



Nom et prénom : .....

### Exercice 1.

On considère les points  $A(2; 1; 0)$ ,  $B(1; 2; 3)$  et les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

1. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(d)$  passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ .
2. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(d')$  passant par B et de vecteur directeur  $\vec{v}$ .
3. Le point  $C(1; 0; -1)$  appartient-il à  $(d)$  ? à  $(d')$  ?
4. Les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont-elles sécantes ?

### Correction :

On considère les points  $A(2; 1; 0)$ ,  $B(1; 2; 3)$  et les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

1. Une représentation paramétrique de la droite  $(d)$  passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$  est

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t z_{\vec{u}} \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. De même, une représentation paramétrique de la droite  $(d')$  passant par B et de vecteur directeur  $\vec{v}$  est :

$$\begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 + 2s \\ z = 3 + s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$



3. Le point  $C(1; 0; -1)$  appartient à  $(d)$  s'il existe  $t$  tel que 
$$\begin{cases} 2+t=1 \\ 1+t=0 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$$

$C$  appartient à  $(d)$  pour  $s = -1$

Le point  $C(1; 0; -1)$  appartient à  $(d')$  s'il existe  $s$  tel que 
$$\begin{cases} 1-s=1 \\ 2+2s=0 \\ 3+s=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0 \\ s=-1 \\ s=-4 \end{cases}, \text{ système}$$

incompatible

$C$  n'appartient pas à  $(d')$

4.  $(d)$  et  $(d')$  sont sécantes s'il existe un couple  $(t; s)$  tel que

$$\begin{cases} 2+t=1-s \\ 1+t=2+2s \\ t=3+s \end{cases} \quad \text{On remplace } t \text{ par } 3+s :$$

$$\begin{cases} 2+3+s=1-s \\ 1+3+s=2+2s \\ t=3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s=-4 \\ 2=s \\ t=3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-2 \\ s=2 \\ t=3+s \end{cases}, \text{ système incompatible}$$

$(d)$  et  $(d')$  ne sont pas sécantes.

**Exercice 2.**

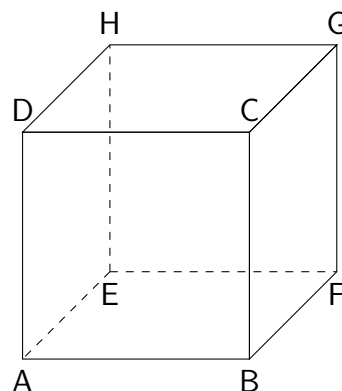
ABCDEFGH est un cube. I et J sont les points définis par  $\vec{DI} = \frac{1}{4} \vec{DC}$  et  $\vec{CJ} = \frac{1}{4} \vec{CB}$ .

**1. Partie vectorielle**

- Exprimer les vecteurs  $\vec{GE}$ ,  $\vec{GJ}$  et  $\vec{HI}$  en fonction des vecteurs  $\vec{DA}$ ,  $\vec{DC}$  et  $\vec{DH}$ .
- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{HI} = a\vec{GE} + b\vec{GJ}$
- En déduire que la droite (HI) est parallèle au plan (GEJ).

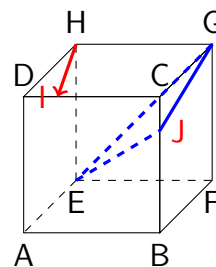
**2. Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$** 

- Déterminer, sans justifier, les coordonnées de A, G, E, H, I et J.
- A l'aide des coordonnées, prouver que les vecteurs  $\vec{HI}$ ,  $\vec{GE}$  et  $\vec{GJ}$  ne forment pas une base de l'espace.

**Correction :**

ABCDEFGH est un cube.

I et J sont les points définis par  $\vec{DI} = \frac{1}{4} \vec{DC}$  et  $\vec{CJ} = \frac{1}{4} \vec{CB}$ .

**1. Partie vectorielle**

- Exprimer les vecteurs  $\vec{GE}$ ,  $\vec{GJ}$  et  $\vec{HI}$  en fonction des vecteurs  $\vec{DA}$ ,  $\vec{DC}$  et  $\vec{DH}$ .

$$\begin{aligned} \vec{GE} &= \vec{GF} + \vec{FE} = \vec{DA} - \vec{DC} \\ \vec{GJ} &= \vec{GC} + \vec{CJ} = -\vec{DH} + \frac{1}{4}\vec{CB} = \frac{1}{4}\vec{DA} - \vec{DH} \\ \vec{HI} &= \vec{HD} + \vec{DI} = -\vec{DH} + \frac{1}{4}\vec{DC} = \frac{1}{4}\vec{DC} - \vec{DH} \end{aligned}$$

- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{HI} = a\vec{GE} + b\vec{GJ}$

$$\text{On a } \vec{HI} = a\vec{GE} + b\vec{GJ} \quad \text{équivalent à} \quad \frac{1}{4}\vec{DC} - \vec{DH} = a(\vec{DA} - \vec{DC}) + b\left(\frac{1}{4}\vec{DA} - \vec{DH}\right)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{4}\vec{DC} - \vec{DH} = a\vec{DA} - a\vec{DC} + \frac{b}{4}\vec{DA} - b\vec{DH}$$

$$\text{Alors } \left(a + \frac{b}{4}\right)\vec{DA} + \left(-a - \frac{1}{4}\right)\vec{DC} + (-b + 1)\vec{DH} = \vec{0}$$

Comme  $\vec{DA}$ ,  $\vec{DC}$ ,  $\vec{DH}$  ne sont pas coplanaires,

$$\text{cela implique que : } \begin{cases} a + \frac{1}{4}b = 0 \\ -a - \frac{1}{4} = 0 \\ -b + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$



Donc  $\boxed{\vec{HI} = -\frac{1}{4} \vec{GE} + \vec{GJ}}$

c. En déduire que la droite (HI) est parallèle au plan (GEJ).

On sait que  $\vec{HI} = -\frac{1}{4} \vec{GE} + \vec{GJ}$

Le vecteur  $\vec{HI}$  est coplanaire avec les deux vecteurs non colinéaires  $\vec{GE}$  et  $\vec{GJ}$  du plan (GEJ),

Donc  $\boxed{\text{la droite (HI) est parallèle au plan (GEJ)}}$

2. Dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$

a. On a  $A(0; 0; 0)$ ,  $G(1; 1; 1)$ ,  $E(0; 1; 0)$ ,  $H(0; 1; 1)$ ,  $I(0,25; 0; 1)$  et  $J(1; 0; 0,75)$ .

b. A l'aide des coordonnées, prouver que les vecteurs  $\vec{HI}$ ,  $\vec{GE}$  et  $\vec{GJ}$  ne forment pas une base de l'espace.

$$\text{On a } \vec{HI} \begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{GE} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{GJ} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

On cherche à savoir s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  telque  $\vec{HI} = a\vec{GE} + b\vec{GJ}$

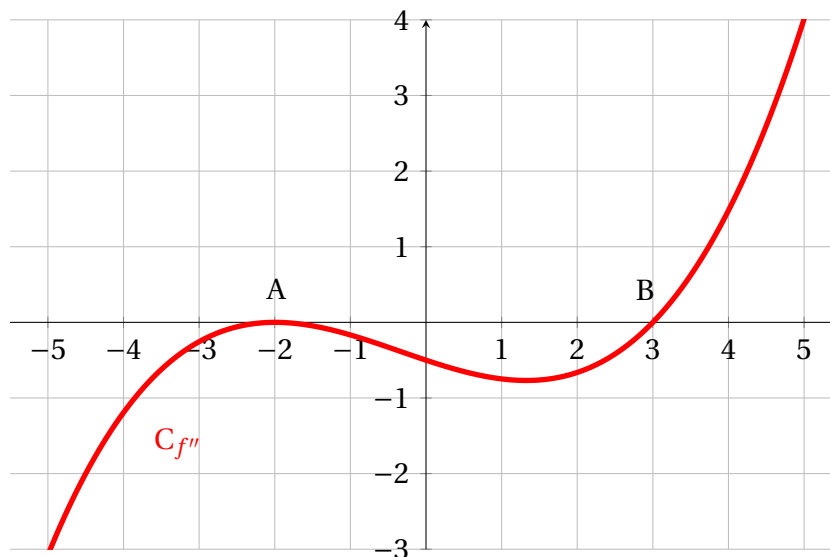
$$\text{On retrouve bien } \begin{cases} 0,25 = -a \\ -1 = -b \\ 0 = -a - 0,25b \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = -0,25 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc  $\vec{HI} = -0,25\vec{GE} + \vec{GJ}$

D'où  $\boxed{\text{les vecteurs sont coplanaires et ne forment donc pas une base de l'espace}}$

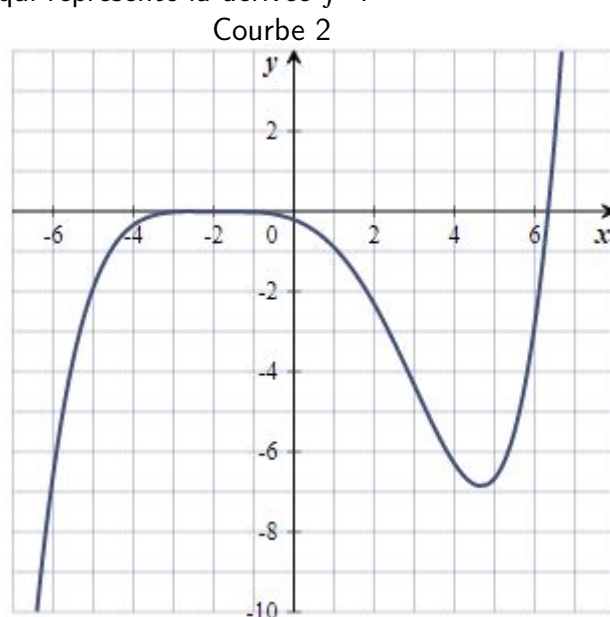
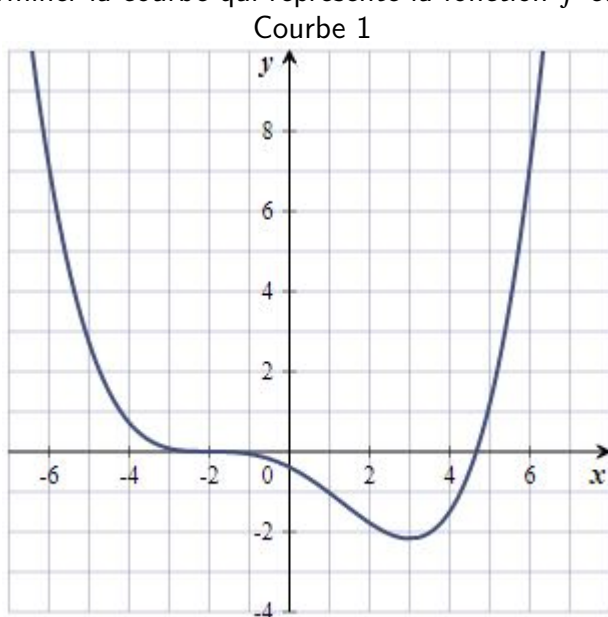


**Exercice 3.** On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$ , dans un repère orthonormé. Les points  $A(-2;0)$  et  $B(3;0)$  appartiennent à la courbe.



Chaque réponse sera justifiée.

1. La courbe représentative de  $f$  admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ . Donner le tableau de variation de la fonction  $f'$ .
4. Une des deux courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction  $f$  et l'autre celle de  $f'$ . Déterminer la courbe qui représente la fonction  $f$  et celle qui représente la dérivée  $f'$ .



**Correction :**

1. La courbe représentative de la fonction  $f''$  nous donne le signe de  $f''(x)$  :

|          |           |   |           |
|----------|-----------|---|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | -         | 0 | +         |

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour  $x = 3$

donc la courbe représentative de la fonction  $f$  admet un point d'inflexion d'abscisse 3

2. D'après le tableau de signe de  $f''(x)$ , on peut en déduire que :

la dérivée seconde est négative sur  $] -\infty; 3]$ , donc la fonction est concave sur  $] -\infty; 3]$

la dérivée seconde est positive sur  $[3; +\infty[$ , donc la fonction est convexe sur  $[3; +\infty[$

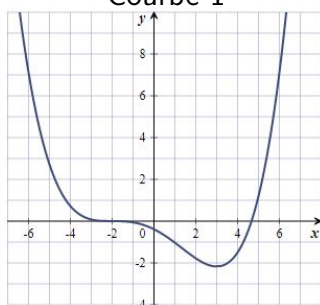
3. Les variations de la fonction  $f'$  se déduisent du signe de sa dérivée.

D'où le tableau de variation de la fonction :

|                   |           |   |           |
|-------------------|-----------|---|-----------|
| $x$               | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $f''(x)$          | -         | 0 | +         |
| Variation de $f'$ |           |   |           |

4.

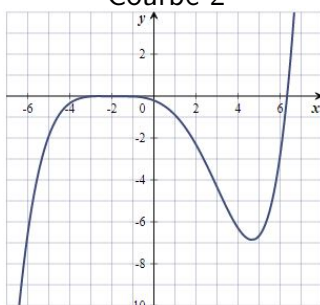
Courbe 1



La courbe 1 est la courbe représentative d'une fonction décroissante sur  $] -\infty; 3]$  et croissante sur  $[3; +\infty[$ .

C'est la seule des deux courbes susceptible de représenter la fonction dérivée  $f'$

Courbe 2



La courbe 2 est la courbe représentative d'une fonction concave sur  $] -\infty; 3]$  et convexe sur  $[3; +\infty[$ .

C'est la seule des deux courbes susceptible de représenter la fonction  $f$



**Exercice 4.** Déterminer le point d'inflexion sur la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 6x$ .

**Correction :**

Pour déterminer un point d'inflexion, il faut étudier le signe de la dérivée seconde de la fonction.

On a  $f(x) = x^3 - 12x^2 + 6x$  alors la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on obtient :

- $f'(x) = 3x^2 - 24x$
- $f''(x) = 6x - 24$

Alors

| $x$       | $-\infty$ | $4$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|-----|-----------|
| $6x - 24$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $f''(x)$  | $-$       | $0$ | $+$       |

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour  $x = 4$  d'où la courbe représentative de la fonction  $f$  admet un point d'inflexion d'abscisse 4

et  $f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 6 \times 4 = -104$

Donc le point d'inflexion sur la représentation graphique de la fonction  $f$  est pour coordonnées  $(4; -104)$