Nom et prénom : ....

Exercice 1.

On considère les points A$(0\,;\,1\,;\,2)$, B$(1\,;\,2\,;\,3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d') passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.
3. Le point C$(6\,;\,-8\,;\,-2)$ appartient-il à (d) ? à (d') ?
4. Les droites (d) et (d') sont-elles sécantes ?

Correction :

On considère les points A$(0\,;\,1\,;\,2)$, B$(1\,;\,2\,;\,3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \\ z = z_A + t z_{\vec{u}} \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

2. De même, une représentation paramétrique de la droite (d') passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - s \\ y = 2 + 2s \\ z = 3 + s \end{cases},\ s \in \mathbb{R}}$$

3. Le point C(6 ; -8 ; -2) appartient à (d) s'il existe t tel que $\begin{cases} t=6 \\ 1+t=-8 \\ 2+t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=6 \\ t=-9 \\ t=-4 \end{cases}$, système incompatible

$\boxed{\text{C n'appartient pas à } (d)}$

Le point C(6 ; -8 ; -2) appartient à (d') s'il existe s tel que $\begin{cases} 1-s=6 \\ 2+2s=-8 \\ 3+s=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-5 \\ s=-5 \\ s=-5 \end{cases} \Leftrightarrow s=-5$

$\boxed{\text{C appartient à } (d') \text{ pour } s=-5}$

4. (d) et (d') sont sécantes s'il existe un coupe $(t\ ;\ s)$ tel que

$\begin{cases} t=1-s \\ 1+t=2+2s \\ 2+t=3+s \end{cases}$. On remplace t par $1-s$:

$$\begin{cases} t=1-s \\ 1+1-s=2+2s \\ 2+1-s=3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1-s \\ 3s=0 \\ 2s=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1-s \\ s=0 \\ s=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0 \\ t=1 \end{cases}.$$

En remplaçant s par 0, on obtient $x=1\ ;\ y=2\ ;\ z=3$: on retrouve le point B.

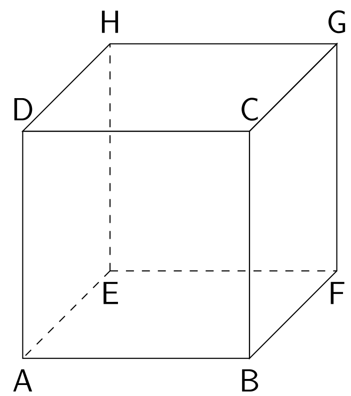
$\boxed{(d) \text{ et } (d') \text{ se coupent en B}}$.

Exercice 2.

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les points définis par $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

1. Partie vectorielle

a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{HI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.



b. Déterminer deux réels a et b tels que $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{GE} + b\overrightarrow{GJ}$

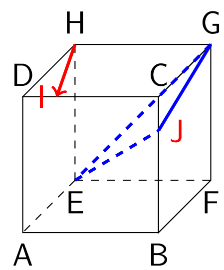
c. En déduire que la droite (HI) est parallèle au plan (GEJ).

2. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$

a. Déterminer, sans justifier, les coordonnées de A, G, E, H, I et J.

b. A l'aide des coordonées, prouver que les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$ ne forment pas une base de l'espace.

<u>Correction :</u>



ABCDEFGH est un cube.
I et J sont les points définis par $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

1. Partie vectorielle

a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{GJ}$ et $\overrightarrow{HI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.

- $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ} = -\overrightarrow{DH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH}$
- $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{DH} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH}$

b. Déterminer deux réels a et b tels que $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{GE} + b\overrightarrow{GJ}$

On a $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{GE} + b\overrightarrow{GJ}$ équivaut à $\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH} = a\left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right) + b\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH}\right)$

Donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH} = a\ \overrightarrow{DA} - a\ \overrightarrow{DC} + \frac{b}{4}\overrightarrow{DA} - b\ \overrightarrow{DH}$

Alors $\left(a + \frac{b}{4}\right)\overrightarrow{DA} + \left(-a - \frac{1}{4}\right)\ \overrightarrow{DC} + (-b+1)\ \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{0}$

Comme $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{DH}$ ne sont pas coplanaires,

cela implique que : $\begin{cases} a + \frac{1}{4}b = 0 \\ -a - \frac{1}{4} = 0 \\ -b + 1 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{HI}} = -\dfrac{1}{4}\ \overrightarrow{\mathrm{GE}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}}}$

c. En déduire que la droite (HI) est parallèle au plan (GEJ).

On sait que $\overrightarrow{\mathrm{HI}} = -\dfrac{1}{4}\ \overrightarrow{\mathrm{GE}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}}$

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ est coplanaire avec les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GJ}}$ du plan (GEJ),

Donc $\boxed{\text{la droite (HI) est parallèle au plan (GEJ)}}$

2. Dans le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$

a. On a A(0 ; 0 ; 0) , G(1 ; 1 ; 1), E(0 ; 1 ; 0), H(0 ; 1 ; 1), I(0,25 ; 0 ; 1) et J(1 ; 0 ; 0,75).

b. A l'aide des coordonées, prouver que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HI}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GJ}}$ ne forment pas une base de l'espace.

On a $\overrightarrow{\mathrm{HI}}\begin{pmatrix} 0,25 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{GE}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{GJ}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -0,25 \end{pmatrix}$

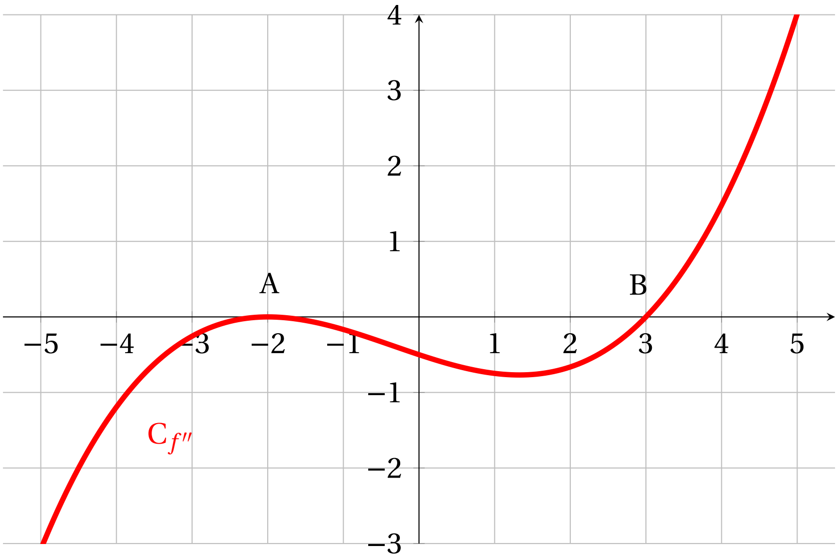
On cherche à savoir s'il existe deux réels a et b telque $\overrightarrow{\mathrm{HI}} = a\overrightarrow{\mathrm{GE}} + b\overrightarrow{\mathrm{GJ}}$

On retouve bien $\begin{cases} 0,25 = -a \\ -1 = -b \\ 0 = -a - 0,25b \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = -0,25 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $\overrightarrow{\mathrm{HI}} = -0,25\overrightarrow{\mathrm{GE}} + \overrightarrow{\mathrm{GJ}}$

D'où $\boxed{\text{les vecteurs sont coplanaires et ne forment donc pas une base de l'espace}}$

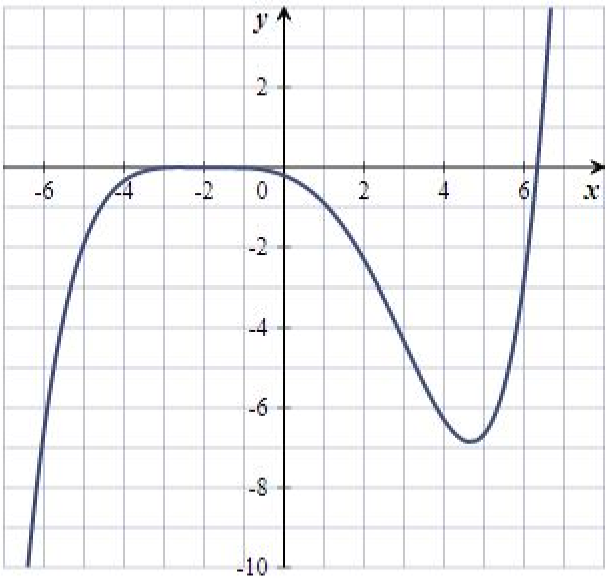
Exercice 3. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé. Les points $A(-2;0)$ et $B(3;0)$ appartiennent à la courbe.



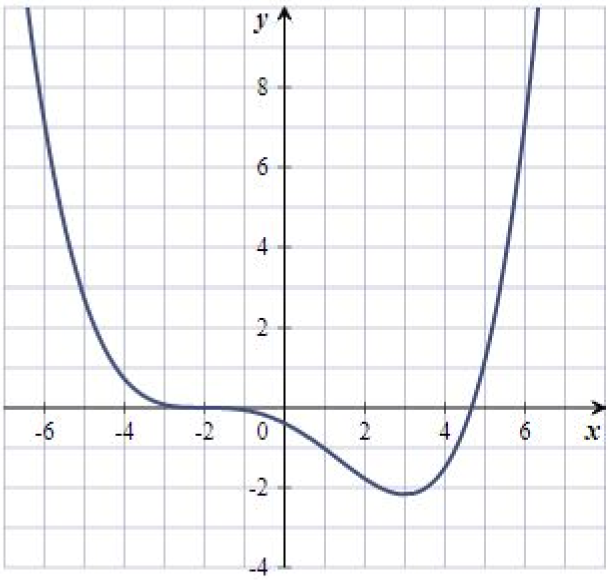
Chaque réponse sera justifiée.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f. Donner le tableau de variation de la fonction f'.
4. Une des deux courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f et l'autre celle de f'. Déterminer la courbe qui représente la fonction f et celle qui représente la dérivée f' .

Courbe 1



Courbe 2



Correction :

1. La courbe représentative de la fonction f'' nous donne le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 3$

donc $\boxed{\text{la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse 3}}$

2. D'après le tableau de signe de $f''(x)$, on peut en déduire que :

la dérivée seconde est négative sur $]-\infty;3]$, donc $\boxed{\text{la fonction est concave sur }]-\infty;3]}$

la dérivée seconde est positive sur $[3;+\infty[$, donc $\boxed{\text{la fonction est convexe sur } [3;+\infty[}$

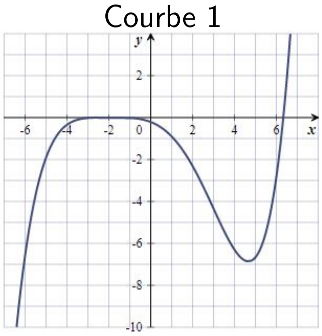
3. Les variations de la fonction f' se déduisent du signe de sa dérivée.

D'où le tableau de variation de la fonction :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f'		↘		↗	

4.

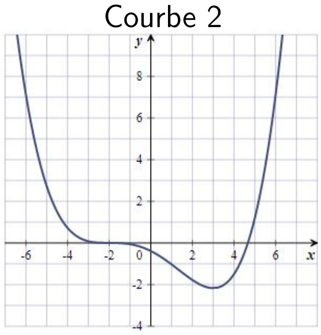
Courbe 1



La courbe 1 est la courbe représentative d'une fonction concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

C'est la seule des deux courbes susceptible de représenter la $\boxed{\text{fonction } f}$

Courbe 2



La courbe 2 est la courbe représentative d'une fonction décroissante sur $]-\infty;3]$ et croissante sur $[3;+\infty[$.

C'est la seule des deux courbes susceptible de représenter la $\boxed{\text{fonction dérivée } f'}$

Exercice 4. Déterminer le point d'inflexion sur la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x^2 + 7x$.

Correction :

Pour déterminer un point d'inflexion, il faut étudier le signe de la dérivée seconde de la fonction.
On a $f(x) = x^3 - 15x^2 + 7x$ alors e fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient :

- $f'(x) = 3x^2 - 30x$
- $f''(x) = 6x - 30$

Alors

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$6x-30$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 5$ d'où la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion d'abscisse 5
et $f(5) = 5^3 - 15 \times 5^2 + 7 \times 5 = -215$
Donc $\boxed{\text{le point d'inflexion sur la représentation graphique de la fonction } f \text{ est pour coordonnées } (5;-215)}$