Méthode : Etudier des positions relatives

Exercice

Étudier les positions relatives des droites d et d' puis du plan $\wp$ et de la droite d'. On donnera leur intersection éventuelle.

Le plan $\wp$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-2t+3t' \\ y = -2+t-t' \\ z = 3-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

Les droites d et d' ont pour représentation paramétrique :

d : $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 5-2t \\ z = 1+2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et

d' : $\begin{cases} x = 4-t \\ y = -2+t \\ z = 1+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Correction

Attention : la même lettre t désigne deux paramètres différents. Il faut donc changer de lettre dans les résolutions de système pour les différencier.

$\wp$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d et d' ont pour vecteur directeur respectif $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w'}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$ donc d est parallèle à $\wp$. Le point $\mathrm{A}(2;5;1)$ appartient à d. S'il appartient à $\wp$ alors $d \subset \wp$, sinon d est strictement parallèle à $\wp$.

Or $\begin{cases} 2 = 1-2t+3t' \\ 5 = -2+t-t' \\ 1 = 3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2t+3t' = 1 \\ t-t' = 7 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \dfrac{5}{3} \\ t' = -5 \\ t = 2 \end{cases}$

Le système n'ayant pas de solution, $\mathrm{A} \notin \wp$

Donc d est strictement parallèle à $\wp$.

Déterminons maintenant $\wp \cap d'$: $\mathrm{M} \in \wp \cap d' \Leftrightarrow$ il existe trois réels t, t' et k tels que :

$$\begin{cases} x = 1-2t+3t' \\ y = -2+t-t' \\ z = 3-t \\ x = 4-k \\ y = -2+k \\ z = 1+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-k = 1-2t+3t' \\ -2+k = -2+t-t' \\ 1+3k = 3-t \\ x = 4-k \\ y = -2+k \\ z = 1+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k+2t-3t' = -3 \\ k-t+t' = 0 \\ 3k+t = 2 \\ x = 4-k \\ y = -2+k \\ z = 1+3k \end{cases}$$

En finissant la résolution du système, on obtient $t' = \dfrac{14}{5}$; $t = \dfrac{52}{20}$ et $k = \dfrac{-1}{5} = -0,2$

ce qui nous donne $x = 4,2$; $y = -2,2$ et $z = 0,4$.

Ainsi, $\wp$ et d' sont sécantes au point $\mathrm{K}(4,2;-2,2;0,4)$