

CHAPITRE 9 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Manuel p. 276-305

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Nous allons formaliser les notions élémentaires dans l'espace à partir des positions relatives entre droites et plans, puis nous formaliserons l'utilisation des vecteurs pour définir des notions importantes de combinaison linéaire ou de colinéarité.

Objectifs

- Représenter des combinaisons linéaires et caractériser des plans dans l'espace. Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Construire la section d'un solide par un plan dans l'espace.
- Exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs.
- Décomposer un vecteur dans une base par lecture graphique et déterminer une base ou un repère du plan ou de l'espace par le calcul.
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 277

1. Calculer des coordonnées de vecteurs

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $-2\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$

2. Construire des points et déterminer leurs coordonnées

a) Pour les coordonnées de F on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} x_F + 2 = -2 \times 1 + 3 \times 3 \\ y_F - 1 = -2 \times 1 + 3 \times (-3) \end{cases}$$

d'où $F(5; -10)$.

b) Pour les coordonnées de G on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} 0 - x_G = -2 - 2 \times (-3) \\ -3 - y_G = 4 - 2 \times 3 \end{cases}$$

d'où $G(-4; -1)$.

c) Pour les coordonnées de H on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} x_H - 1 = 5 \times (-1) + 2 \times (-3) \\ y_H + 2 = 5 \times (-1) + 2 \times 3 \end{cases}$$

d'où $H(-10; -1)$.

3. Déterminer si des vecteurs dans le plan sont colinéaires

1. $\vec{w} = -\vec{u}$ et $\vec{t} = 3\vec{u}$

2. $\vec{t} = -\vec{v}$

4. Résoudre des systèmes

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -21 \\ 43 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 43 \end{pmatrix}$

d) Pas de solution.

5. Utiliser la relation de Chasles

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3. Non car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

6. Déterminer l'équation d'une droite

a) $2x - y + 4 = 0$

b) $-2x + 5y - 4 = 0$

c) $-3x + y + 4 = 0$

d) $2x + y + 5 = 0$

Activités

p. 278

1 Découvrir les vecteurs dans l'espace

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Construire des vecteurs dans l'espace à l'aide de GeoGebra.

1. 2. 3. 4. Constructions et coordonnées dans la fenêtre d'algèbre.

$$5. \vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{BC}$$

$$6. \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{AG}$$

$$7. \vec{u} + \vec{v} = \vec{EG}$$

2 Utiliser des combinaisons linéaires de vecteurs

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir les combinaisons linéaires de vecteurs.

$$1. \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BG} - \frac{1}{4}\vec{BC}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AH} - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE}) - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$$

$$2. \vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN} = \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DC} + 2\vec{DH}$$

$$= \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB} + 2\vec{AE}$$

$$3. 4\vec{AM} - \vec{AN} = \frac{11}{3}\vec{AB}$$

4. C'est bien une combinaison linéaire et le point A appartient au plan (BMN).

3 Découvrir les plans de l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les plans de l'espace.

$$1. 2. \vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AE}$$

$$= \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BF}$$

$$3. \vec{BN} = \vec{BC} + \vec{CN} = \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CG}$$

$$= \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{BF}$$

$$4. 5. \vec{BM} + \vec{BN} = \vec{AM} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BF}$$

$$= \vec{BH}$$

6. La section est le parallélogramme BMHN.

4 Utiliser des coordonnées dans l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les coordonnées de points dans l'espace.

$$1. A(0; 0; 0) B(1; 0; 0) C(1; 1; 1) D(0; 1; 1) P(4; 0; 0) M(0; 3; 3) N(4; 3; 3)$$

$$2. \vec{AP} = 4\vec{i}, \vec{AM} = 3\vec{j} \text{ et } \vec{AN} = 4\vec{i} + 3\vec{j}.$$

$$3. a) \vec{AR} = \vec{AN} + \vec{NR} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$b) E(0; 0; 1) F(1; 1; 0) G(1; 1; 1) H(0; 1; 1)$$

$$Q(0; 3; 5) S(4; 0; 5) \text{ et } T(0; 0; 5).$$

5 Découvrir les représentations paramétriques de droites de l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les représentations paramétriques de droites dans l'espace.

$$A. 1. M_0(2; -1; 0), M_1(1; 2; 2)$$

$$2. M_2(0; 5; 4), M_{-3}(5; -10; -6)$$

$$3. \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$\vec{CD} = -5\vec{AB} \text{ et } \vec{AC} = 2\vec{AB}$$

donc les points sont alignés.

$$4. \text{Par exemple } M_{-1}(3; -4; -2) \text{ vérifie } \vec{AM}_{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{AB}$$

donc il est aussi aligné.

$$B. 1. \vec{AM}_t \begin{pmatrix} -t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t\vec{AB}$$

2. Les points sont sur la droite (AB).

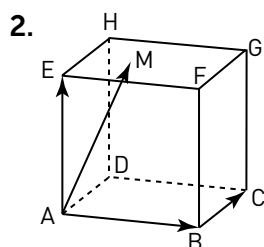
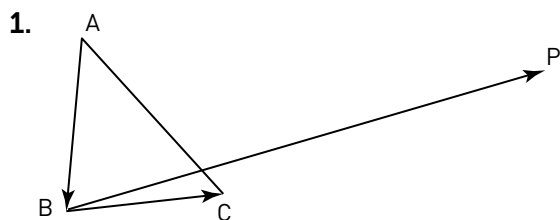
3. a) Le segment [AB].

b) La demi-droite [AB].

c) Le segment $[BB']$ où B' est le symétrique de B par rapport à A .

À vous de jouer

p. 281



3. 1. Le plan (SAC) est caractérisé par les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$.

2. $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC})$ donc O appartient au plan (SAC) par conséquent I aussi.

4. 1. $(B; \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG})$

2. $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

5. a) (AB) et (FH) sont non coplanaires.

b) (AF) et (CH) sont non coplanaires.

c) (CFH) et (AB) sont sécants.

6. a) (AB) et (CD) sont non coplanaires.

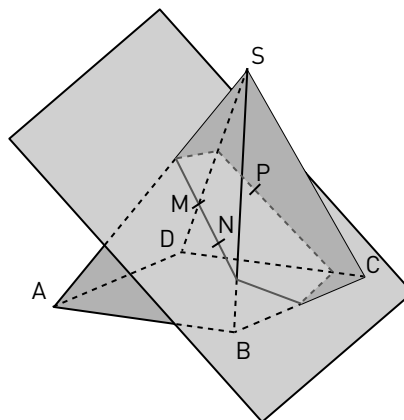
b) (AC) et (BCD) sont sécants.

c) (AC) et (BD) sont non coplanaires.

7. a) (SB) b) (SO) c) Vide

d) Une droite parallèle à (AB) passant par S .

8. 1. (MN) et la droite parallèle à (MN) passant par S .
2.



$$\begin{aligned} 9. \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA} = 6\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$12. \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$13. \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

14. $ABGH$ est un rectangle donc les points sont coplanaires mais le point E n'est pas dans le même plan donc le triplet est bien une base.

15. Non ce n'est pas une base car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

$$16. \text{ (DK) } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

$$17. \text{ (CG) } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 - 5t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

$$18. \text{ (NY) } \begin{cases} x = -2 + t \\ x = -2 + t \\ z = -4t \end{cases}$$

$$19. d \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 9 - 2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$20. 1. a) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (DBH) donc il lui est parallèle.

$$2. a) \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$$

c) (MN) parallèle à (BDH).

$$21. a) B(1; 0; 0), I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \text{ d'où :}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}.$$

$$b) \begin{cases} x = 1 - k \\ y = \frac{1}{2}k \\ z = \frac{1}{2}k \end{cases}$$

22.

$$1. a) \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$

b) (IJ) est parallèle à (ACE).

$$2. a) \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \text{ Donc } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$

$$23. 1. \text{ Leurs vecteurs directeurs sont : } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

$$2. \text{ On a : } \begin{cases} 1 - 2k = 2 - 4t \\ 2 + k = -2t \\ 3k = -1 + t \end{cases} \text{ avec les deux premières}$$

$$\text{équations on obtient } k = -\frac{5}{4} \text{ et } t = -\frac{3}{8} \text{ mais ces}$$

valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc les droites ne sont pas coplanaires.

$$24. 1. \text{ Leurs vecteurs directeurs sont : } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui sont colinéaires donc les droites sont parallèles ou confondues.

2. pour par exemple $k = 0$ on obtient le point $(4; -3; 0)$ de la première droite qui n'appartient pas à la deuxième droite donc elles sont strictement parallèles ;

$$25. 1. \text{ Leurs vecteurs directeurs sont : } \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

$$2. \text{ On a : } \begin{cases} -2 - 3k = 1 + 3t \\ k = -3 + t \\ -1 - 2k = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec les deux dernières}$$

équations on obtient $k = 4$ et $t = 1$ mais ces valeurs

ne vérifient pas la première équation donc les droites ne sont pas coplanaires.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 290

Pour s'entraîner

Le plan (ABC) peut être défini par le point A et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Si le point M appartient au plan (ABC) donc il a des coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ce qui donne : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

Réciproquement si $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ alors les points A, B, C et M sont coplanaires et donc M appartient au plan (ABC).

Exercices

calculs et automatismes

p. 291

26. Positions relatives de droites et de plans

1. c)
2. a)
3. a)
4. b)

27. Utiliser les bons symboles

1. Faux
2. Faux
3. Vrai
4. Faux
5. Vrai
6. Vrai

28. Lecture d'un schéma

1. b)
2. b)
3. a)

29. Représentations paramétriques de droites (1)

b) ou d)

30. Représentations paramétriques de droites (2)

1. Faux
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai

31. Colinéarité ou non ?

1. Non
2. Oui
3. Oui
4. Non

32. Propriété et réciproque

1. Faux
2. Vrai

33. Vecteur directeur d'une droite

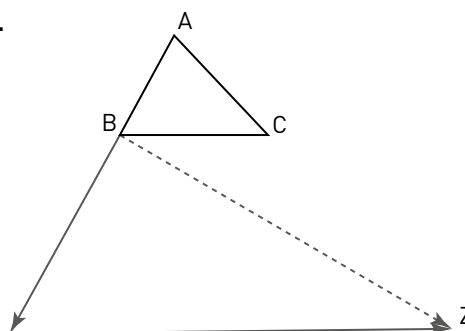
b) ou d)

Exercices d'application

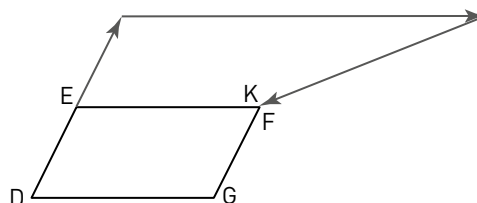
p. 292-294

Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs

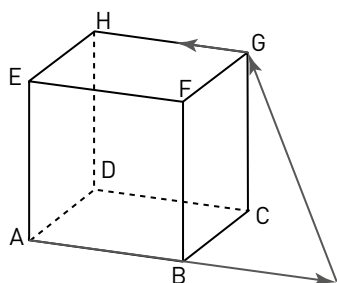
34.



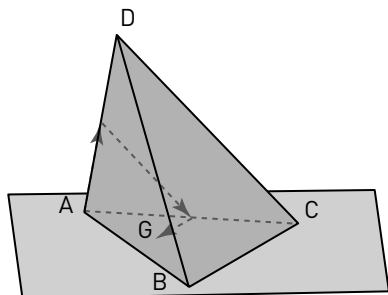
35.



36.



37.



Caractériser des plans dans l'espace

38. 1. Le plan (CMN) est défini par le point C et les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ donc le point A n'appartient pas au plan (CMN) .

39. 1. Le plan (CEM) est défini par le point M et les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{ME}$.

2. On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME}$ donc le point N appartient au plan (CEM) .

40. 1. Les points B, R et G définissent un plan car ils ne sont pas alignés.

2. Le plan (BRG) est défini par le point B et les vecteurs $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BG}$.

3. Soit I le milieu de $[AE]$, on a : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RI} = \overrightarrow{BR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ donc il appartient au plan (BRG) .

Décrire des positions relatives dans l'espace sans coordonnées

41. a) non coplanaires

b) non coplanaires

c) non coplanaires

d) non coplanaires

42. a) parallèles

b) sécants

c) sécants

d) parallèles

43. a) sécants

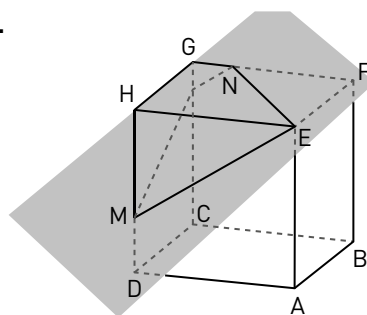
b) parallèles

c) sécants

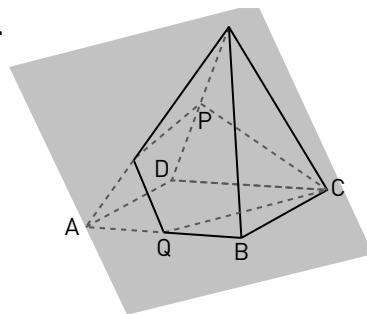
d) sécants

Construire des sections dans l'espace

44.



45.



Décomposer des vecteurs

46. 1. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

2. On en déduit que : $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$ donc que les points sont alignés.

47. 1. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ et

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$.

2. On en déduit que : $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{BI}$ donc que les droites sont parallèles.

48. Les points sont alignés si $\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ donc si $k = -\frac{3}{4}$.

49. a) $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

c) $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

e) $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

f) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

50. 1. MCEF et ADEN sont des parallélogrammes.

$$\begin{aligned} 2. \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} - 2 \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \end{aligned}$$

3. Les vecteurs sont donc combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.

51. 1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}.$$

2. Les sont donc combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.

52. 1. Les deux premières viennent d'une définition du milieu et la troisième du parallélogramme.

$$2. 2\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DJ} - 2\overrightarrow{DI}$$

que l'on peut transformer en $\overrightarrow{DJ} = 4\overrightarrow{IJ}$ et donc la droite (IJ) passe par D.

Déterminer des vecteurs formant une base

53. 1. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et D sont dans le même plan donc les vecteurs ne forment pas une base.

2. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$ et la droite (FH) n'est pas incluse dans le plan (AEH).

$$54. 1. \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{BP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ils sont donc combinaison linéaire et ne forment pas une base.

2. Les points B, E et G forment un plan et les points N, P et C un autre plan sécant au précédent.

55. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} 1 = 2a - b \\ -1 = -3a + 2b \\ 2 = a + b \end{cases}$$

qui n'a pas de solution donc les vecteurs forment une base.

56. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} -1 = 2a + b \\ -1 = 3a + 2b \\ 3 = -2a + b \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -1$ et $b = 1$ donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

$$57. 1. 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

2. Donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

$$58. 1. 2\vec{u} \neq \vec{v}$$

$$2. \text{ On a le système : } \begin{cases} 3 = a + 2b \\ -1 = -a \\ 0 = a + b \end{cases} \text{ qui n'a pas de solution.}$$

3. Donc les vecteurs forment une base.

Repérage dans l'espace

$$59. \text{ a) } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ b) } \overrightarrow{AQ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ c) } \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ d) } \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \overrightarrow{\text{EM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \overrightarrow{\text{NQ}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{60. a) } \vec{u} & \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} & \text{b) } \vec{v} & \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \vec{w} & \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{d) } \vec{t} & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

61. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$\overrightarrow{\text{OC}} = a\overrightarrow{\text{OA}} + b\overrightarrow{\text{OC}}$ ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 7 = 2a + b \\ -12 = -4b \\ 22 = -a + 8b \end{cases} \quad \text{qui a pour solution } a = 2 \text{ et } b = 3 \text{ donc}$$

les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

$$\text{62. } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AD}} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où : } \overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}}$$

donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

63. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} -2 = -a + b \\ -1 = a - 2b \\ 1 = 2a - b \end{cases}$$

qui n'a pas de solution donc les vecteurs forment une base.

64. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} -2 = a + 4b \\ 3 = -a - 2b \\ -1 = -2a - 18b \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -4$ et $b = \frac{1}{2}$ donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

Déterminer des positions relatives dans l'espace avec des coordonnées

$$\text{65. } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{CD}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires donc}$$

les droites ne sont pas parallèles. Par ailleurs $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\overrightarrow{\text{CD}} + 3\overrightarrow{\text{AC}}$ donc les points sont coplanaires et donc les droites sont sécantes.

$$\text{66. } \overrightarrow{\text{1.AB}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires}$$

donc (ABC) est un plan.

$$\text{2. } \overrightarrow{\text{DE}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc il faut résoudre le système :}$$

$$\begin{cases} -3 = 3a + 2b \\ 2 = a + b \\ 0 = -2a - 4b \end{cases} \quad \text{qui n'a pas de solution donc les vec-}$$

teurs forment une base.

3. Par conséquent la droite (DE) coupe le plan (ABC).

$$\text{67. } \overrightarrow{\text{1. AD}} = 2\overrightarrow{\text{BC}}$$

2. $2\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{\text{AD}}$ donc les points sont coplanaires.

3. On en déduit que les droites sont sécantes.

$$\text{68. D'une part } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et d'autre part}$$

$$\overrightarrow{\text{DE}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{DF}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires deux à deux donc les plans sont sécants.}$$

$$\text{69. } \overrightarrow{\text{1. } \vec{a}} = \vec{0}$$

2. Donc les plans sont parallèles.

70. Ils sont parallèles car le vecteur $\overrightarrow{OA}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Déterminer des représentations paramétriques de droites

71. 1. On a :
$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -2 + k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

2. Pour $k = 1$ on obtient B.

3. Non pas de k possible.

72. a) $(0 ; -1 ; -3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $(-2 ; 0 ; -4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $(3 ; 1 ; 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) $(0 ; 1 ; 2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

73. a) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -k \\ z = -2 + 3k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 1 - 2k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = k \\ z = 2 - k \end{cases}$

74. a) Non.

c) Oui pour $k = -1$.

b) Oui pour $k = 1$.

d) Oui pour $k = -2$.

75. 1.
$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - 2k \\ z = -3 + 4k \end{cases}$$

2. a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

b) Pour $k = 2$.

3.
$$\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = -2 - 2k \\ z = 5 + 4k \end{cases}$$

76.
$$\begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$$

a) k réel

b) $k \in [0 ; 1]$

c) $k \in [0 ; +\infty[$

77. Axe des abscisses $\begin{cases} x = k \\ y = 0, \text{ axe des ordonnées} \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \text{ et axe des cotes} \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$

78. a) (CE) $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}$

b) (FH) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = 1 \end{cases}$

c) (BG) $\begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = k \end{cases}$

Exercices d'entraînement p. 295-297

Des vecteurs dans tous les sens

79. Comme $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ et que les points A, B, D, E et H ne sont pas coplanaires alors les vecteurs forment une base.

80. 1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3. A, P et Q sont alignés.

4. Ils ne forment pas une base car $\vec{PC}$ et $\vec{FB}$ sont colinéaires.

5. Comme $\vec{EH} = \vec{BC}$ et que les points A, B, C et Q ne sont coplanaires alors les vecteurs forment une base.

81. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, on cherche s'il

existe les réels a et b tels que : $\vec{AB} = a\vec{AC} + b\vec{AD}$

ce qui donne le système :
$$\begin{cases} 1 = -2a - 2b \\ 1 = 3a - 7b \\ -\frac{1}{2} = 2b \end{cases}$$
 qui a pour

solution $b = -\frac{1}{4}$ et $a = -\frac{1}{4}$ donc ces vecteurs ne forment pas une base.

82. 1. Ce sont des parallélogrammes.

2. $\vec{DF} - 2\vec{DJ} = \vec{DA} + \vec{DE} - (\vec{DA} + \vec{DC}) = \vec{CE} = \vec{IJ}$

3. On en déduit que les vecteurs sont combinaison linéaire.

4. Les points sont coplanaires.

83. 1. $\vec{HI} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{HJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Il faut résoudre le système :
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 1 = b \\ 1 = -a - b \end{cases}$$
 qui

n'a pas de solution.

3. Ces vecteurs forment une base.

84. A. 1. $\vec{IL} = \vec{KJ}$ donc IKJL est un parallélogramme.

2. Et : $\vec{IK} + \vec{IL} = \vec{IJ}$.

B. 1. $I \begin{pmatrix} 0; 0; \frac{1}{2} \end{pmatrix}, J \begin{pmatrix} 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \end{pmatrix}, K \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1 \end{pmatrix}$ et $L \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; 0; 0 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{IL} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. $\vec{IK} + \vec{IL} = \vec{IJ}$

85. A. 1. $-\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC} = -2\vec{AI} + 2\vec{AJ} = 2\vec{IJ}$

2. $\vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{AC} = 2\vec{AI} - 2\vec{AD} = 2\vec{DI} = 3\vec{DG}$

3. On cherche à résoudre le système :
$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \\ 1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \\ 1 = \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b \end{cases}$$

qui a pour solution

$a = b = -6$ et donc $\vec{u} = -6\vec{IJ} - 6\vec{DG}$.

B. 1. $I \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \end{pmatrix}, J \begin{pmatrix} 0; 0; \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{DG} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3. Et $\vec{u} = -6\vec{IJ} - 6\vec{DG}$.

86. 1. PQRS parallélogramme donc $\vec{PQ} = \vec{SR}$ et alors $\vec{PQ} + \vec{PS} = \vec{PR}$.

2. On introduit le point A à l'aide de la relation de Chasles dans tous les vecteurs de la somme ce qui donne :

$7\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AH} + \vec{AD} + \vec{AF} = 7\vec{MA} + 3\vec{AG} = \vec{0}$.

87. 1. $\vec{FB} = \vec{FC} + \vec{FD}$

2. G est le centre de gravité de ACD donc :

$\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} + 2\vec{GF} + \vec{FB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{GF} + \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GF} + 2\vec{GE} = \vec{0}$

3. On en déduit l'alignement des points et on a :
 $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

D'autres représentations d'une droite

88. a) Ces deux droites ont le même vecteur directeur donc elles sont parallèles. Par ailleurs elles sont confondues car pour $k = 0$ on obtient le même point que pour $k' = -2$.

b) Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et le point $k = 0$ pour d correspond au point $k' = 2$ pour d' .

89. Le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x + y = 1 - k \\ -x + y = -1 + k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} \quad \text{qui est bien une représentation paramétrique d'une droite.}$$

Des intersections de droites

90. Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes en un point pour $t = 0$ ou $k = 3$ soit $(-5 ; 15 ; 13)$.

91. 1. Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

2. A(1 ; 0 ; -1) et B(-1 ; -1 ; 0).

3. C(3 ; 2 ; 0) et D(4 ; 1 ; 2).

4. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on cherche à résoudre

$$\text{le système : } \begin{cases} -2 = 2a + 3b \\ -1 = 2a + b \\ 1 = a + 3b \end{cases} \quad \text{qui n'a pas de solution}$$

donc ils forment une base.

5. On en déduit que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires donc les droites ne sont pas sécantes et coplanaires.

$$92. 1. (FG) \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -1 + 6k \\ z = 2 - 5k \end{cases}$$

2. Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

3. Le système : $\begin{cases} -4 + t = 1 + 3k \\ -11 + 2t = -1 + 6k \\ -1 - t = 2 - 5k \end{cases}$ a pour solution
 $t = 17$ et $k = 4$ ce qui donne le point H(13 ; 23 ; -18).

$$93. 1. \text{ On a : } \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 3 - k \end{cases}$$

$$2. \text{ On a : } \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

3. Il appartient à d pour $k = 5$ mais n'appartient pas à d' .

4. Les deux droites se coupent au point A car pour $t = \frac{1}{2}$ il appartient à d' .

94. 1. Elles sont concourantes au point (0 ; 3 ; 1).

2. Leurs vecteurs directeurs forment-ils une base ?

$$\text{Le système : } \begin{cases} -1 = 3a + 4b \\ 1 = -3a + 4b \\ 2 = -4a \end{cases} \text{ n'a pas de solution donc}$$

oui et par conséquent les droites ne sont pas coplanaires.

95. 1. On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 + k = 3 + 3k_2 \\ 1 - k_1 = 3 + 2k_2 \\ 5 + 2k_1 = 1 - k_2 \end{cases} \quad \text{qui n'a pas de solution donc les}$$

droites ne sont pas coplanaires.

$$2. 3. \text{ Par exemple : } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

96. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et le système suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} -2 + k = k' \\ 1 + k = -2k' \\ 4 + 3k = 8 + 3k' \end{cases}$$

- 97. (GK)** $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$ leurs vecteurs directeurs sont égaux et pour $t = 0$ on obtient le même point que pour $k = -2$ donc elles sont confondues.

98. 1. (GI) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - k \\ z = 1 - \frac{1}{2}k \end{cases}$

- 2.** Les points du plan (ABC) vérifient $z = 0$ donc le point d'intersection est $(-1 ; -1 ; 0)$.

99. 1. (GI) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}k \\ z = -\frac{1}{3}k \end{cases}$

- 2.** $J(1 ; 0 ; 1)$ appartient à (GI) pour $k = -3$.

3. Non.

100. 1. $\left(0 ; 0 ; \frac{1}{2}\right), J\left(0 ; \frac{1}{2} ; 0\right), K\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4} ; 0\right), G\left(0 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ et $H\left(\frac{2}{3} ; 0 ; 0\right)$.

2. a) $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ doivent vérifier le

système : $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2}{3}b \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b \end{cases}$ qui a pour solution :

$a = b = \frac{3}{4}$.

- b)** On en déduit que les points sont coplanaires.

3. a) (IG) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = \frac{1}{4}k \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \end{cases}$ et (HK) $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}t \\ y = \frac{1}{4}t \\ z = 0 \end{cases}$

- b)** Elles sont sécantes.

- c)** Elles se coupent au point K.

101. 1. a) $\overrightarrow{JK} = -3\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{JG} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

- b)** D'où : $2\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{JG}$.

2. a) $J(3 ; 3 ; 0)$ et $K\left(0 ; 0 ; \frac{3}{2}\right)$

b) (JK) $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 3 - 3k \\ z = \frac{3}{2}k \end{cases}$

- c)** Pour $k = \frac{2}{3}$ on a $G(1 ; 1 ; 1)$.

102. 2. a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

- c)** D'où : $2\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{NP}$.

2. a) $M(-1 ; 0 ; 0), N\left(0 ; 1 ; -\frac{1}{2}\right)$ et $P\left(2 ; 3 ; -\frac{3}{2}\right)$.

b) (MN) $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = k \\ z = -\frac{1}{2}k \end{cases}$

- c)** Pour $k = 3$.

- 103.** Une représentation paramétrique serait :

$\begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta p \\ y = y_A + \alpha b + \beta q \\ z = z_A + \alpha c + \beta r \end{cases}$

- 104. 1.** Des formes géométriques de l'espace.

- 2.** Travail de l'élève.

Exercices bilan

p. 298

105. Une position

$$1. \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ non colinéaires.}$$

2. a) Car les points sont coplanaires.

$$b) \text{ On obtient le système : } \begin{cases} x_K - 1 = -\frac{1}{2}a \\ y_K = b \\ z_K - 1 = -a - \frac{1}{2}b \end{cases} \text{ d'où les}$$

coordonnées de K.

$$c) (BH) \begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = k \end{cases} \text{ d'où } k = \frac{2}{7} \text{ et } K\left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}; \frac{2}{7}\right).$$

3. a) Les points sont coplanaires et les vecteurs non

$$\text{colinéaires. Leur intersection vérifie : } \begin{cases} 1 - \frac{2}{7}k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{2}{7}k = t \\ 1 - \frac{5}{7}k = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

$$\text{qui donne les solutions } t = \frac{1}{3} \text{ d'où } L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$b) \text{ Et } \overrightarrow{LI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}.$$

106. Distance minimale

$$1. \overrightarrow{AM} = t \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{t}{2} \overrightarrow{AB} \text{ d'où } M(t; -1; 5) \text{ et}$$

$$\overrightarrow{CN} = t \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} = \frac{t}{5} \overrightarrow{CD} \text{ d'où } N\left(11; \frac{4}{5}t; 1 + \frac{3}{5}t\right).$$

 2. a) $\overrightarrow{CD} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ donc (CD) est incluse dans le plan.

$$b) \text{ On a : } \overrightarrow{CE} = -\vec{j} + 4\vec{k}.$$

 c) E appartient à (AB) pour $t = 11$.

d) Non sécantes.

$$3. a) MN^2 = (11 - t)^2 + (0,8t + 1)^2 + (0,6t - 4)^2 \\ = 2t^2 - 25,2t + 138$$

$$b) \text{ Ce polynôme du second degré est minimal pour } t = \frac{25,2}{4} = 6,3 \text{ s.}$$

107. Dans le cube

1. Car les points sont coplanaires.

$$2. \text{ On a le système : } \begin{cases} x_Z - 1 = -b \\ y_Z = a \\ z_Z = a + b \end{cases}$$

$$3. (CE) \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = k \end{cases}$$

 4. Alors Z se trouve pour $a = b = \frac{k}{2}$ ce qui donne Z

$$Z\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

108. Droites concourantes

1. M(1 ; 1 ; 0), N(1 ; 0 ; 1) et P(0 ; 1 ; 1).

$$2. (DM) \begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1 \\ z = 1 - k_1 \end{cases}, (CN) \begin{cases} x = k_2 \\ y = 1 - k_2 \\ z = k_2 \end{cases} \text{ et } (BP) \begin{cases} x = 1 - k_3 \\ y = k_3 \\ z = k_3 \end{cases}$$

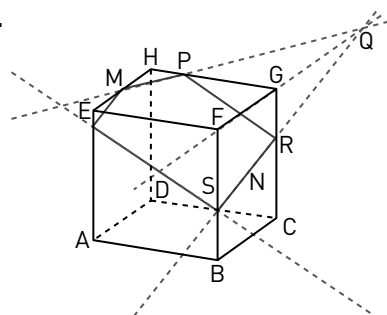
 3. On résout une intersection et on vérifie avec l'autre droite, alors on obtient : $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{2}$ et

$$Q\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

109. Une section

1. 2. Les droites sont coplanaires et non parallèles donc sécantes.

3.



Préparer le bac
Je me teste

p. 300

110. A et D

111. A

112. B et C

113. A et B

114. D

115. A

116. B

Préparer le bac
Je révise

p. 301

117. Inclusion

1. Pour $k = 0$.

2. Pour $k = 1$.

3. On a le système :
$$\begin{cases} 0 = b \\ 1 = -a - b \\ 1 = -a + 2b \end{cases}$$
 qui donne $a = -1$

et $b = 0$.

4. Les points A, B, C et D sont coplanaires et donc d est incluse dans (ABC).

118. Alignement

1. $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

2. $(IJ) \begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

3. $M\left(0; \frac{1}{3}; 1\right), N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ et $K\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

4. Pour $k = \frac{1}{3}$ le point K appartient à la droite (IJ).

119. Encore une intersection

1. $(AD) \begin{cases} x = 0 \\ y = k \text{ et } (MN) \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ z = 0 \end{cases}$

2. $L\left(0; \frac{5}{4}; 0\right)$

3. $(PL) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} + t \\ z = -t \end{cases}$

4. $K\left(0; 1; \frac{1}{4}\right)$

5. La droite est incluse dans les deux plans.

6. $(KL) \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}s \\ z = s \end{cases}$

120. Parallélisme

1. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{PF}$ combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.

3. Donc (PF) est parallèle au plan (EGQ).

121. Vrai-faux

1. Faux

2. Faux

3. Faux

4. Vrai

Exercices vers le supérieur

p. 302

122. Lieu

1. $L\left(3 - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k'; 4 - 4k - k'; 6 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k'\right)$

2. $\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k' \\ -4k - k' \\ -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k' \end{pmatrix} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

3. Le point L varie sur le plan défini par le point K et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

123. Trafic aérien

1. On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3+k=0,5+2k' \\ 9+3k=4+k' \\ 2=4-k' \end{cases} \text{ qui n'a pas de solution donc les}$$

droites ne sont pas coplanaires.

2. a) b) Car les droites ne sont pas parallèles entre elles.

3. Les deux plans se coupent selon une droite qui passe par S et qui coupe chacune des deux droites dans chacun des deux plans car sinon les trois droites seraient parallèles entre elles.

124. Position et section

1. Coplanaires dans le plan (SBD).

2. a) $\vec{BF} = \vec{BS} + \vec{SF} = -\vec{SB} + \frac{1}{3}\vec{SD}$

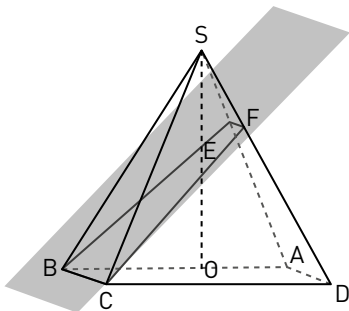
b) $\vec{BE} = \vec{BS} + \frac{1}{2}\vec{SO} = \vec{BS} + \frac{1}{4}(\vec{SB} + \vec{SD}) = -\frac{3}{4}\vec{SB} + \frac{1}{4}\vec{SD}$

c) D'où : $\vec{BE} = \frac{3}{4}\vec{BF}$.

3. a) (BEC) et (ABC) se coupent selon (BC) et (BEC) et (SCD) selon (CE).

b) D'après le théorème du toit ils se coupent selon une droite parallèle à (BC).

c)



125. Paramètre

1. $\vec{AM}_0 = \vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{AM}_1 = \frac{3}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AM}_{-0,5} = 3\vec{AC}$.

2. $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

3. $\vec{DM}_t = \vec{DA} + \vec{AM}_t = \frac{1-t}{1+t} \left(-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC} \right)$

4. $f'(t) = \frac{-2}{(1+t)^2}$ donc f est décroissante.

5. M_t appartient au plan (ABD).

126. Système particulier

On obtient :
$$\begin{cases} x = \frac{a}{c}k \\ y = \frac{b}{c}k \\ z = k \end{cases}$$

127. Section

A. 1. (IJ)
$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

2. OK

3. On a le système :
$$\begin{cases} 1-t = \frac{3}{4} + k \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = k \\ t = 1-k \end{cases}$$

qui donne $k = t = \frac{1}{2}$ et qui doit vérifier la première

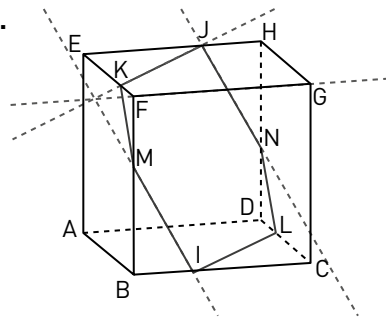
équation : $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{3}{4} \right) \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

4. $L \left(\frac{1}{4}; 1; 0 \right)$

B. 1. $\vec{IL} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{JK} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ opposé donc IKJL est un

parallélogramme.

2. 3. 4.



128. Représentations paramétriques

1. A(1 ; 1 ; 1)

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas combinai-

son linéaire car le système : $\begin{cases} 2 = -b \\ -8 = -a + 4b \\ 1 = -3a \end{cases}$ n'a pas

de solution, donc B n'appartient pas au plan.

3. a) $f(t) = (1+t)^2 + (4+4t)^2 + 1 = 17t^2 + 34t + 18$

b) Minimum pour $t_0 = -1$.

c) $M_0(3; -7; 1)$

d) C'est le projeté orthogonal du point B sur la droite d' .

129. Aire maximale

1. L'intersection du plan et de la droite (AB) est la parallèle à (BC) passant par M et l'intersection du plan et de la droite (CD) est la parallèle à (AD) passant par M.

2. Un rectangle.

3. $A(x) = x(8-x) = -x^2 + 8x$

4. Cette aire est maximale pour $x_0 = 4$ c'est-à-dire quand M est au milieu du segment et alors la section est un carré.

130. Mouvement d'un point

1. La vitesse est donnée par : $\begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = 3 \end{cases}$ qui est bien constante.

2. La vitesse est donnée par : $\begin{cases} x'(t) = 2 - 2t \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = 0 \end{cases}$ puis

$$x''(t) = -2$$

l'accélération par : $y''(t) = 0$

$$z''(t) = 0$$

Travaux pratiques

p. 304-305

TP 1. Barycentre d'un système de points pondérés

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de barycentre.

A. Avec deux points

1. $\vec{AG} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{AB}$

2. Ici : $\vec{AG} = \frac{3}{4} \vec{AB}$.

3. Si a et b sont de même signe alors G est entre A et B et sinon il est à l'extérieur du segment [AB].

4. Dans ce cas G n'existe pas.

B. Avec plusieurs points

1. $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (a+b)\vec{GH} + a\vec{HA} + b\vec{HB} + c\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\vec{GH} + c\vec{GC} = \vec{0}$$

2. On construit H barycentre de (A, 1) (B, 2) qui vérifie donc : $\vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$, puis ensuite G est le milieu du segment [HC] car les coefficients de H et de C sont égaux.

3. De même on construit le barycentre H de (A, -1) (B, 3) qui vérifie $\vec{AH} = \frac{3}{2} \vec{AB}$ et le barycentre

K de (C, 2) (D, 1) qui vérifie $\vec{CK} = \frac{1}{3} \vec{CD}$ et enfin G est

le barycentre de (H, 2) (K, 3) et vérifie $\vec{HG} = \frac{3}{5} \vec{HK}$.

C. Terre-Lune

1. 2. Le barycentre vérifie : $\vec{AG} = \frac{m_L}{m_L + m_T} \vec{AB} = \frac{1}{82} \vec{AB}$

ce qui donne $AG = 4\,688$ km donc à l'intérieur de la Terre.

TP 2. Utilisations du barycentre d'un système de points pondérés

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Exploiter une application du TP 1.

1. Le barycentre H de (A, 1) (B, 1) est le milieu du segment [AB] et G est alors le barycentre de (H, 2) (C, 1) et vérifie alors : $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CH}$ c'est donc le centre de gravité du triangle BCD.

2. a) On a : $\vec{CE} = \vec{BD} = \vec{BE} + \vec{ED}$ et donc E est barycentre de (B, 1) (C, -1) (D, -1).

b) G est barycentre de $\{A, 1\} \{C, 1\} \{D, 1\}$ donc G est barycentre de $\{A, 1\} \{B, 1\} \{E, 1\}$ et donc de $\{I, 2\} \{E, 1\}$.

c) On a : $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IE}$.

3. a) A est barycentre de $\{C, 1\} \{J, 1\}$, B de $\{A, 1\} \{K, 1\}$ et C de $\{B, 1\} \{I, 1\}$.

b) Le centre gravité de IJK est isobarycentre de $\{I, 1\} \{J, 1\} \{K, 1\}$ donc de $\{C, 2\} \{B, -1\} \{A, 2\} \{C, -1\} \{B, 2\} \{A, -1\}$ c'est-à-dire de $\{A, 1\} \{B, 1\} \{C, 1\}$ donc c'est aussi le centre de gravité de ABC.

4. On regroupe les points deux à deux pour les bimédianes et par trois pour les médianes.

TP 3. Fonction vectorielle de Leibniz

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Étudier une fonction particulière.

A. Cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$

$$1. \vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\vec{MG}_i + \vec{G_iA_i}) = 0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{G_iA_i}$$

$$2. \text{D'où : } \vec{f}(M) = \alpha_1 \vec{G_1A_1}.$$

B. Cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

$$1. \vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n (\vec{MG} + \vec{GA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MG} \right)$$

$$2. \text{a) } 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG}$$

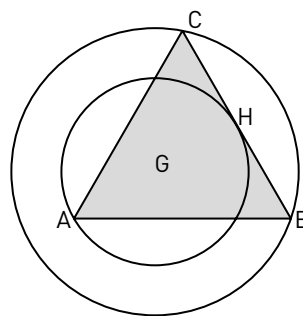
b) Cela revient à : $4\vec{MG} = 8\sqrt{7}$ soit encore : $\vec{MG} = 2\sqrt{7}$ et donc M appartient au cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{7}$.

c) On construit G à l'aide du milieu H de [BC] et alors G est milieu de [AH].

On a de plus : $AH = 4\sqrt{3}$ et donc $AG = GH = 2\sqrt{3}$.

Puis Pythagore dans BGH nous donne :

$$BG = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7}.$$



d) L'ensemble cherché est entre les deux cercles.