Correction - Résolution de système d'équations

Exercice 1.

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x+4y=20 \\ 7x+8y=52 \end{cases}$

Correction

$$\begin{cases} 2x+4y=20 & (L_1) \\ 7x+8y=52 & (L_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=20 & (L_1) \\ 3x=12 & (L_2-2L_1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\times 4+4y=20 \\ x=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4y=20-8 \\ x=4 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4y=12 \\ x=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=4 \end{cases}$$

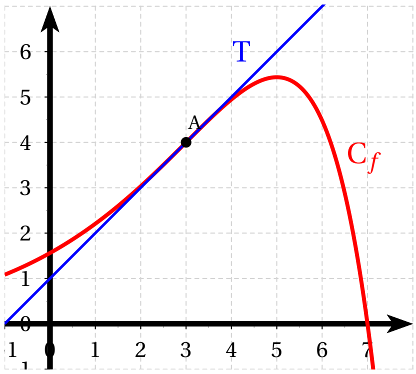
Donc $\boxed{S=\{(4\,;3)\}}$

Exercice 2.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;7]$ par

$f(x)=(ax+b)\,e^{0,5x-1,5}$ où a et b sont deux nombres réels.

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé et la droite T est tangente à la courbe au point A.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(3)$ et de $f'(3)$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;7]$ on a : $f'(x)=(0,5ax+a+0,5b)\,e^{0,5x-1,5}$.
3. Déterminer la valeur de a et de b.
4. Donner l'expression de $f(x)$.

Correction

1. Le point A a pour coordonnées $(3;4)$ d'où $\boxed{f(3)=4}$

   Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A d'où $\boxed{f'(3)=1}$

2. On a $f(x)=(ax+b)\,e^{0,5x-1,5}$

   La fonction f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables

   Alors $f=u\times v$: d'où $f'=u'v+v'u$ avec $\begin{cases} u(x)=ax+b \quad \text{et} \quad u'(x)=a \\ v(x)=e^{0,5x-1,5} \quad \text{et} \quad v'(x)=0,5e^{0,5x-1,5} \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $f'(x) = ae^{0,5x-1,5} + (ax+b) \times 0,5e^{0,5x-1,5}$

Ainsi, $\boxed{f'(x) = (0,5ax + a + 0,5b)\, e^{0,5x-1,5}}$

3. On doit déterminer la valeur de a et de b.

Comme $f(3) = 4$ avec $f(3) = (a \times 3 + b)\, e^{0,5\times 3-1,5} = (3a+b)\, e^{1,5-1,5} = 3a+b$

Et $f'(3) = 1$ avec $f'(3) = (0,5a \times 3 + a + 0,5b)\, e^{0,5\times 3-1,5} = (1,5a + a + 0,5b)\, e^{1,5-1,5} = 2,5a + 0,5b$

On en déduit que a et b sont solutions du système : $\begin{cases} 3a+b=4 & (\mathrm{L}_1) \\ 2,5a+0,5b=1 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$

$$\begin{cases} 3a+b=4 & (\mathrm{L}_1) \\ 2,5a+0,5b=1 & (\mathrm{L}_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a+b=4 & (\mathrm{L}_1) \\ 5a+b=2 & (2\mathrm{L}_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a+b=4 & (\mathrm{L}_1) \\ 2a\ = -2 & (\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3\times(-1)+b=4 \\ a\ = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=4+3 \\ a\ = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=7 \\ a\ = -1 \end{cases}$$

4. En remplaçant a et b par leurs valeurs,

on obtient $\boxed{f(x) = (-x+7)\, e^{0,5x-1,5}}$

Exercice 3.

Déterminer a et b pour la courbe C_f de $f(x) = \ln(ax+b)$ passe par le point $\mathrm{A}(2;0)$ et possède en A une tangente parallèle à la droite D d'équation $y = -2x+8$.

<u>Correction</u>

On a $f(x) = \ln(ax+b)$ alors $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$

On sait que la courbe C_f passe par le point $\mathrm{A}(2;0)$ d'où $f(2) = 0$

Et la tangente en A une tangente parallèle à la droite D $y = -2x+8$ d'où $f'(2) = -2$

Il faut résoudre le système $\begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f'(2) = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ln(a\times 2\ \ b) = 0 \\ \dfrac{a}{a\times 2+b} = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a = -2(2a+b) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a+4a+2b=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 5a+2b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 & (\mathrm{L}_1) \\ 5a+2b=0 & (\mathrm{L}_2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 & (\mathrm{L}_1) \\ a\ = -2 & (\mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4+b=1 \\ a\ = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ a\ = -2 \end{cases}$$

Donc $\boxed{f(x) = \ln(-2x+5)}$

Exercice 4.

Dans un repère de l'espace, soient les points $A(1~;~2~;~3)$, $B(3~;~0~;~1)$, $C(-1~;~0~;~1)$, $D(2~;~1~;~-1)$.
Les droites (AB) et (CD) sont elles sécantes ?

<u>Correction</u>

- Déterminer les équations paramétriques de (AB) et (CD).
  - La droite (AB) passe par le point $A(1~;2~;3)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}~(2~;-2~;-2)$

    Alors une représentation paramétrique de (AB) est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \quad \text{avec} t \in \mathbb{R} \\ z = 3-2t \end{cases}$
  - La droite (CD) passe par le point $C(-1~;0~;1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DC}~(3~;1~;-2)$

    Alors une représentation paramétrique de (CD) est : $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = t \quad \text{avec} t \in \mathbb{R} \\ z = 1-2t \end{cases}$
- Etude de la position relative de (AB) et (CD).
  - Les vecteurs $\overrightarrow{AB}~(2~;-2~;-2)$ et $\overrightarrow{DC}~(3~;1~;-2)$ ne sont pas colinéaires

    donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles
  - Alors
    * soit les deux droites sont sécantes, alors il existe un point qui appartient aux deux droites
    * soit les droites ne sont pas coplanaires

    Supposons qu'il existe un point d'intersection, alors ses coordonnées vérifient les 2 systèmes d'équations

    Attention il faut changer un t en k car ce n'est pas la même variable

    $$\begin{cases} 1+2t = -1+3k \\ 2-2t = k \\ 3-2t = 1-2k \end{cases} \iff \begin{cases} 2t-3k = -2 & (L_1) \\ 2t+k = 2 & (L_2) \\ 2t-2k = 2 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2t-3k = -2 & (L_1) \\ 4k = 4 & (L_2-L_1) \\ k = 4 & (L_3-L_1) \end{cases}$$

    Il est évident en regardant les lignes 2 et 3 que ce système n'a pas de solution.

    Donc $\boxed{\text{les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes, elles sont non coplanaires}}$

Exercice 5.

Dans un repère de l'espace, on sait que $\overrightarrow{AB}$ $(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$; $\overrightarrow{AC}(2\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{AD}(8\ ;\ 9\ ;\ 7)$.

Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Correction

Pour savoir si les points A, B, C et D sont coplanaires, il faut savoir si le vecteur $\overrightarrow{AD}$, par exemple, est combinaison linéaire des deux autres vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

C'est-à-dire, s'il existe deux réels a et b telque $\overrightarrow{AD} = a\ \overrightarrow{AB} + b\ \overrightarrow{AC}$

Alors $\begin{cases} 8 = a\times 1 + b\times 2 \\ 9 = a\times 0 + 3\times b \\ 7 = a\times 2 + b\times 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b=8 \\ 3b=9 \\ 2a+b=7 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2\times 3=8 \\ b=3 \\ 2a+3=7 \end{cases} \iff \begin{cases} a=8-6 \\ b=3 \\ 2a=7-3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ 2a=4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ a=2 \end{cases}$

D'où $\overrightarrow{AD} = 2\ \overrightarrow{AB} + 3\ \overrightarrow{AC}$, alors les vecteurs sont $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

Donc $\boxed{\text{les points A, B, C et D sont coplanaires}}$

Exercice 6.

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x+3y-2z=10 \\ 2x+4y-z=22 \\ 4x+2y+3z=34 \end{cases}$

Correction

$$\begin{cases} x+3y-2z=10 & (L_1) \\ 2x+4y-z=22 & (L_2) \\ 4x+2y+3z=34 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-2z=10 & (L_1) \\ -2y+3z=2 & (L_2-2L_1) \\ -10y+11z=-6 & (L_3-4L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-2z=10 & (L_1) \\ -2y+3z=2 & (L_2) \\ -4z=-16 & (L_3-5L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3y-2z=10 \\ -2y+3\times 4=2 \\ z=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y-2z=10 \\ -2y=-10 \\ z=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+3\times 5-2\times 4=10 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=10-15+8 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases}$$

Donc $\boxed{S = \{(3;5;4)\}}$