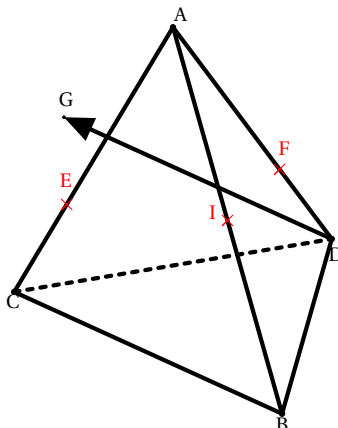




Méthode : Démontrer que quatre points sont coplanaires

Il s'agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l'un en fonction des deux autres.



Exercice

Soit ABCD un tétraèdre, I le milieu de [AB] ; E et F les points définis par $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ et $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AD}$ et G le point tel que BCGD soit un parallélogramme.

1. Exprimer les vecteurs $\vec{IE}$, $\vec{IF}$ et $\vec{IG}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.
2. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $\vec{IG} = \alpha\vec{IE} + \beta\vec{IF}$.
3. En déduire que les points I, E, G et F sont coplanaires.

Correction

$$1. \vec{IE} = \vec{IA} + \vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.$$

$$\vec{IF} = \vec{IA} + \vec{AF} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AD}.$$

$$\vec{IG} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DG} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BA} + \vec{AC} = -\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC}.$$

2. Il existe deux réels α et β tels que $\vec{IG} = \alpha\vec{IE} + \beta\vec{IF}$

$$\text{soit } -\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AC} = -\frac{\alpha}{2}\vec{AB} + \frac{2\alpha}{3}\vec{AC} - \frac{\beta}{2}\vec{AB} + \frac{2\beta}{3}\vec{AD}$$

Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre α et β tels que : $-\frac{3}{2} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ et $\frac{2}{3}\alpha = 1$ et $\frac{2}{3}\beta = 1$,

$$\text{soit, } \alpha = \frac{3}{2} \text{ et } \beta = \frac{3}{2}.$$

$$\text{D'où } \vec{IG} = \frac{3}{2}\vec{IE} + \frac{3}{2}\vec{IF}$$

3. On en déduit que les vecteurs $\vec{IE}$, $\vec{IF}$ et $\vec{IG}$ sont coplanaires, donc les points I, E, G et F sont coplanaires.