# Méthode et exercices : Théorème des valeurs intermédiaires

## I Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire

**Théorème des valeurs intermédiaires**

On considère une fonction $f$ définie et **continue** sur un intervalle $\mathrm{I}$, $a$ et $b$ sont deux réels de $\mathrm{I}$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c)=k$

**Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur $[a;b]$, alors quel que soit le réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a;b]$

## II Comment savoir quand il faut utiliser ce théorème ?

1. Le T.V.I. s'utilise dans le cas où on demande de montrer qu'une équation du type $f(x)=k$ admet au moins une solution.
2. Le TVI ne permet pas de déterminer le nombre de solutions, ni de calculer la ou les solutions.
3. Le corollaire du TVI s'utilise dans le cas où on demande de montrer qu'une équation du type $f(x)=k$ admet une unique solution.

   Par exemple : *montrer que l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur* $[a;b]$.
4. Et dans la plupart des cas il s'agit de l'équation $f(x)=0$.

   Par exemple : *Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution* $\alpha$ *sur* $[0;+\infty[$.

## III A quoi cela va-t-il servir dans la suite de l'exercice ?

Le théorème des valeurs intermédiaires nous a permis d'affirmer que $f(x)$ prend la valeur 0 : cela correspond à un **changement de signe** de $f(x)$.

Alors l'analyse du tableau des variations de $f$, couplée à la recherche des zéros, nous donne le signe de $f(x)$.

# IV Comment faut-il rédiger ?

1. Exemple 1 : antécédent d'un nombre $k$ pour une fonction croissante sur $[a;b]$

   Montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a;b]$

   > On sait que :
   >
   > - $f$ est définie et continue sur $[a;b]$
   > - $f$ est strictement croissante sur $[a;b]$
   > - et $f(a)$=... et $f(b)$=....
   >
   > Comme $k \in [\ f(a)\ ;\ f(b)\ ]$
   >
   > D'après le théorème des valeurs intermédiaires
   >
   > On en déduit que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[a;b]$

2. Exemple 2 : antécédent de 0 pour une fonction décroissante avec f(0)=1 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ :

   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0;+\infty[$.

   > On sait que
   >
   > - f est définie et continue sur $[0;+\infty[$
   > - f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;1]$
   >
   > Comme $0 \in ]-\infty;1]$
   >
   > D'après le théorème des valeurs intermédiaires,
   >
   > On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.

# V Applications

**Exercice 1.**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + 3$

1. Étudier les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[-\dfrac{1}{2};+\infty[$.
4. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
5. Fournir un encadrement au centième de $\alpha$ .

**Correction**

1. D'après la limite des termes de plus haut degré on a :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + 3 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{3} = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - x + 3 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{3} = +\infty$
2. La fonction $f$ est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathrm{R}$ on a : $f'(x) = 2x^2 - x - 1$

   Étudions le signe de cette expression : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 = 3^2 > 0$.

   Elle possède donc deux racines : $x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{4} = 1$

   On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variation de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{79}{24}$ | $\searrow$ | $\frac{13}{6}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. Pour tout $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, on a $f(x) \geqslant \dfrac{13}{6} > 0$

   donc l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution sur $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
4. On sait que :
   - la fonction $f$ est continue sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[$ (car dérivable)
   - la fonction $f$ est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[$ à valeurs dans $\left]-\infty; \dfrac{79}{24}\right[$

   Or $0 \in \left]-\infty; \dfrac{79}{24}\right[$

   D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

   Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ possède donc une unique solution sur } \mathbb{R}}$
5. En utilisant le menu *table* de la calculatrice on trouve $-1,70 < \alpha < -1,69$

   car $f(-1,70) \approx$ et $f(-1,69) \approx$