CHAPITRE 4 Continuité

Manuel p. 108-135

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

L'objet de ce chapitre est d'aborder la notion de continuité d'une fonction qui est un prolongement de la notion de limite, notion fondamentale en analyse. On abordera aussi les applications de la continuité sur la détermination de la limite d'une suite et sur la résolution d'équation.

Nous étudierons en particulier comment déterminer la limite d'une suite récurrente convergente à travers le théorème du point fixe et comment montrer d'existence d'une solution d'une équation à travers des théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection.

Pour cela, dans un premier temps, on définira, de façon intuitive, la continuité d'une fonction en un point et comment montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle.

Dans un second temps, on montrera que l'on peut déduire la continuité de la dérivabilité, que l'on peut déterminer la limite d'une suite récurrente convergente et que la monotonie associée à la continuité permet de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation.

Objectifs

- → **Étudier la continuité d'une fonction et la dérivabilité en un point.**
- → **Déterminer la limite d'une suite.**
- → **Trouver le nombre de solutions d'une équation.**
- → **Utiliser une fonction auxiliaire.**

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 109

1. Calculer une limite en un point

a) $\lim\limits_{x\to-1} x^2 - 3x + 5 = 9$

b) $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{5x}{2-x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3}{(x-1)^2} = +\infty$

2. Interpréter une courbe

a) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -1$

La fonction f n'est pas dérivable en 2, car sa courbe admet un point anguleux en 2.

b) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = 0{,}5$ et $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = 1{,}5$

La fonction g n'admet donc pas de limite en 2.

Si la fonction g n'a pas de limite en 2, elle n'est pas continue en 2 et donc pas dérivable en 2.

3. Déterminer les variations d'une fonction

a) $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

b) $f'(x) = \dfrac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$\dfrac{1}{3}$	↗	1	↘	0

c) $f'(x) = (2x + 5)e^x$

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-2e^{-\frac{5}{2}}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4. Montrer la convergence d'une suite

1) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge.

2) Réponse **c)**.

5. Comprendre une fonction en langage Python

$f(1) = 3$; $f(0,9) = 1,9$ et $f(1,1) = 4,19$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 4$.

Activités p. 110

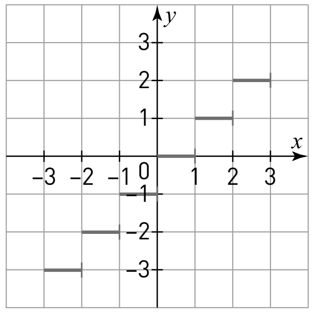
1 Découvrir la fonction partie entière

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Donner un exemple simple de fonction discontinue pour appréhender la notion de continuité à travers ce qu'elle n'est pas.

A. Représentation

1. $E(2,3) = 2$, $E(4) = 4$, $E(-1,7) = -2$, $E(-3) = -3$.

2.



B. Continuité

1. $\lim\limits_{x\to2^-} E(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to2^+} E(x) = 2$.

La fonction partie entière n'admet pas de limite en 2 car les limites à gauche et à droite ne sont pas égales.

2. Si $a \notin \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to a} E(x) = E(a)$.

3. La partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les réels non entiers. La partie entière n'est pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$.

2 Comprendre le lien entre continuité et dérivabilité

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Utiliser les fonctions valeur absolue et racine carrée connues pour faire aborder continuité et dérivabilité.

A. Une première fonction et valeur absolue

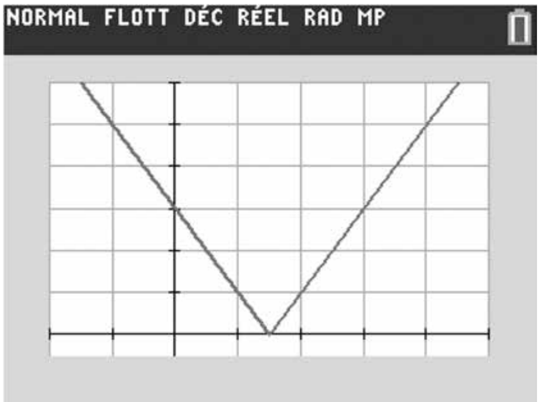
1. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) = 0$

f admet une limites en $\dfrac{3}{2}$ car les limites à gauche et à droite sont égales.

2. a) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} \dfrac{f(x) - f\left(\dfrac{3}{2}\right)}{x - \dfrac{3}{2}} = -2$ et $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} \dfrac{f(x) - f\left(\dfrac{3}{2}\right)}{x - \dfrac{3}{2}} = 2$.

b) La fonction f n'est pas dérivable en $\dfrac{3}{2}$ car les limites du taux d'acroissement à gauche et droite ne sont pas égales.

3.



La courbe n'admet pas de saut en $\frac{3}{2}$ donc admet une limite et la courbe admet un point anguleux en $\frac{3}{2}$ donc non dérivable.

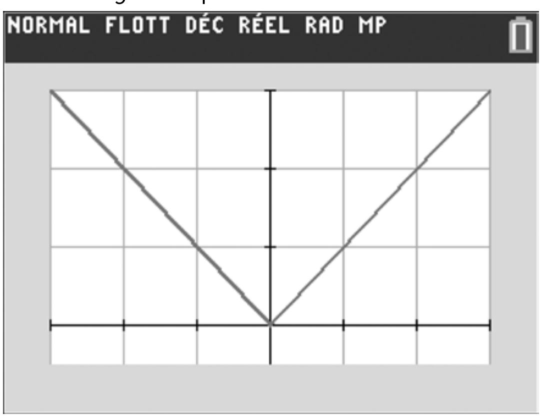
B. Une seconde fonction et racine carrée

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$

La fonction g admet une limite en 0.

2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1$.

La fonction g n'est pas dérivable en 0.

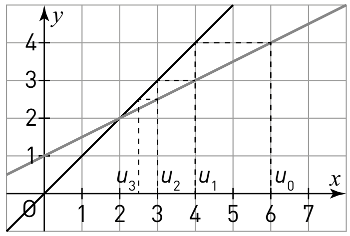


Mêmes constatations.

3 Utiliser les notions de limite et fonction associée

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** À travers deux exemples de suites, utiliser la fonction associée pour faire le lien entre la limite d'une suite et la limite d'une fonction.

1. a)



b) On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 2.

2. On trouve $a = 2$.

3. a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4$.

b) $v_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

d) La limite l est donc la solution de $f(x) = x$.

4 Résoudre une équation

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Comprendre l'importance de la continuité dans la recherche de solution d'une équation.

1. a) Pour $k = 0$, (E_1) a deux solutions car $f(x)$ change deux fois de signe et (E_2) a une solution car $g(x)$ ne change qu'une fois de signe.

b) Si $k < -1$, (E_1) a une solution.

Si $1 \leqslant k < 5$, (E_1) a deux solutions.

Si $k = 5$, (E_1) a une solution.

Si $k > 5$, (E_1) n'a pas de solution.

c) Si $k < -2$, (E_2) n'a pas de solution.

Si $-2 \leqslant k \leqslant \frac{3}{2}$, (E_2) a une solution.

Si $k > \frac{3}{2}$, (E_2) n'a pas de solution.

2. a) La fonction g n'est pas continue en 2 car la courbe possède un « saut » en 2.

L'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par g est :

$[1 ; 2] \cup]3 ; 4]$.

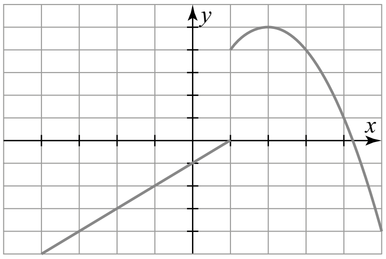
b) Si $k < 2$, (E_1) a trois solutions.

Si $k = 2$, (E_1) a deux solutions.

Si $k > 2$, (E_1) a une solution.
Si $k \leqslant 2$, (E_2) a une solutions.
Si $2 < k \leqslant 3$, (E_2) n'a pas de solution.
Si $k > 3$, (E_2) a une solution.

À vous de jouer p. 113

1. 1.



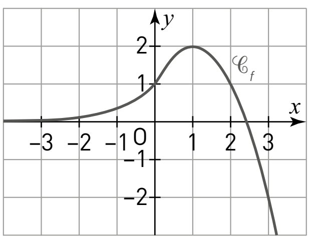
On peut conjecturer que la fonction est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. Si $x \neq 1$, la fonction f est continue car un polynôme est continue sur son ensemble de définition.

Si $x = 1$, la fonction f est discontinue car :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x-1=0\\ \lim\limits_{x\to1^+} -x^2+4x+1=4\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{Pas de}\\ \text{limite en 1.}\end{array}$$

2. 1.



On peut conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

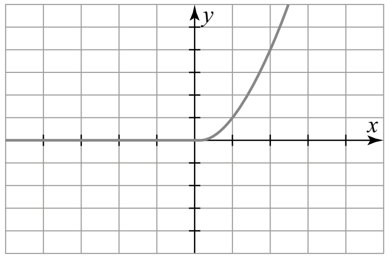
2. Si $x \neq 0$, la fonction f est continue comme fonction élémentaire.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} e^x=1\\ \lim\limits_{x\to0^+} -x^2+2x+1=1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$$

La fonction f est continue en 0.

3. 1. La fonction en continue en 0 car $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$.

2.



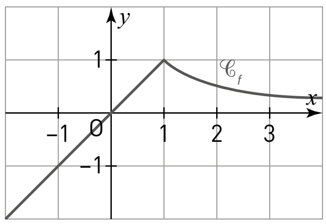
La fonction f est dérivable en 0 carla courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 0$.

4. 1. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x=1\\ \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x}=1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$$

la fonction f est continue en 1.

2.



la fonction n'est pas dérivable en 1 car la courbe possède un point anguleux en 1.

5. La fonction associée à la suite est :

$$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+8}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composition de fonctions continues. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie :

$$\frac{1}{3}\sqrt{x^2+8} = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8} = 3x \overset{x\geqslant0}{\Leftrightarrow} x^2+8 = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm1$$

la suite (u_n) étant de termes positifs : $\ell = 1$.

6. La fonction associée à la suite est :

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composition de fonctions continues. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2$$

comme la suite est minorée par 1 : $\ell = 1$.

7. 1. La fonction est dérivable sur $[0\ ;+\infty[$.

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4$ ou $x_2 = 2$
- le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme.

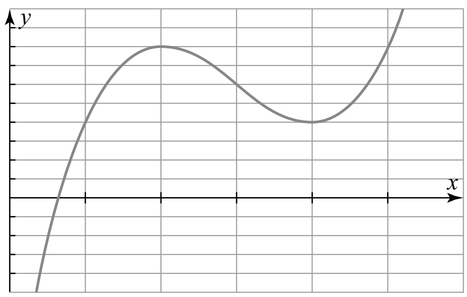
x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-12	$\nearrow$	8	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) • Sur $[0\ ;2]$, la fonction f est continue (dérivable), strictement croissante et change de signe car $f(0) = -12$ et $f(2) = 8$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

• Sur $]2\ ;+\infty[$, $f(x)$ est minorée par 4, donc ne peut s'annuler.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;+\infty[$.

b) On constate que la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses.



8. 1. $f(x) = \sqrt{x} - 2$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\dfrac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Sur $[0\ ;4]$ et sur $]4\ ;+\infty[$, la fonction f est continue, monotone et change de signe donc sur ces deux intervalle, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution respectivement α et β.

$f(1) = -\dfrac{1}{3}$ donc $f(1) < 0$ et donc $\alpha \in [0\ ;1]$.

b) $\alpha \approx 0{,}69$

9. 1.

```
def u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=9/(6-u)
    return u
```

n	10	50	100	1 000
$u(n)$	2,739	2,942	2,970	2,997

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 3.

2. a) $f(x) = \dfrac{9}{6 - x}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{6\}$ donc continue sur $[1\ ;3]$.

b) D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie l'équation :

$$\frac{9}{6-x} = x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

donc $\ell = 3$.

10. 1.

```
def u(n):
    u=5
    for i in range(1,n+1):
        u=(1+3*u)/(3+u)
    return u
```

On peut remplir le tableau de valeurs suivant.

n	5	10	50	100
$u(n)$	1,043	1,001	1,000	1,000

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 1.

2. a) [ERRATUM] La première édition du manuel utilisait l'intervalle [1 ; 3].

$f(x) = \dfrac{1+3x}{3+x}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ donc continue sur $[1\ ;5]$.

b) D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie l'équation :

$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

comme $\ell \geqslant 1$, donc $\ell = 1$.

11. 1. On obtient : $f'(x) = 12g(x)$

avec : $g(x) = x^3+x^2+2x+1$.

2. a) On étudie les variations de g.

$g'(x) = 3x^2 + 2x + 2$

$\Delta = 4 - 24 = -20$ donc $g'(x)$ ne s'annule pas.

La fonction g est alors strictement croissante, continue et change de signe car $g(-1) = 0$ et $g(0) = 1$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in [-1\ ;\ 0]$.

b) À l'aide d'un balayage sur la calculatrice :

$$-0{,}57 < \alpha < -0{,}57$$

c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

12. 1. On obtient : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

avec : $g(x) = x^2e^x - 1$.

2. a) On étudie les variations de g.

$$\forall x > 0,\ g'(x) = x(x+2)e^x \geqslant 0$$

La fonction g est alors strictement croissante, continue et change de signe car $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;+\infty[$.

b) À l'aide d'un balayage sur la calculatrice :

$$0{,}70 < \alpha < 0{,}71$$

c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Exercices apprendre à démontrer p. 120

Pour s'entraîner

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = 0$.

La fonction f est continue en 1.

$$\lim_{h\to0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0^+} -1 - \frac{1}{2}h = -1$$

La fonction f n'est pas dérivable en 1.

Exercices calculs et automatismes p. 121

13. Continuité en un point

Une courbe représente une fonction continue si à une abscisse donnée on peut associer un unqiue point sur la courbe et si la courbe n'admet pas de saut. Les courbes **a)** et **c)** représentent une fonction continue.

14. Continuité et fonction par morceaux

Faux car $f(-1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x+1}{x+2} = 0$.

15. Continuité et dérivabilité

1. La fonction f est continue en 2 car la courbe n'a pas de “saut”.

2. La fonction f n'est pas dérivable en 2 car la courbe admet deux demi-tangentes différentes (point anguleux).

16. Continuité et programme Python

Vrai, car si $x \neq -1$, la fonction est continue car composée de fonctions continues et

$f(-1) = -1 + 2 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} x^2 = 1$.

Donc la fonction f est continue en -1.

17. Continuité et suite

b) car la limite ℓ doit vérifier : $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$ et $\ell \geqslant 0$.

18. Théorème des valeurs intermédiaires

1. a)

2. d)

19. Théorème de la bijection

1. La courbe représente une fonction et n'a pas de saut, donc la courbe représente une fonction continue.

2. a) Dans [1 ; 5], la courbe est continue, strictement décroissante et coupe l'axe des abscisses donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \approx 4$.

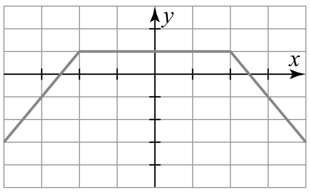
b) Pour tout réel de [–1 ; 1], la courbe est au dessus de l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

c) Dans I la courbe coupe 4 fois l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions.

Exercices d'application p. 122

Conjecturer et montrer la continuité

20. 1.



On peut donc conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $\mathbb{R}\setminus\{-2 ; 2\}$ la fonction f est continue car composées de fonctions élémentaires.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} 2x+5=1\\ \lim\limits_{x\to-2^+} 1=1\end{array}\right\}\ f \text{ est continue en } -2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} 1=1\\ \lim\limits_{x\to2^+} -2x+5=1\end{array}\right\}\ f \text{ est continue en } 2$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

21. 1. On a :

$$\begin{cases} f(x)=0{,}5x & \text{si } x<100\\ f(x)=0{,}4x & \text{si } 100\leqslant x<200\\ f(x)=0{,}35x & \text{si } x\geqslant 200\end{cases}$$

2. La fonction f n'est pas continue en 100 et en 200, en effet :

$$\lim_{x\to100^-} f(x)=50 \text{ et } f(100)=40$$
$$\lim_{x\to200^-} f(x)=80 \text{ et } f(200)=70.$$

Ailleurs la fonction f est continue.

22. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)=1$

La fonction f est continue en 1.

23. [ERRATUM] La première édition du manuel utilise un ensemble de définition sur $[-2 ; +\infty[$, et la fonction f définie par :

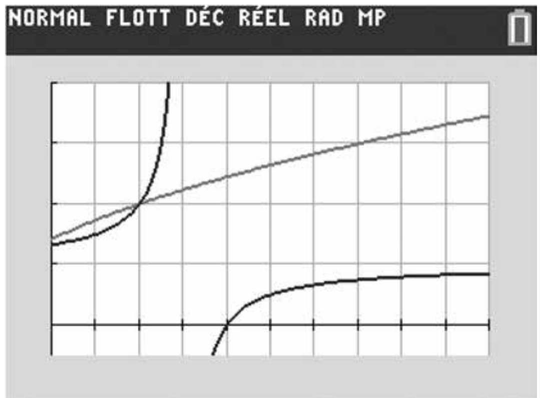
$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+2} & \text{si } x<k\\ f(x)=\dfrac{x-4}{x-3} & \text{si } x\geqslant k\end{cases}$$

La **nouvelle édition** du manuel mentionne l'ensemble de définition $[0 ; +\infty[$ et la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-4}{x-3} & \text{si } x<k\\ f(x)=\sqrt{x+2} & \text{si } x\geqslant k\end{cases}$$

La correction ci-dessous correspond à la nouvelle édition.

1.

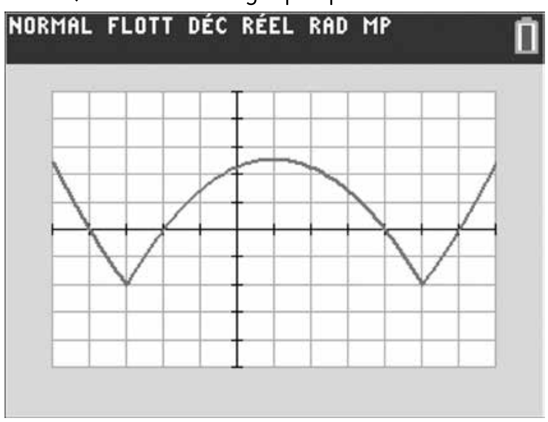


La fonction f est continue si le changement de forme intervient pour l'abscisse du point d'intersection des deux courbes soit pour $k = 2$.

2. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=f(2)=2.$

La fonction est continue pour $k = 2$.

24. 1. a) On obtient le graphique suivant.



b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Il faut déterminer les limites aux changements de forme :

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -2$ et $f(3) = -2$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -2$ et $f(5) = -2$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction f n'est pas dérivable en –3 et en 5 car la courbe admet en ces deux points un point anguleux. Ailleurs la fonction f est dérivable.

Étudier la continuité et la dérivabilité en un point

25. 1. La continuité du volume vient que l'ajout de liquide étant continue, son volume aussi.

La fonction volume ne sera pas dérivable en 60, car la volume étant proportionnel à la hauteur, le coefficient de proportionnalité change en 60.

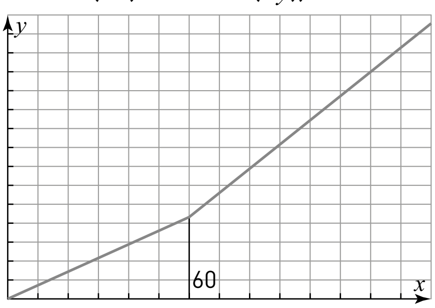
2. a) 1 l = 1 dm^3, pour avoir le volume en litre, il faut exprimer toutes les mesures en dm.

$$\begin{cases} V(x) = 3{,}6x & \text{si } x \leqslant 60 \\ V(x) = 6{,}4x - 168 & \text{si } 60 < x \leqslant 140 \end{cases}$$

b) On a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 60^-} 3{,}6x = 216 \\ \lim\limits_{x \to 60^+} 6{,}4x - 168 = 216 \end{array}\right\} V \text{ est continue en 60.}$$

Si l'on trace la fonction V sur la calculatrice, on observe que la courbe n'a pas de tangente en 60 (unités 10 sur (Ox) et 50 sur (Oy)).

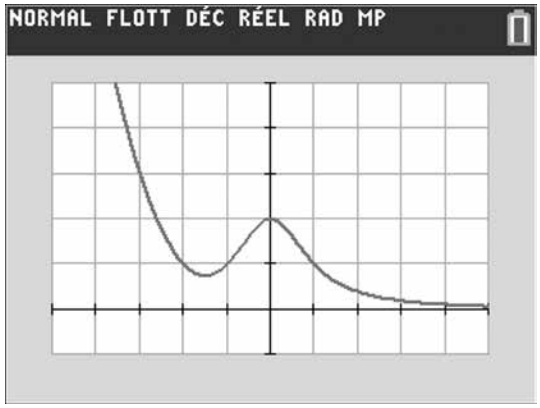


26. 1. On a :

$$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1 \text{ et } f(1) = 1.$$

La fonction f est continue en 1. Ailleurs la fonction est continue comme composée de fonctions de référence.

2. a)



b) La courbe semble ne pas avoir de points anguleux, on peut conjecturer que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

27. [ERRATUM] La première édition mentionne que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + x + \dfrac{1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La **nouvelle édition** du manuel utilise :

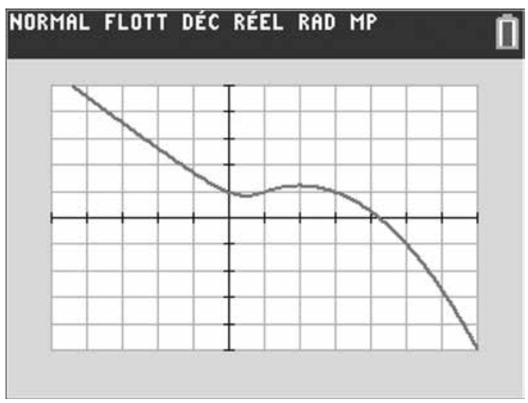
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} \quad \text{si } x > 1.$$

La correction ci-dessous correspond à la nouvelle édition.

1. On a : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ et $f(1) = 1$

La fonction f est continue en 1. Ailleurs la fonction est continue comme composée de fonctions de référence.

2. a)



b) La fonction semble dérivable car la courbe n'admet pas de point anguleux.

3. a) Soit g la première fonction.

$$g'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

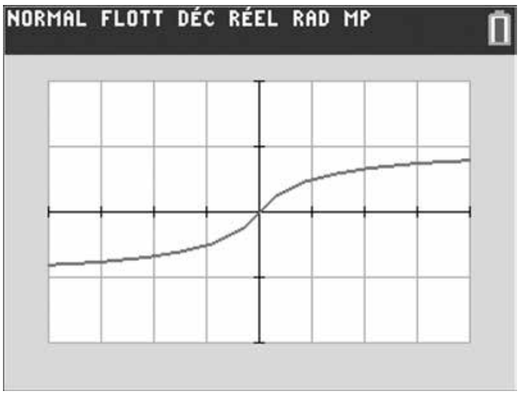
Soit h la seconde fonction.

$$h'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

b) $g'(1) = h'(1) = -\frac{1}{2}$

Les nombres dérivée de g et h en 1 sont égaux donc la fonction f est dérivable en 1.

28. 1. La fonction f est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) 

b) La fonction f semble dérivable sur $\mathbb{R}$ car la courbe n'admet pas de point anguleux.

c) Si $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{1 - x}$ et si $x \geqslant 0$, $f(x) = \frac{x}{1 + x}$.

d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ car composée de fonctions dérivables.

e) On calcule les limites du taux d'accroissement en 0 :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{1 - h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{1 + h} = 1$$

la fonction est donc dérivable en 0.

Déterminer la limite d'une suite

29. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \overset{\times 2x}{\Leftrightarrow} x^2 + 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

On obtient = $\pm\sqrt{2}$, comme la suite (u_n) est minorée par 0, on a alors $\ell = \sqrt{2}$.

30. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = \frac{1}{4}(1 + x^2).$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$\frac{1}{4}(1 + x^2) = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$$

On obtient $x = 2 \pm \sqrt{3}$, comme la suite (u_n) est décroissante et u_0=3, on a alors $\ell = 2 - \sqrt{3}$.

31. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = \mathrm{e}\sqrt{x}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$\mathrm{e}\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x(x - \mathrm{e}^2) = 0.$$

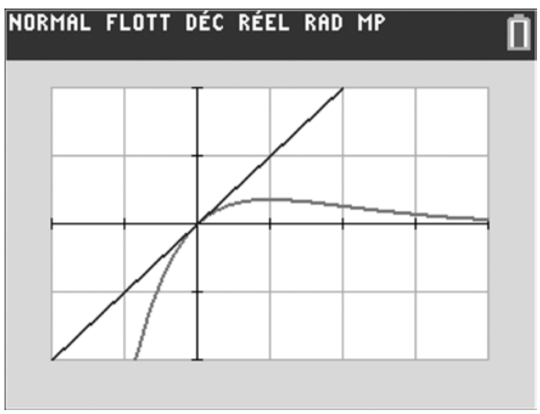
On obtient $x = 0$ ou $x = \mathrm{e}^2$, comme la suite (u_n) est minorée par 6, on a alors $\ell = 0$.

32. 1. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$x\mathrm{e}^{-x} = x \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ d'où $\ell = 0$.

2. 

Il y a bien un seul point d'intersection en 0.

Trouver le nombre de solutions d'une équation

33. • Sur $[0 ; 3]$, $f(x) \leqslant -2$, donc $f(x)$ ne peut s'annuler.

• Sur $[3 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe car $f(3) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

34. 1. Sur $]-\infty ; 2]$ et sur $]2 ; +\infty[$ la fonction f est continue et monotone et $m \in]0 ; 2[$ appartient à l'intervalle image, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur chacun de ces intervalles.

2. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant e^2$ donc l'équation $f(x) = m$ avec $m \in]e^2 ; +\infty[$ n'admet pas de solution.

35. 1. La fonction f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = 2$ a trois solutions.

3. a) L'équation $f(x) = 4$ ne peut avoir de solution que dans $[-1 ; +\infty[$.

Sur $[-1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et 4 est compris entre $f(-1)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 4$ admet un unique solution α.

b) $\alpha \approx 0$ à l'unité près.

36. 1. $f'(x) = 2x^4 - 8 = 2(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

La fonction f' est du signe de $x^2 - 2$ et s'annule pour $x = \pm\sqrt{2}$. On a alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	≈ 6	↘	≈ -12	↗	$+\infty$

2. Sur $[2 ; 3]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(2) = -6{,}2$ et $f(3) = 70{,}2$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

3. On a : $2{,}24 < \alpha < 2{,}25$.

37. 1. $f(x) = -4 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 4) = 0$

$x = 0$ ou $x = 1 \pm \sqrt{5}$

2. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ ou $x = 2$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\approx 2{,}5$	↘	-12	↗	$+\infty$

3. Sur $]-\infty ; 2[$, $f(x) \leqslant 2{,}5$ donc l'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution.

Sur $[2 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et 4 appartient à l'intervalle image donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution.

4. Il n'existe aucune valeur de k car la fonction f varie de $-\infty$ à $+\infty$.

38. 1. D'après le tableau de variations, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. On utilise la continuité et la monotonie de la fonction sur des intervalles bien choisis.

k	Nombre de solutions
$k < -4$	Aucune solution
$k = -4$	Une solution
$-4 < k < -\pi$	Deux solutions
$k = -\pi$	Trois solutions
$-\pi < k \leqslant \sqrt{2}$	Quatre solutions
$\sqrt{2} < k < 2$	Trois solutions
$k = 2$	Deux solutions
$k > 2$	Une solution

39. 1. La fonction f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x = x(4x^2 + 9x + 2)$

$= x(x + 2)(4x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\approx 1{,}02$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. L'équation (E) admet 2 solutions, en effet :

sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $\left[-2\,;-\frac{1}{4}\right]$, la fonction f est continue, monotone et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur ces deux intervalles.

Sur $\left]-\frac{1}{4}\,;\ +\infty\right[$, $f(x) \geqslant 1$ donc elle ne peut s'annuler.

Exercices d'entraînement p. 124

Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

40 1. a) f est continue sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ car f est une fonction rationnelle.

b) $\dfrac{2x+1}{x+2} = x \Leftrightarrow 2x + 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 1$

On obtient alors $x = \pm 1$.

c) $f'(x) = \dfrac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$:

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1.$$

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème des suites monotones, la suite(u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur ℓ et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = x$, comme $\ell \geqslant 0$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = 1$.

41. 1. a) f est continue sur I car f est un polynôme.

b) $1{,}4x(1 - x) = x \Leftrightarrow x(0{,}4 - 1{,}4x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2}{7}$

c) $f'(x) = 1{,}4(1 - 2x)$

Pour tout $x \in [0\ ;\ 0{,}5]$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = 0{,}126$.

On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < 0{,}5$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0{,}5$, montrons que

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0{,}5$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0{,}5$$

$\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(0{,}5)$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0{,}35 \Rightarrow$

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0{,}5$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0{,}5$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0,5, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur I et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = x$, comme $\ell \geqslant 0{,}1$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = \frac{2}{7}$.

42. 1. a) f est continue sur I car f est une fonction rationnelle.

b) $\dfrac{3x+2}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

On obtient alors $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

c) $f'(x) = \dfrac{3(x+1) - 1(3x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) [ERRATUM] Sur la première édition du manuel, l'énoncé donne $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$.

Sur la **nouvelle édition** du manuel, l'énoncé utilise $-0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
La correction ci-dessous correspond à la nouvelle édition.

Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = -0,5$ et $u_1 = 1$.
On a donc : $-0,5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$. La proposition est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $-0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$, montrons que $-0,5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$

$-0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$

$\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(-0,5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(3)$

$\Rightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{11}{4}$

$\Rightarrow -0,5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$

la proposition est héréditaire.
Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.
La fonction f est continue sur I et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = x$, comme $\ell \geqslant -0,5$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = 1+\sqrt{3}$.

43. 1. a) f est continue sur I car f est un polynôme.
b) $2x(1 - x) = x \Leftrightarrow x(1 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

c) $f'(x) = 2(1 - 2x)$
Pour tout $x \in [0\ ;\ 0,5]$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

$0 \leqslant x \leqslant 0,5 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(0,5)$

$\Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 0,5$

d) Si $x \leqslant 0,5$, f est croissante et si $x > 0,5$ f est décroissante.
2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,18$
On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < 0,5$. La proposition est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0,5$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0,5$:

$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0,5$

$\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(0,5)$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0,5$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 0,5$

la proposition est héréditaire.
Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0,5$.
b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0,5. D'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.
La fonction f est continue sur I et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = x$, comme $\ell \geqslant 0,1$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = 0,5$.

Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

44. A. 1. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- Le signe de $g'(x)$ est le signe du trinôme.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

2. Sur $[1\ ;\ 3]$, g est continue car dérivable, strictement croissante et change de signe car $g(1) = -6$ et $g(3) = 14$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
3. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B. 1. $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x(3x^3 - 3x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$

2. Limites en ±∞ : $f(x)=\dfrac{x^2(x+2)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{x+2}{1-\dfrac{1}{x}}$

Par quotient, on trouve :
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Limite en ±1 : on détermine le signe de x^2-1.

x	0		−1		1		+∞
x^2-1		+	0	−	0	+	

On obtient alors les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

3. Le signe de $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.

x	−∞		−1		0		1		α		+∞
$f'(x)$		+	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
f	−∞	↗	+∞ ‖ −∞	↗	0	↘	−∞ ‖ +∞	↘	$f(\alpha)$	↗	+∞

45. A. 1. $g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

x	−∞		0		1		+∞
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
g	−∞	↗	−1	↘	−2	↗	+∞

2. Sur [1 ; 2], g est continue car dérivable, strictement croissante et change de signe car $g(1)=-2$ et $g(2)=3$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

3.

```
def f(x):
    return 2*x**3 - 3*x*x - 1
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
        b=c
    else:
        a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

On trouve alors : $1{,}676<\alpha<1{,}677$ après 10 itérations.

4. Si $x<\alpha$, $g(x)<0$ et si $x>\alpha$, $g(x)>0$.

B. 1. $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2. $f'(x)=\dfrac{-1(1+x^3)-3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2}=\dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

3.

x	−1		α		+∞
$f'(x)$	‖	−	0	+	
f	+∞	↘	$f(\alpha)$	↗	0

46. 1. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2. $f'(x)=\dfrac{-3x^2(x+2)+x^3}{(x+2)^2}=\dfrac{-2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

3.

x	−2		+∞
$f'(x)$	‖	−	
f	+∞	↘	−∞

4. Sur I la fonction f est continue, monotone et à valeur dans ℝ. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α.
$f(-1{,}5)=6{,}75$ et $f(0)=0$ donc $\alpha\in\,]1{,}5\,;0[$.

5.

```
def f(x):
    return-x**3/(x+2)-2
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-4):
        c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
        b=c
    else:
        a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

On trouve alors : $-1{,}1795<\alpha<-1{,}1794$ après 14 itérations.

47. A. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

2. $g'(x)=2e^x+2>0$

La fonction g est croissante.

3. a) Sur $\mathbb{R}$ g est continue, croissante et à valeur dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) $g(0) = -5$ et $g(1) = 2e - 5 > 0$ donc $\alpha \in [0\ ;\ 1]$.
On trouve $\alpha \approx 0{,}940$.

4. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + e^{x}(2x - 5) = g(x)e^{-x}$

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \dfrac{-2\alpha + 7}{2}$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\alpha} = \frac{2\alpha - 5}{2\alpha - 7}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7} \Rightarrow f(\alpha) \approx -1{,}901$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x - 5)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}(2x - 5) = 0^-$

La droite D est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. La courbe est en dessous de l'asymptote en $+\infty$.

C. $A_n\ (n\ ;\ 0)$, $B_n\ (n\ ;\ 2n - 5)$, $C_n\ (n\ ;\ f(n))$.

1. $\overrightarrow{C_nB_n}\ (0\ ;\ 2n - 5 - f(n))$ et $\overrightarrow{A_nB_n}(0\ ;\ 2n - 5)$

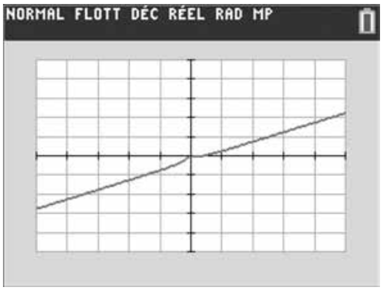
On a donc $u_n = \dfrac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5} = \dfrac{e^{-n}(2n - 5)}{2n - 5} = e^{-n}$.

2. La suite (u_n) est géormétrique de raison $q = e^{-1}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-1})^n = 0$ car $-1 < e^{-1} < 1$.
La suite (u_n) converge vers 0.

Limite et continuité

48. 1.



La fonction semble continue en 0.

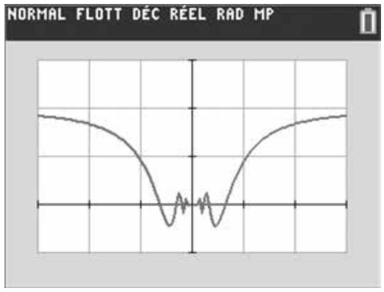
2. Par composition : $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

Par quotient : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ par quotient : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$.

La fonction est continue en 0.

49. 1.



La fonction semble continue en 0.

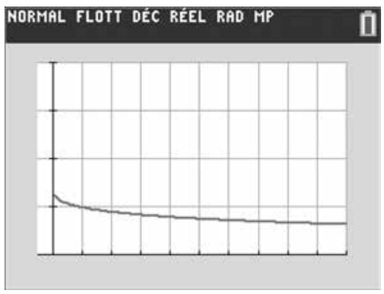
2. $|f(x)| \leqslant |x|$ et $\lim\limits_{x\to0} |x| = 0$.

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.
La fonction est continue en 0.

50. 1. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}$ si $x \neq 9$

$\lim\limits_{x\to9} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} = \dfrac{1}{6}$. La fonction f est continue en 9.

2. On obtient la courbe suivante.



51. 1. $f(x) = e^{x} \times \dfrac{x}{e^{x} - 1}$ par produit $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$

La fonction est continue en 1.

52. 1. En utilisant la quantité conjuguée, on obtient la forme demandée.

2. a) Par quotient on trouve $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

b) $m = 0$

53. 1. Vue la courbe, la fonction ne semble pas continue.

2. $f(x) = \dfrac{x^{40} + 200x^{20} + 10\,000 - 10\,000}{x^{20}}$

$f(x) = x^{20} + 200$ si $x \neq 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ la fonction est continue en 0.

3. La représentation chaotique proche de 0 s'explique par les erreurs d'arrondis.

54. 1. largeur = hauteur

$$2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$$

$$\Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$$

2. a) $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$

b) $f(x) = 0 \overset{\times e^x}{\Leftrightarrow} (e^x)^2 - 1 - 4e^x = 0$

c) $X^2 - 4X - 1 = 0$ d'où $\Delta = 20$
la racine positive est alors

$x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$

$x_1 = \ln(2 + \sqrt{5}$

3. a)

x	0	$\ln(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0 ↘	$f(\ln(2+\sqrt{5}))$	↗ $+\infty$

b) Si $0 < x < x_1$, $f(x) < 0$ ne peut s'annuler.
Sur $[x_1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, croissante et change de signe donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
$f(2) \approx -2{,}48$ et $f(3) \approx 6{,}14$ donc $\alpha \in [2 ; 3]$.

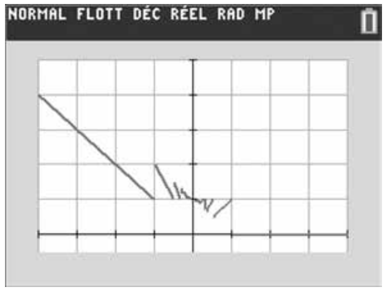
c)

```
def f(x):
    return exp(x)+exp(-x)-4*x-2
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
        b=c
    else:
        a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

On trouve : $2{,}466 < \alpha < 2{,}4667$.

4. En posant $x = \dfrac{t}{39}$, on retrouve la solution α.
La hauteur h de l'arche est :
$h = 2t = 2 \times 39\alpha = 78\alpha$
$2{,}466 < \alpha < 2{,}467 \Rightarrow 192{,}34 < h < 192{,}43$.

55. 1.



On peut conjecturer que la fonction est continue en 0 bien qu'en d'autres points elle ne l'est pas.

2. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} - 1 < E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$

si $x > 0$, on a : $1 - x < f(x) \leqslant 1$
et si $x < 0$, on a : $1 \leqslant f(x) < 1 - x$
par le théorème des gendarmes à droite et à gauche de 0, on déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ la fonction est bien continue en 0.

Exercices bilan p. 127

56. Fonction et suite (1)

1. $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$
La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

Donc $\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{2} \approx 4{,}37$.

3. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{11}{3}$.
On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \alpha$.
La proposition est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que
$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \alpha$, montrons que
$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \alpha$:
$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \alpha$

$\overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(\alpha)$

$\Rightarrow 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \alpha$

$\Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \alpha$

la proposition est héréditaire.
Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par α donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge.

4. a) $S_0 = 1$, $S_1 \approx 3{,}67$, $S_2 \approx 8{,}96$

b) Comme la suite est croissante et $u_1 > 3$, si $n \geqslant 1$ alors $u_n > 3$, on en déduit alors que : $S_n > 1 + 3(n-1)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 3(n-1) = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

57. Fonction et suite (2)

A. 1. $g'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$ sur $I = [0\,;+\infty[$.

g croissante sur I.

2. $g(0) = 0$, comme g est croissante, $g(x) \geqslant 0$ sur I.

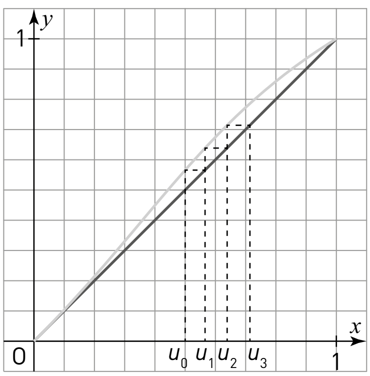
3. On en déduit que sur I, $e^x \geqslant x + 1 \Rightarrow e^x > x$.

B. 1. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ comme f est croissante, $x \in [0\,;1] \Rightarrow f(x) \in [0\,;1]$.

2. a) $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1 - xe^x - x^2}{e^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

b) Sur $[0\,;1]$, $\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x} \geqslant 0$ donc (D) est en dessous de $\mathscr{C}_f$.

C. 1.



2. Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 \approx 0{,}56$.

On a donc : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 < 1$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$, montrons que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$:

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$

$\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(1)$

$\Rightarrow 0{,}56 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème des suites monotone, la suite (u_n) est convergente vers ℓ.

D'après le théorème du point fixe, f étant continue sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$ qui admet deux solutions 0 et 1 et comme $\ell \geqslant 0{,}5$, la suite (u_n) converge vers 1.

58. Résolution d'équation

1. a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1$.

L'équation $g(x) = 0$ admet $x = 1$ comme unique solution.

b) Comme la fonction g est croissante pour $x > 0$.

Si $x < 1$, $g(x) < 0$ et si $x > 1$, $g(x) > 0$.

2. a) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} = \dfrac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$

c) $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) En divisant l'égalité (E) par $\sqrt{x}$, on trouve $f(x = \pi)$.

b) D'après le tableau de variations, sur $]0\,;1[$ et $[1\,;+\infty[$, la fonction f est continue, monotone et π appartient aux intervalles images donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \pi$ admet sur ces intervalles une unique solution notées α et β.

c) Par balayage sur une calculatrice, on trouve : $0{,}73 < \alpha < 0{,}74$ et $1{,}34 < \beta < 1{,}35$

59. Fonction irrationnelle

Affirmation 1 : Vraie

Soit $g(x) = x^3 - 3x + 3$, on a alors

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Sur $]-1\,;+\infty[$, $g(x) > 0$ donc ne peut s'annuler.

Sur $]-\infty\,;-1]$, la fonction g est continue, croissante et change de signe, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha < 0$.

Affirmation 2 : Vraie

Comme g est strictement positive sur $]\alpha\,;+\infty[$, la fonction f est dérivable sur cet intervalle.

Affirmation 3 : Faux

Comtre exemple avec $m = 1$

$f(-2) = 1$ et $f(1) = 1$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet au moins deux solutions.

60. Fonction auxiliaire

A. 1. Par produit et composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. En développant $g(x)$ et avec les limites de références, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$.

3. $g'(x) = (x + 3)e^{x-4}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-2	↘	$\approx -2{,}001$	↗	$+\infty$

4. Sur $]-\infty\,;-3[$, $g(x) < 0$ donc ne peut s'annuler.

Sur $[-3\,;+\infty[$, la fonction g est continue, croissante et change de signe, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

5. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

6. $g(4) = 4$ donc $\alpha \in [-3\,;4]$

```
def f(x):
    return(x+2)*exp(x-4)-2
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

On trouve en rentrant dicho(−3,4) :

$$3{,}069 < \alpha < 3{,}070$$

B. 1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - e^{x-4}) = 0$

D'où $x = 0$ ou $x = 4$.

2. $f'(x) = 2x - e^{x-4}(-2x - x^2) = -xg(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)e\alpha^{-4} = 2 \Leftrightarrow e\alpha^{-4} = \dfrac{2}{\alpha + 2}$

D'où :

$$f(\alpha) = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{\alpha + 2} = \frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$$

61. Portail

A. 1. Immédiat la fonction est paire.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. $f'(x) = -\dfrac{b}{8}\left(\dfrac{1}{b}e^{\frac{x}{b}} - \dfrac{1}{b}e^{-\frac{x}{b}}\right) = -\dfrac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right)$

3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-2		0		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$f(-2)$	$\nearrow$	$\dfrac{-b+9}{4}$	$\searrow$	$f(2)$

$$S\left(0\,;\frac{-b+9}{4}\right)$$

B. 1. Comme $S(0\ ;\ 2)$ on a : $b = 1$.

2. On a : $f(x) = -\frac{1}{8}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) + \frac{9}{4}$.

$f(2) \approx 1{,}31$

Sur $[0\ ;\ 2]$, la fonction f est continue, décroissante et 1,5 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution α.

Par balayage on trouve : $\alpha \approx 1{,}76$.

3. La masse d'un ventail vaut : $20\int_0^{1,8} f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{1,8} f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{8} + \frac{9}{4}x\right]_0^{1,8} \approx 3{,}31$$

La masse vaut alors : 66,2 kg.

Le client va donc décider de motoriser son portail.

62. Population de grenouilles

1. $P'(t) = \dfrac{18\,000\mathrm{e}^{-0,5x}}{(0{,}4 + 3{,}6\mathrm{e}^{-0,5x})^2} > 0$

La fonction P est croissante.

2. Par quotient et composition : $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 2\,500$.

3. $P(0) = 250$. Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction P est continue, croissante et 2 000 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection, l'équation $P(t) = 2\,000$ admet une unique solution t_0.

Par balayage sur une calculatrice, on trouve : $t_0 \approx 7{,}2$.

4. C'est au cours de l'année 2025 que la population de grenouilles dépassera 2 000.

63. Plant de maïs

1. $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = a$ donc $a = 2$.

$$h(0) = \frac{a}{1+b} \Leftrightarrow \frac{2}{1+b} = 0{,}1 \Leftrightarrow b = 19$$

2. a) Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction h est continue, croissante et 1,5 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(t) = 1{,}5$ admet une unique solution t_0.

b)
```
def f(t):
    return 2/(1+19*exp(-0,04*t))
t=0
while f(t)<=1.5 :
    t+=1
print(t)
```

On trouve $t = 102$. Au 102e jour le plant de maïs a une hauteur supérieure à 1,5 m.

Préparer le BAC Je me teste

p. 130

64. A et **D** **65. A**

66. B **67. B**

68. C **69. C**

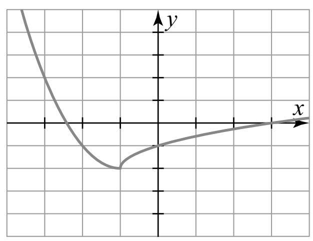
70. B

Préparer le BAC Je révise

p. 131

71. Ensemble de continuité

1. On obtient la courbe suivante.



On peut conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $x \neq -1$, la fonction est continue car composée de fonctions continues.

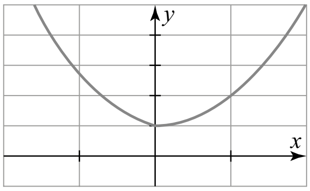
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -1^-} x^2 + 2x - 1 = -2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{x+1} - 2 = -2\end{array}\right\} \begin{array}{c} f \text{ est continue} \\ \text{en } -1\end{array}$$

72. Dérivabilité en 0

1. On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x} = 1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1=1\end{array}\right\} \begin{array}{c} f \text{ est continue}\\ \text{en } 0.\end{array}$$

2. On obtient :



La non dérivabilité en 0 s'explique par l'absence de tangente en 0.

73. Limite par récurrence

1. f est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition et donc sur [0 ; 9].

2. a) On montre facilement par récurrence l'encadrement.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 9, donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $\ell \leqslant 9$.

c) La fonction f est continue sur [0 ; 9] et la suite (u_n) est convergente vers ℓ, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation

$f(x) = x \qquad x = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} \approx 5{,}19$ ou $x = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2} \approx -0{,}19.$

On en déduit alors que $\ell = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

74. Étude de fonction

1. On a :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$(x+1)(x^3-x^2+3x+1) = x^4+2x^2+2x+1$$

On en déduit alors que :

$$f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$$

2. a) Pour $x \neq 0$, on a :

$$g(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Par produit, on déduit :

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1 \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty\end{cases}$$

b) $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

$\Delta = -32 < 0$ donc $g'(x)$ n'a pas de racine.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$donc la fonction g est croissante.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$				$+$			
g	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue, strictement croissante et change de signe car $g(-1) = -4$ et $g(0) = 1$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha \in [-1 ; 0]$.

d) On trouve $-0{,}296 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}295$

3. a) si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

b) $f'(x)$ est du signe de $(x+1)g(x)$.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		$-$		$+$		$+$	0
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	0

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

75. Deux solutions

1. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x+3 = +\infty$

b) $f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$, $x < 0$, $f'(x) < 0$ et $x > 0$, $f'(x) > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Sur]–∞ ; 0] et sur [0 ; +∞[la fonction f est continue, strictement monotone et change de signe donc sur chacun de ces intervalles l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

b) $f(1) \approx -1,28$ et $f(2) \approx 2,38$ donc $\beta \in [1 ; 2]$.

Par balayage, on trouve : $\beta \approx 1,5$ au dixième.

76. Unique solution

A. 1. On a les équivalences pour ≠ 0 :

$$e^x = \frac{1}{x} \overset{\times x}{\Leftrightarrow} xe^x - 1 = 0 \overset{\div e^x}{\Leftrightarrow} x - e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

2. a) Par somme, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. De plus $f(0,5) \approx -0,11$ et $f(1) \approx 0,63$ donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

d) Comme f est croissante si $x \in [0 ; \alpha]$, $f(x) < 0$.

B. 1. a) On a les équivalences pour $x \neq 0$

$$e^x = \frac{1}{x} \overset{\times x}{\Leftrightarrow} xe^x = 1 \overset{+x}{\Leftrightarrow} xe^x + x = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x(e^x + 1) = x + 1 \overset{\div(e^x+1)}{\Leftrightarrow} \frac{x+1}{e^x+1} = x \Leftrightarrow g(x) = x$$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{1(1 + e^x) - e^x(1 + x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x(e^{-x} - x)}{(1 + e^x)^2} = -\frac{e^x f(x)}{(1 + e^x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$, on en déduit que le signe de $g'(x)$ est celui de $-f(x)$.
Comme sur $\in [0 ; \alpha]$, $f(x) < 0$ alors $g'(x) > 0$.
La fonction g est croissante sur $[0 ; \alpha]$.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < \alpha$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \alpha$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \alpha$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \alpha \overset{g \nearrow}{\Rightarrow} g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) < g(\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < \alpha$$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par α, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers ℓ.

De plus, la fonction g est continue sur $[0 ; \alpha]$, d'après le théorème du point fixe, $\ell = \alpha$.

c)

```
from math import *
def u(n):
    u=0
    for i in range(1,n + 1):
        u=(1+u)/(1+exp(u))
    return u
```

Pour $n = 4$, on trouve alors $u_4 \approx 0,567\,143$.

Exercices vers le supérieur p. 132

77. Fonction définie par une relation fonctionnelle

1. a) On prend $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$.
On prend $y = -x$ et comme $f(0) = 0$, on trouve $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est impaire.

b) Initialisation : $n = 0$, on a $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$
La proposition est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(nx) = nf(x)$, montrons que $f[(n + 1)x] = (n+1)f(x)$.

$$f[(n + 1)x] = f(nx + x) = f(nx) + f(x)$$

De plus,

$$f[(n + 1)x] = nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x)$$

la proposition est héréditaire.
Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

c) Comme la fonction f est impaire,
$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$.

d) $f(x) = f\left(n \times \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x)$

e) $q \in \mathbb{Q}$, donc $q = \frac{k}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$f(qx) = f\left(k \times \frac{x}{n}\right) = kf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{k}{n}f(x) = qf(x)$$

f) $f(q) = f(q \times 1) = qf(1) = \lambda q$

2. a) D'après la continuité de la fonction f :

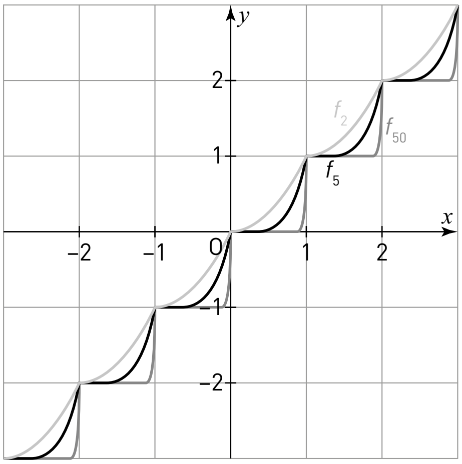
$f(x) = f(\lim_{n\to+\infty} q_n) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda q_n$

$f(x) = \lambda \lim_{n\to+\infty} q_n = \lambda x.$

b) Les fonctions f vérifiant cette relation constituent l'ensemble des fonctions linéaires.

78. Somme et continuité

1. a)



b) Si $x \notin \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue donc la fonction f_n est continue par composition de fonctions continues.

Si $x = k \in \mathbb{Z}$, calculons les limites à gauche et à droite de k et la valeur en k :

$\lim_{x\to k^-} f_n(x) = (k-1) + [k-(k-1)]^n = k$

$\lim_{x\to k^+} f_n(x) = k + + (k-k)^n = k$

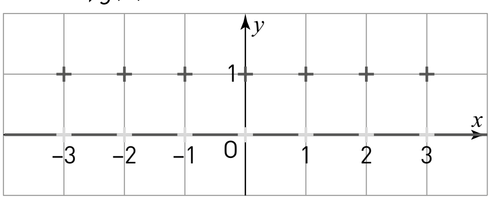
et $f_n(x) = f_n(k) = k$

la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Si $x \notin \mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k < x < k+1$

on a alors $E(x) = k$ et $E(1-x) = -k$ donc $g(x) = 0$.

Si $x = k \in \mathbb{Z}$, $g(k) = k + 1 - k = 1$.



La fonction g n'est pas continue pour $x \in \mathbb{Z}$

3. La somme de deux fonctions discontinues peut être continue comme les fonctions f_n ou discontinue comme la fonction g.

79. Produit de fonctions et continuité

1. Supposons que fg est continue en a

$$\lim_{x\to a} fg(x) = fg(a) = f(a)g(a) \quad (1)$$

comme la fonction f est continue en a, la limite à gauche de fg vaut :

$$\lim_{x\to a^-} fg(x) = f(a)\lim_{x\to a^-} g(x)$$

de (1) et comme $f(a) \neq 0$ on en déduit que

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = g(a)$$

même raisonnement avec la limite à droite :

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = g(a)$$

donc g est continue en a. Contradiction.

2. a) On calcule les limites à gauche et à droite de 0.

$$\lim_{x\to 0^-} fg(x) = \lim_{x\to 0^+} x \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} fg(x) = \lim_{x\to 0^+} x \times 0 = 0$$

Comme $fg(0) = 0$, la fonction fg est continue en 0.

b) On calcule la limite en 0.

$$\lim_{x\to 0} fg(x) = \lim_{x\to 0^+} x \times \frac{1}{x} = 1$$

Comme $fg(0) = 0$, la fonction fg est discontinue en 0.

c) Il faut que la fonction g soit bornée au voisinage de a, on peut alors avec le théorème des gendarmes, montrer que la limite en a de fg est nulle.

3. Soit les fonctions f et g définies sur $[1 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = E(x) \\ g(x) = \dfrac{1}{E(x)} \end{cases}$$

les fonctions f et g sont discontinues en 2 mais fg est continue en 2 : $\lim_{x\to 2} fg(x) = 1 = fg(2)$

soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

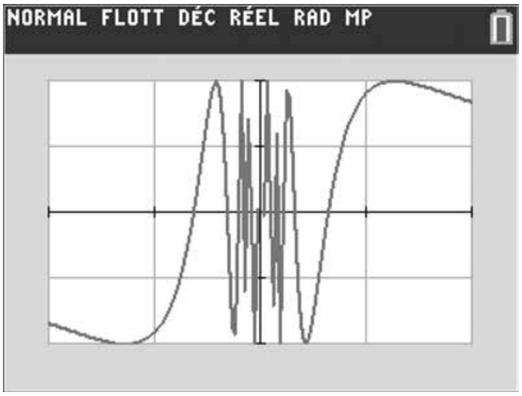
$$\begin{cases} f(x) = E(x) \\ g(x) = \dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0 \end{cases}$$

les fonctions f et g sont discontinues en 2 ainsi que :

$\lim_{x\to 0^-} fg(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$ et $fg(0) = 0$.

80. Discontinuité

1. On a la courbe suivante sur [–1 ; 1].



La fonction f semble non continue en 0, la courbe oscillant de plus en plus vite entre –1 et 1 plus x se rapproche de 0.

2. On pose $X = \frac{1}{x}$ donc si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$.

L'idée est de s'approcher vers l'infini de deux façons avec les suites (u_n) et (v_n).

$$\lim_{n\to+\infty} \sin u_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sin v_n = 1$$

Ce qui prouve que f n'a pas de limite en 0^+.
La fonction f n'est pas continue en 0.

81. Valeurs intermédiaires

1. a) Initialisation : $n = 0$,

$$a \leqslant k \leqslant b \Leftrightarrow a_0 \leqslant k \leqslant b_0$$

la proposition est initialisée.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_n \leqslant k \leqslant b_n$, montrons que $a_{n+1} \leqslant k \leqslant b_{n+1}$:

si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant k$ d'après HR $a_n \leqslant k \leqslant f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant$

donc $a_{n+1} \leqslant k \leqslant b_{n+1}$

si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$ d'après HR $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leqslant k \leqslant b_n$

donc $a_{n+1} \leqslant k \leqslant b_{n+1}$
la proposition est héréditaire.
Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$

b) Pour la suite (a_n) deux cas de figure :
soit $a_{n+1} - a_n = 0$

soit $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geqslant 0$

la suite (a_n) est croissante.

même chose pour la suite (b_n)

soit $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$

soit $b_{n+1} - b_n = 0$

la suite (b_n) est décroissante.

2. $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1}$ deux cas de figure :

soit $u_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2}u_n$

soit $u_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2}u_n$

$\forall x \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = b - a$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

3. D'après **1.** $a_n \leqslant k \leqslant b_n$, d'après le théorème de gendarmes $k = c$, comme f est continue sur $[a ; b]$, d'après le théorème du point fixe, $c = f(c)$ donc $k = f(c)$. Cela démontre le théorème des valeurs intermédiaires.

82. Méthode de la sécante

A. Le principe

1. (AB) : $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$

a' correspond à $y = 0$, on a alors :

$$a' = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

2. a) Par construction : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b$
la suite (a_n) est majorée par b.
Comme f est croissante,
$f(a_n) < 0$ et $f(b) > f(a)$ et comme $b > a_n$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = -\frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n) > 0$$

la suite (a_n) est croissante.

b) La suite (a_n) est croissante et majorée par b d'après le théorème des suite monotones, la suite (a_n) est convergente vers ℓ.

La fonction f étant continue, par passage à la limite de : $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$ on en déduit que $f(\ell) = 0$.

B. Application

1. $f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$ $\forall\, x \in [0\ ;\ 1]$, $x \geqslant 0$ et $3x - 8 < 0$ donc $f'(x) \leqslant 0$.

La fonction f est décroissante, continue et $f(0) = 1$ et $f(1) = -2$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\ ;\ 1]$.

2. a)

```
from math import*
def f(x):
    return x**3-4*x*x+1
def secante(a,b,p):
    while f(a)>=10**(-p):
        a=a-(b-a)/(f(b)-f(a))*f(a)
    return a
```

b) Avec `secante(0,1,3)` on trouve $\alpha \approx 0.537$ à 10^{-3} près.

83. Relation fonctionnelle

Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$.

On a alors en utilisant la relation fonctionnelle :

$$f^2(b) - f^2(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(b) - f(a)][f(b) + f(a)] = 0$$

comme $f(a) \neq f(b)$ alors $f(b) + f(a) = 0$

$f(a) \neq 0$ sinon on aurait $f(b) = f(a) = 0$.

La fonction f est continue sur $[a\ ;\ b]$, et f change de signe sur $[a\ ;\ b]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = 0$. On a alors $f^2(c) = 0$ contradiction.

84. Zéros d'une famille de fonctions

1. $$f'(x) = x^{n-1}\,[(n + 1)x - 2n]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{2n}{n+1}$$

Si $x \geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de $(n + 1)x - 2n$, donc

Si $x \in \left[0\,;\frac{2n}{n+1}\right]$, $f'(x) \leqslant 0$, f est décroissante.

2. Si $n \geqslant 2 \overset{+n}{\Leftrightarrow} 2n \geqslant n + 2 > n + 1$ donc $\dfrac{2n}{n+1} > 1$.

Or $f(1) = 0$ comme f est décroissante sur $\left[0\,;\frac{2n}{n+1}\right]$.

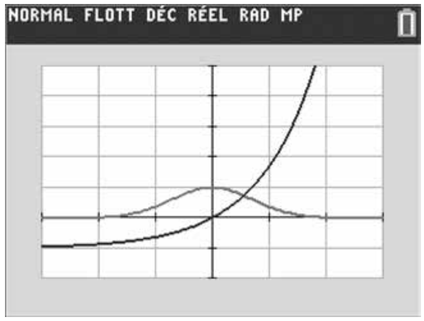
$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$$

3. Sur $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$, $f'(x) \geqslant 0$ et $f(2) = 1 > 0$.

La fonction f est continue, croissante et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

85. Nombre de solutions d'une équation

1. Pour montrer graphiquement le nombre de solutions de (E) on cherche le nombre de points d'intersection des courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = e^x - 1$.



On observe donc une solution.

2. Si $x < 0$, $e^{-x^2} > 0$ et $e^x - 1 < 0$ donc $e^{-x^2} > e^x - 1$.

3. a) $f'(x) = -2xe^{-x^2} - e^x = -(2xe^{-x^2} + e^x)$

Si $x \geqslant 0$, alors $f'(x) < 0$, la fonction f est décroissante.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

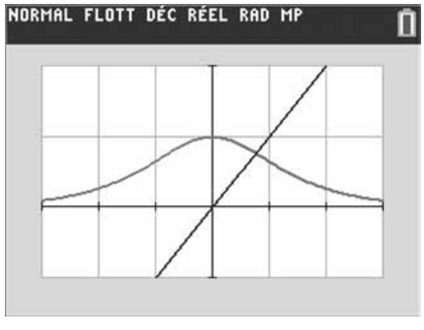
c) $f(0) = 1$

Sur $[0 : +\infty[$, la fonction f est continue, décroissante et change de signe donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Si $x < 0$, d'après **2.** $f(x) > 0$ donc f ne s'annule pas. L'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

86. Point fixe

1. On trace la courbe de la fonction f sur $[-3\ ;\ 3]$ et la droite $y = x$.



On peut conjecture que $f(x) = x$ admet une solution.

2. a) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

b) $g'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} - 1$

Si $x \geqslant 0$, $e^x - e^{-x} \geqslant 0$ et $e^x + e^{-x} \geqslant 1$ donc

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} < 1$ donc $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leqslant 1$

donc $g'(x) \leqslant 0$.

Si $x < 0$ alors $\dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} < 0$ donc $g'(x) < 0$

la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue, décroissante et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ donc $f(x) = x$ admet une unique solution.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la suite (u_n) d'après le théorème du point fixe converge vers l solution de $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

$g(0) = 1$ et $g(1) \approx -0{,}35$ donc $\ell \in [0\ ;\ 1]$.

```
def f(x):
    return 2/(exp(x)+exp(-x))-x
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:b=c
        else:a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

Travaux pratiques p. 134

TP 1. Algorithme de dichotomie

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utilisation d'un algorithme permettant de donner une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

$f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $\alpha \in [0\ ;\ 1]$.

2. a) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8}$. La fonction f change donc de signe entre $\dfrac{1}{2}$ et 1 donc $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;1\right] = I_2$.

b) $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{11}{64}$ La fonction f change de signe entre $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{4}$ donc $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\dfrac{3}{4}\right] = I_3$.

3. a) f doit changer de signe entre a et b.

b) La variable n représente le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une largeur d'intervalle $b - a < 10^{-3}$.

c) Ligne 7 : on teste si la fonction change de signe entre a et b ;

ligne 8 : si vrai on remplace b par c ;

ligne 9 : et 10 si faux on remplace a par c.

d) On trouve $0{,}681 < \alpha < 0{,}682$ obtenu après 10 itérations.

e) On modifie la ligne 5 par :

```
while b-a>=10**(-6):
```

On trouve $0{,}682\,327 < \alpha < 0{,}682\,328$ obtenu après 20 itérations.

TP 2. La méthode Newton Raphson

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étude d'un algorithme très performant donnant une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

A. Principe

1. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_n vaut :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_{n+1}.

On a alors : $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2. La fonction f' ne doit pas s'annuler en x_n.

B. Application

1. $f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$

Si $x \in [0\ ;\ 1]$, $3x - 8 < 0$ donc $f'(x \leqslant 0$.

La fonction f est décroissante sur [0 ; 1].

$f(0) = 1$ et $f(1) = -2$

Sur [0 ; 1], la fonction f est continue, strictement décroissante et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

2. a) On ne peut prendre $x_0 = 0$ car la dérivée f' s'annule en 0.

b)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	1	−2	−5	0,4	0,6
1	0,6	−0,224	−3,72	0,060	0,540
2	0,540	−0,009	0,3445	0,0026	0,537

La correction entre deux termes est $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

c) Après deux étapes, elle est de 0,0026 soit $\approx 2{,}6 \times 10^{-3}$.

3. a)

```
from math import*
def f(x):return x**3-4*x*x+1
def fprime(x):return 3*x*x-8*x
def newton(a,p):
    x=a
    n=0
    while abs(f(x))>=10**(-p):
        x=x-f(x)/fprime(x)
        n=n+1
    return x,n
```

b) ligne 9 : tant que la distance de $f(x)$ à 0 est plus grande que 10^{-p}, on boucle. Lorsque cette condition n'est plus respectée, la valeur de $f(x)$ se trouve à moins de 10^{-p} de 0.

c) Il y a 3 itérations pour $p = 3$.

Il y a 4 itérations pour $p = 6$.

Il y a 5 itérations pour $p = 12$.

d) Cet algorithme est très efficace car il nécessite une itération supplémentaire pour passer à une précision au carré.