonctions composées

Définition 1 : Composée de deux fonctions

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I , on ait $u(x) \in J$.

La fonction composée de u suivie de v , notée $v \circ u$, est la fonction définie par : $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

$$x \mapsto u(x) \mapsto v(u(x))$$

$$x \mapsto v \circ u(x)$$

Exemples :

- On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f .

La fonction f est composée de u suivie de v avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \frac{1}{x}$

$$x \mapsto x^2 + 1 \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$$

- On considère les fonctions u et v définies par : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x} + 1$. Exprimer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ en fonction de x .

On a : $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x} + 1$

- $x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto \sqrt{\frac{1}{x}} + 1$ donc $v \circ u(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} + 1$
- $x \mapsto \sqrt{x} + 1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ donc $u \circ v(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

Remarque : en général $v \circ u \neq u \circ v$ aussi bien sur l'ensemble de définition que sur son expression.



I.2 Dérivée de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I tel que, pour tout x de I , $u(x) \in J$ et v une fonction définie et dérivable sur J .

Alors $f = v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$,

Autrement dit, $f' = u' \times (v' \circ u)$.

Exemples :

- Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 - 9}$.

La fonction f définie sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 - 9}$ est dérivable sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ comme composée de fonctions dérivable sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

On a $f(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = 4x^2 - 9$ et $v(x) = \sqrt{x}$ d'où $u'(x) = 8x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\text{Alors } f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 9}} \times 8x = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 9}}$$

- Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2+1}$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $g(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$ d'où $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

$$\text{Alors } g'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = 2xe^{x^2+1} \times 2x = 2xe^{x^2+1}$$

- Déterminer la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x^2 + 3x)^4$.

La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x^2 + 3x)^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $f(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x$ et $v(x) = x^4$ d'où $u'(x) = 4x + 3$ et $v'(x) = 4x^3$

$$\text{Alors } f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = 4(2x^2 + 3x)^3 \times 4x + 3 = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x)^3$$

Variations de fonctions composées

Propriété

- Si deux fonctions u et v sont de même monotonie (c'est à dire toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors la fonction $v \circ u$ est croissante.
- Si deux fonctions u et v sont de monotonie contraire (c'est à dire l'une croissante et l'autre décroissante), alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.



Rappel sur les fonctions $\sqrt{u}$, u^n et e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n désigne un entier relatif non nul.

Fonctions composées	Dérivées
u^2	$2u'u$
u^n avec $(n \in \mathbb{Z}^*)$ et $u \neq 0$ si $n < 0$	$nu^{n-1}u'$
$\sqrt{u}$ avec $u > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\frac{1}{u}$ avec $u \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{u^n}$ avec $u \neq 0$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$ avec $u > 0$	$\frac{u'}{u}$

I.3 Dérivée seconde

Définition 2 : Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.

La fonction f est deux fois dérivable sur I si f' est elle-même dérivable sur I .

On note f'' la dérivée de f' et elle est appelée dérivée seconde de f .

Exemples : Déterminer la dérivée seconde de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

- On a $f(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \ln(x)$ d'où $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\text{Alors } f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = \frac{1}{x^2 + 1} \times 2x = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- On a $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$\text{Alors par la dérivée d'un quotient } f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Donc } f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$



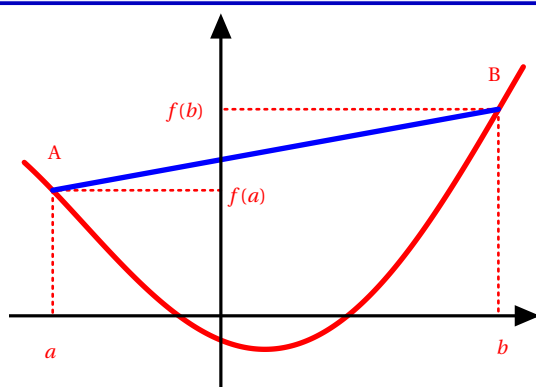
II Convexité d'une fonction

II.1 Approche graphique

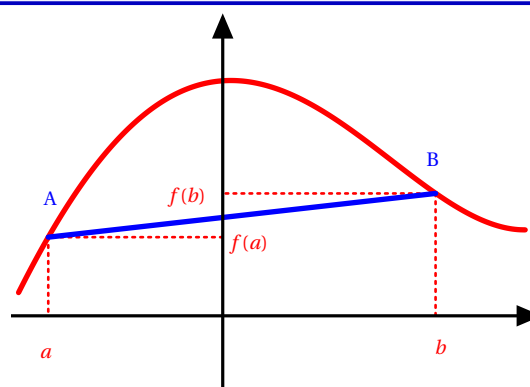
Définition 3 : Convexité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe.

- f est convexe sur I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe C_f située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est en-dessous de la sécante (AB) .
- f est concave sur I si, pour tous réels a et b de I , la portion de la courbe C_f située entre les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ est au-dessus de la sécante (AB) .



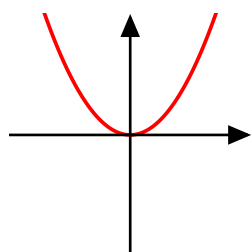
f est convexe



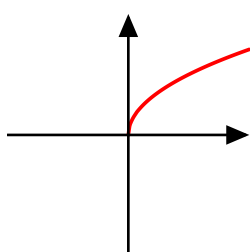
f est concave

Exemples :

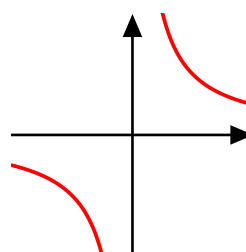
- La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0; +\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $] 0; +\infty[$.



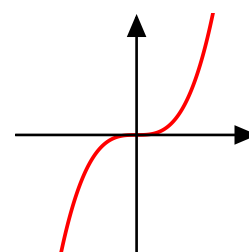
fonction carrée



fonction racine carrée



fonction inverse



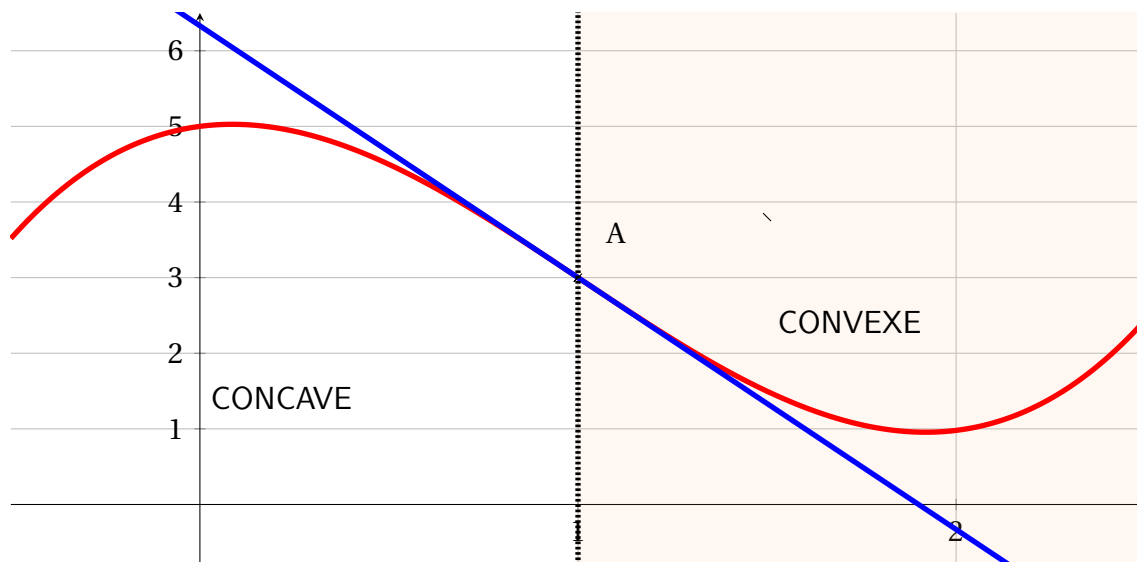
fonction cube

II.2 Point d'inflexion

Définition 4 : Point d'inflexion

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I et A un point de sa courbe C_f .

A est un point d'inflexion de C_f si C_f admet une tangente en A et si C_f traverse cette tangente en A .



II.3 Convexité et dérivées

Propriétés

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff f''$ est positive sur I
- f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur $I \iff f''$ est négative sur I

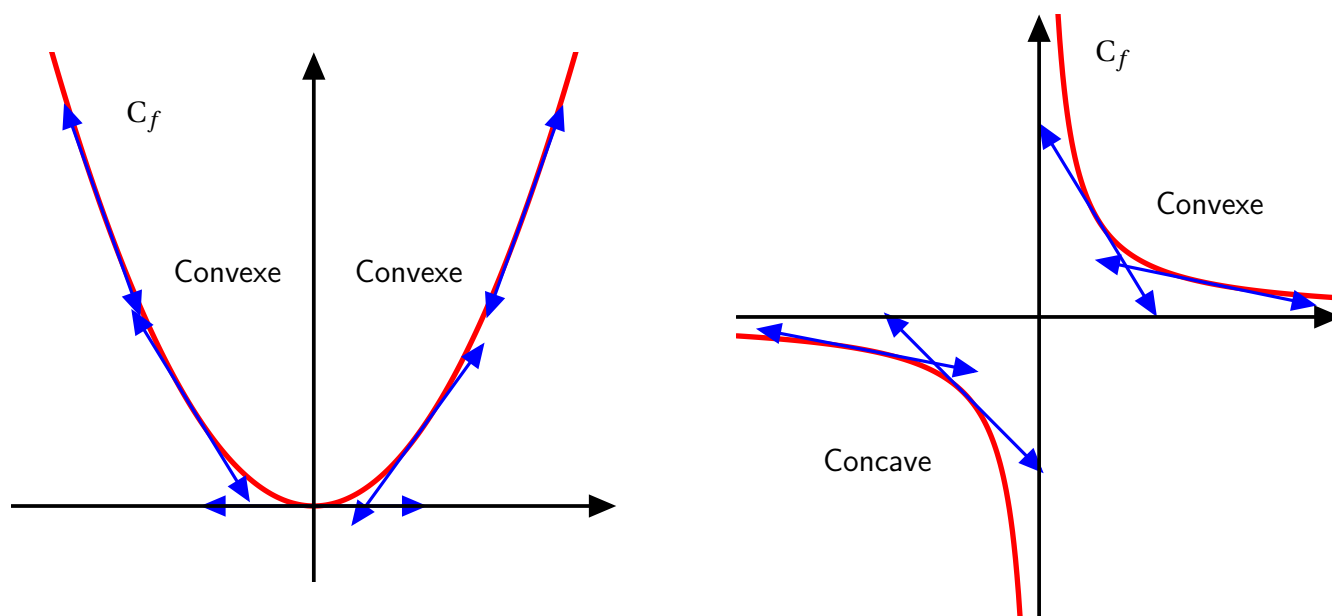


II.4 Convexité et tangentes

Propriétés

Soit I un intervalle sur lequel f est dérivable.

- f est convexe sur I si et seulement si C_f est au-dessus de toutes ses tangentes.
- f est concave sur I si et seulement si C_f est en-dessous de toutes ses tangentes.



Remarque : Une fonction croissante et convexe sur un intervalle I est une fonction qui croît "de plus en plus vite" sur I . Les pentes des tangentes à sa courbe augmentent quand les abscisses augmentent. Pour une fonction croissante et concave, c'est le contraire : elle croît "de moins en moins vite".



Démonstration : Si une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I alors toutes les tangentes à C_f sont en dessous de C_f

Soit $a \in I$, on note T_a la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a , ainsi : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

On pose $d(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$

La fonction d est définie, continue et dérivable sur I , car la fonction f est définie, continue et dérivable sur I

Soit $x \in I$, $d'(x) = f'(x) - f'(a)$

Comme la fonction f' est dérivable sur l'intervalle I , la fonction d' l'est aussi, ainsi $d''(x) = f''(x)$

La fonction f est convexe sur I , donc f'' est positive sur l'intervalle I

Comme $d''(x) = f''(x)$, on a que la fonction d'' est positive sur l'intervalle I , ainsi la fonction d' est croissante sur I

Or $d'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	a
Variation de d'	

On en déduit alors que :

- Si $x \geq a$, alors $d'(x) \geq 0$ et donc la fonction d est croissante sur $[a; +\infty[$
- Si $x \leq a$, alors $d'(x) \leq 0$ et donc la fonction d est décroissante sur $] -\infty; a]$

Or $d(a) = f(a) - (f'(a)(a - a) + f(a)) = 0$

Cela permet d'obtenir le tableau suivant :

x	a
$d'(x)$	- 0 +
Variation de d	

Donc $d(x) \geq 0$

D'où $f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) \geq 0$

C'est pourquoi $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$, ainsi la courbe C_f est au dessus de T_a

On vient de démontrer pour toutes les valeurs de $a \in I$, les tangentes T_a sont sous la courbe C_f

Donc la courbe C_f est au dessus de toutes ses tangentes sur l'intervalle I .



II.5 Point d'inflexion

Propriétés

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , C_f sa courbe et a un réel de I .

- Si f' change de sens de variation en a , alors C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .
- Si f'' s'annule et change de signe en a , alors C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 - x$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2e^{x-1} - 2x - 1$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 2e^{x-1} - 2$

2. Etudier la convexité de la fonction f

f est convexe si et seulement si : $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x-1} \geq 2$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \dots (\text{car la fonction exponentielle est strictement croissante})$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc f est convexe sur $[1; +\infty[$

Inversement, f est concave si et seulement si $x \leq 1$

3. Montrer que f admet un point d'inflexion A et préciser les coordonnées de A

Le point d'inflexion correspond au passage de convexe à concave (ou de concave à convexe).

D'après la question précédente, le point d'inflexion est le point de la courbe qui a pour abscisse 1.

L'ordonnée de ce point est $f(1) = 2e^0 - 1^2 - 1 = 0$

Le point d'inflexion est donc $A(1;0)$

4. Quelle est l'équation de la tangente à C_f au point A ?

L'équation de la tangente (T) à C_f au point $A(1;0)$ est donnée par la formule :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ avec } f'(1) = 2e^0 - 2 \times 1 - 1 = -1 \text{ et } f(1) = 0$$

ce qui donne : $y = -x + 1$

5. En déduire que pour tout $x \geq 1$: $e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

Pour $x \geq 1$ la fonction est convexe, donc la courbe est située au-dessus de la tangente (T).

Cela se traduit par : $f(x) \geq -x + 1$

$$\text{c'est à dire : } 2e^{x-1} - x^2 - x \geq -x + 1 \Leftrightarrow 2e^{x-1} \geq x^2 + x - x + 1 \Leftrightarrow 2e^{x-1} \geq x^2 + 1$$

$$\text{Donc } e^{x-1} \geq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$