



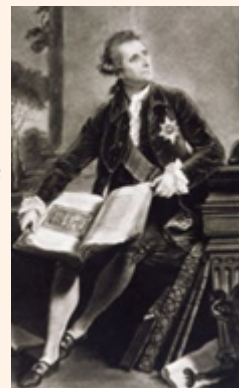
Géométrie vectorielle dans l'espace

Histoire des mathématiques

Le mot "*vector*" chez les Romains désignait le passager ou le conducteur d'un bateau ou d'un chariot. Au Moyen-Age et jusqu'à la Renaissance, le mot "*vecteur*" désigne le conducteur d'un bateau ou d'un véhicule.

Il faut attendre 1844 pour que le mathématicien anglais **William Hamilton** utilise le mot vecteur dans son sens actuel.

De nos jours, les vecteurs permettent d'améliorer considérablement la qualité d'une image numérique "vectorielle". Ces images sont "résistantes" au grossissement, moins lourdes en taille. Les formats d'images vectorielles sont par exemple PICT ou PDF.



I Vecteurs dans l'espace

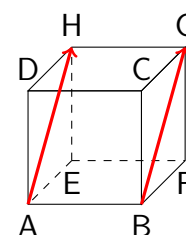
Les définitions et les calculs sur les vecteurs du plan peuvent être étendus à l'espace.

Définition 1 : Vecteurs de l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur et certaines propriétés.

- A tout couple de points de l'espace $(A; B)$, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ où $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme A en B.
- Un vecteur de l'espace $\overrightarrow{AB}$ est définie par une direction (celle de la droite (AB)), un sens (de A vers B) et une norme (la longueur AB).
- Des vecteurs qui ont même direction, même sens et même norme sont égaux.

Exemple : dans le cube ABCDEFGH, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car ABGH est un rectangle



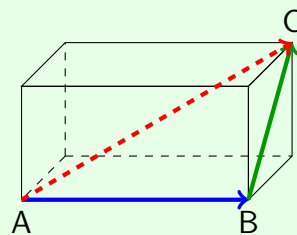
Propriété 1 : Propriétés des vecteurs

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ssi ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati)



Propriété 2 : Relation de Chasles

Si A, B et C sont trois points de l'espace alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

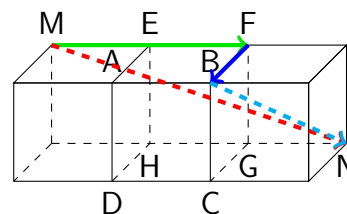


Définition 2 : Combinaison linéaire de vecteurs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k_1, \dots, k_n$ des nombres réels; $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + \dots + k_n\vec{u}_n$ est appelé **combinaison linéaire des vecteurs** $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.

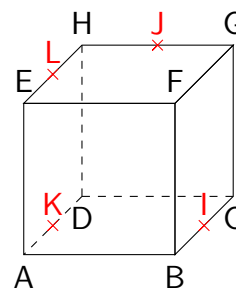
Exemple : Sur la figure $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}$ c'est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AG}$



Exercice Soit ABCDEFGH est un cube et I ; J ; K et L les milieux respectifs de [BC], [GH], [AD] et [EH].

Compléter les égalités vectorielles suivantes :

1. $\overrightarrow{A...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{E...}$
3. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A...}$
4. $\overrightarrow{...} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{L...} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$



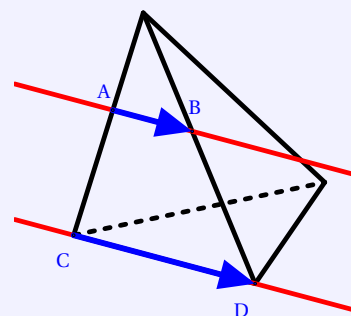
1. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$
3. $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AI}$
4. $\overrightarrow{LJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
5. $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JL}$



II Colinéarité et coplanarité de vecteurs

Définition 3 : Définition et propriétés de la colinéarité

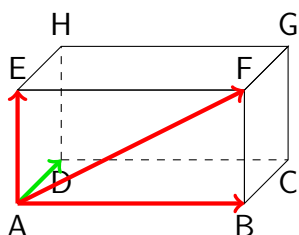
- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\vec{v} = k\vec{u}$ où k est un réel.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Les points A, B, et C sont alignés ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires



Définition 4 : Vecteurs coplanaires

Des vecteurs sont coplanaires ssi leurs représentants de même origine A ont leurs extrémités dans un même plan passant par A.

Exemple :



- Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AF}$ et $\vec{AE}$ sont coplanaires car les points A, B, E, F sont dans le même plan
- Les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ ne sont pas coplanaires car les points A, B, D, E ne sont pas dans le même plan

Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

Soient A et B deux points distincts.

Un point M appartient à la droite (AB) ssi il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{AB}$

$\vec{AB}$ s'appelle un vecteur directeur de la droite (AB).

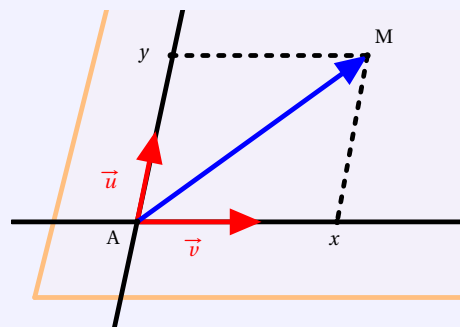
Remarque : Comme dans le plan, une droite peut être définie par un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul appelé vecteur directeur de la droite. On note cette droite $(A; \vec{u})$



Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec x, y des réels quelconques est un plan passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'appellent des vecteurs directeurs du plan (ABC).



Remarque : Un plan est déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires. On le note $P(A, \vec{u} ; \vec{v})$.

Démonstration :

- Directe : Soient B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Alors pour tout point $M \in (ABC)$, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

- Réciproquement, soient x et y deux réels et M le point défini par $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Le point R défini par $\overrightarrow{AR} = x\vec{u}$ appartient à la droite (AB) donc au plan (ABC)

Comme $\overrightarrow{RM} = y\vec{v}$, M appartient à la parallèle à (AC) passant par R, celle-ci est incluse dans (ABC)

Donc M appartient au plan (ABC).

Propriété 3 : (admise)

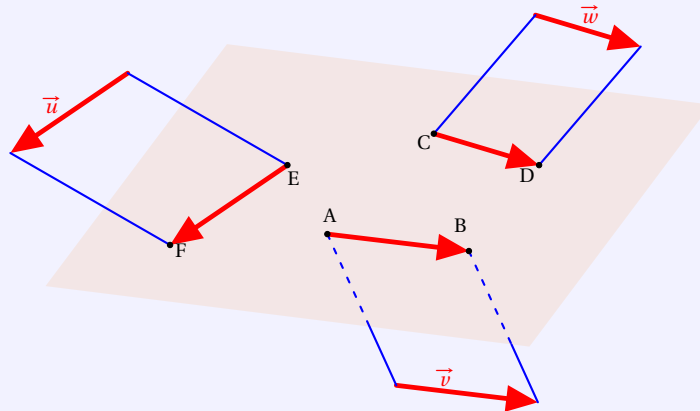
Soient A, B et C trois points non alignés.

Un point M appartient au plan (ABC) ssi il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$



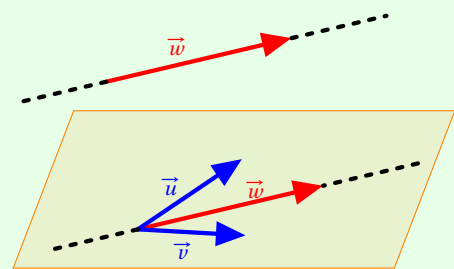
Définition 5 : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété 4 : Propriété de la coplanarité (admise)

- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
- Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires ssi il existe $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique que $a = b = c = 0$



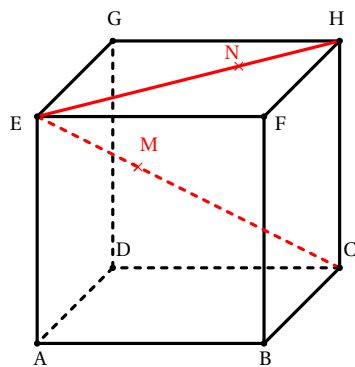
Démonstration :

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
 - si le vecteur $\vec{u}$ est nul, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et avec $a = 1$, $b = c = 0$, on a $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
 - sinon, il existe k réel tel que $\vec{v} = k\vec{u}$,
en posant $a = k$, $b = -1$ et $c = 0$, on obtient $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$
- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires
Considérons les points A, B, C et M tels que $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ et $\vec{AM} = \vec{w}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $M \in (ABC)$
donc ssi il existe des réels x et y tels que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$
donc tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ avec $a = x$, $b = y$, $c = -1$



Exercice : On considère les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$.

1. Construire la figure.
2. Démontrer que les points C, E et M sont alignés.
3. Démontrer que les points E, F, H et N sont coplanaires.



1.

$$2. \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$

et

$$\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CM}.$$

Donc $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires et les points C, E et M sont alignés.

$$3. \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{FB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG}.$$

Donc $N \in (EFG)$ et les points E, F, H et N sont coplanaires.



III Positions relatives de droites et de plans

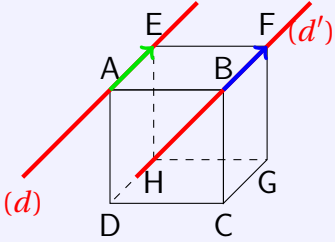
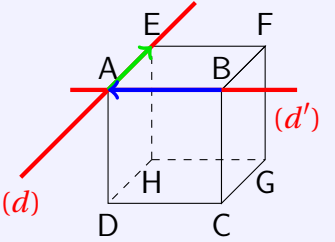
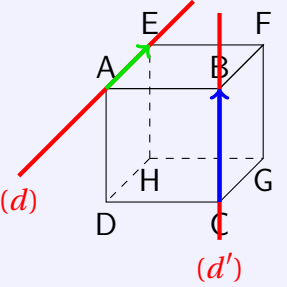
Définition 6 : Droites coplanaires

Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan

Positions relatives de deux droites

Soient $d_1(A, \vec{u})$ et $d_2(B, \vec{v})$ deux droites de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors d_1 et d_2 sont parallèles
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors
 - si elles ont un point commun, elles sont sécantes
 - si elles n'ont pas de point commun, elles sont non coplanaires

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites parallèles	Droites sécantes	
		



Définition 7 : Droite parallèle à un plan

Soit $d(A, \vec{u})$ une droite de l'espace et $P(C, \vec{v}, \vec{w})$ un plan de l'espace.

La droite (d) est parallèle au plan P si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires alors (d) et P sont sécants en un point.

Droite et plan parallèles		Droite et plan sécants
$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires		$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires

Positions relatives de deux plans

- Deux plans sont parallèles ssi deux vecteurs directeurs de l'un sont vecteurs directeurs de l'autre.
- Les deux plans sont confondus si en plus ils ont un point commun
- Deux plans sont sécants lorsqu'ils ne sont pas parallèles et leur intersection est une droite.

Plans parallèles	Plans sécants (selon une droite)

Remarque : deux plans sont parallèles ssi tout vecteur directeur de l'un est combinaison linéaire des vecteurs directeurs de l'autre.



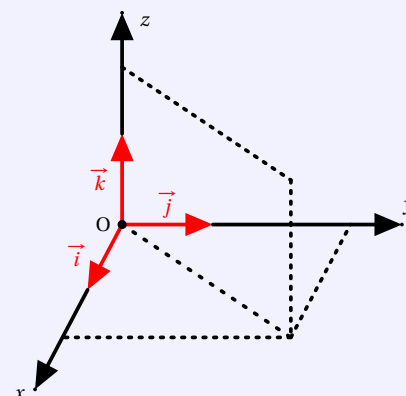
IV Repérage dans l'espace

Dans le plan, on peut décomposer tout vecteur sur deux vecteurs non colinéaires.

Dans l'espace, on peut décomposer tout vecteur sur trois vecteurs non coplanaires.

Définition 8 :

- Un repère de l'espace est un quadruplet $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ avec O un point appelé origine du repère et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
- Pour tout point M de l'espace, il existe un triplet $(x ; y ; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; ce triplet s'appelle les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
- On note $M(x ; y ; z)$ x s'appelle l'abscisse ; y s'appelle l'ordonnée et z s'appelle la cote.
- On dit que le repère est orthonormé si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$



Démonstration :

- Existence : Soient O et A tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$
 Soit P le plan passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$
 Comme $\vec{k}$ n'est pas coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$
 Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{k}$ coupe le plan P en un point S .
 Puisque $\overrightarrow{OS}$ est un vecteur du plan P , il existe un couple $(x ; y)$ tel que $\overrightarrow{OS} = x\vec{i} + y\vec{j}$
 Alors A et S sont deux points de la droite (d) donc il existe z tel que $\overrightarrow{SA} = z\vec{k}$
 Donc $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
- Unicité : Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
 Alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$
 Ce qui donne, comme $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, $x = x' ; y = y' ; z = z'$

Propriétés

Soient $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ deux vecteurs dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace.

- $\vec{u} = \vec{v}$ est équivalent à $x = x' ; y = y' ; z = z'$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y' ; z + z')$
- Si $k \in \mathbb{R}$, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky ; kz)$



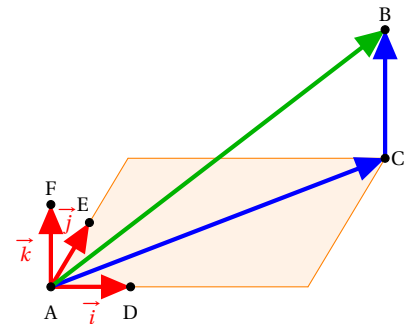
Propriétés

Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace rapporté au repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

- $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Si le repère est orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Démonstration :

- $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB}$
or $-\vec{OA}(-x_A ; -y_A ; -z_A)$
donc $\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$
- $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$ donc $\vec{OI} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ d'où le résultat
- $\vec{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$;
 - le repère (A, D, E) est orthonormé dans le plan (ADE)
donc $AC^2 = x^2 + y^2$; $\vec{CB} = z\vec{k}$
 - le triangle ACB est rectangle en C donc $AB^2 = AC^2 + CB^2$
or $CB^2 = z^2$
d'où $AB^2 = x^2 + y^2 + z^2$



Exercice : Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(-4; 2; 3)$, $B(1; 5; 2)$, $C(0; 5; 4)$ et $D(-6; -1; -2)$.

1. Démontrer que $\vec{AD} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.
2. Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?

1. $\vec{AD}(-2 ; -3 ; -5)$. D'autre part :

$\vec{AB}(5 ; 3 ; -1)$ donc $2\vec{AB}(10 ; 6 ; -2)$ et

$\vec{AC}(4 ; 3 ; 1)$ donc $-3\vec{AC}(-12 ; -9 ; -3)$.

Ainsi $2\vec{AB} - 3\vec{AC}(-2 ; -3 ; -5)$. Donc $\vec{AD} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$

2. On en déduit que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires, et que les points A, B, C et D sont coplanaires.



V Systèmes d'équations paramétriques

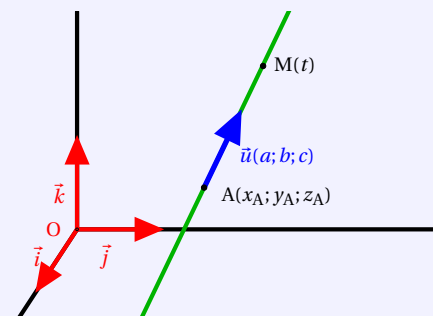
Représentation paramétrique d'une droite

Soit D une droite passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$

$$\text{Alors le système d'équations, avec } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \\ z = z_A + c t \end{cases}$$

définit une représentation paramétrique de cette droite D

Le réel t s'appelle le paramètre du point M .



Démonstration :

Soit $M(x ; y ; z)$ alors $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A ; y - y_A ; z - z_A)$

M appartient à D ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \vec{u}$

$$\text{donc ssi : } \begin{cases} x - x_A = a t \\ y - y_A = b t \\ z - z_A = c t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = a t + x_A \\ y = b t + y_A \\ z = c t + z_A \end{cases}$$

Exemple : Déterminer une représentation paramétriques de la droite (AB) avec $A(1;2;3)$ et $B(4;4;1)$

On peut en déduire le vecteur : $\overrightarrow{AB} (4 - 1 ; 4 - 2 ; 1 - 3)$

$\overrightarrow{AB} (3 ; 2 ; -2)$

Alors les deux systèmes suivants sont des représentations paramétriques de la droite (AB)

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 4 + 2k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$



Représentation paramétrique d'un plan

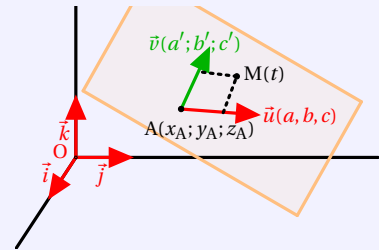
Soient $x_0 ; y_0 ; z_0 ; a ; b ; c ; a' ; b' ; c'$ des réels tels que $(a ; b ; c)$ et $(a' ; b' ; c')$ ne soient pas proportionnels.

Le système d'équations, avec $(t ; t') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} x = x_0 + ta + t'a' \\ y = y_0 + tb + t'b' \\ z = z_0 + tc + t'c' \end{cases}$$

définit une représentation paramétrique d'un plan P passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a ; b ; c)$ et $\vec{v}(a' ; b' ; c')$

Le couple $(t ; t')$ est le couple de paramètres du point M .



Démonstration : Soit $M(x ; y ; z)$ alors $\vec{AM}$ a pour coordonnées $(x - x_A ; y - y_A ; z - z_A)$

M appartient au plan P ssi il existe deux réels t et t' tels que : $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ donc

$$\begin{cases} x - x_A = ta + t'a' \\ y - y_A = tb + t'b' \\ z - z_A = tc + t'c' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

Exemple : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soient les points $A(2;3;-1)$ et $B(1;-3;2)$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) :

Un vecteur directeur de (AB) est $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$, soit $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- Soit $M(x; y; z)$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Alors $z = 0$ car M appartient au plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
D'où $-1 + 3t = 0$ soit $t = \frac{1}{3}$



$$\text{Et donc } \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \frac{1}{3} \\ y = 3 - 6 \times \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} \\ y = 3 - 2 \\ z = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{3} \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Le point M a donc pour coordonnées M $(\frac{5}{3}; 1; 0)$.