Nom : ................................................................ Prénom : ..........................................................

| Total | Ex 1 | Ex2 |
|---|---|---|
| /10 | /4 | /6 |

**Exercice 1.**

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3-2x^2+4x-1$
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{3}}{-5x^2+\frac{1}{2}x+7}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{-2}{x-5}$
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x+5}{x+3}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.

**Correction :**

1. **Déterminer** $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3-2x^2+4x-1$

   La limite en $-\infty$ d'une fonction polynomiale est la limite en $-\infty$ de son monôme de plus haut degré

   d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3-2x^2+4x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3-2x^2+4x-1 = +\infty}$

2. **Déterminer** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{3}+7}{-5x^2+\frac{1}{2}x+7}$ **puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.**

   La limite en $+\infty$ d'un quotient de fonctions polynomiales est la limite en $+\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré

   d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{3}}{-5x^2+\frac{1}{2}x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{-5x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{-5} = -\dfrac{3}{5}$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{3}}{-5x^2+\frac{1}{2}x+7} = -\dfrac{3}{5}}$

   On en déduit que $\boxed{\text{la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation } y=-\dfrac{3}{5}}$.

3. **Déterminer** $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{-2}{x-5}$

   On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} x-5 = 0^+$ car $x>5$ alors $x-5>0$

   d'où $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{1}{x-5} = +\infty$

   donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{-2}{x-5} = -\infty}$

**4. Déterminer $\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x+5}{x+3}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.**

On sait que

- $\lim\limits_{x\to(-3)^-} x+5=2$
- $\lim\limits_{x\to(-3)^-} x+3=0^-$ car $x<-3$ d'où $x+3<0$

Donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x\to(-3)^-} \dfrac{x+5}{x+3}=-\infty}$

Alors $\boxed{\text{la courbe représentative de la fonction admet une asymptote verticale d'équation } x=-3}$.

**Exercice 2.** On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=2x^3+3x^2-36x+12$ sur l'intervalle $[-10;3]$.

**1.** Justifier que les variations de $f$ sont les suivantes :

| $x$ | $-10$ | | $-3$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| variations de $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

**2.** Compléter le tableau de variations de la question 1. (On fera les calculs à la calculatrice).

**3.** Démontrer que l'équation $f(x)=-1000$ admet exactement une solution sur $[-10;-3]$.

**4.** Justifier que $f(x)=-1000$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[-3;3]$.

**5.** On note $\alpha$ la solution de l'équation $f(x)=-1000$. Donner un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

<u>**Correction :**</u>

On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=2x^3+3x^2-36x+12$ sur l'intervalle $[-10;3]$.

**1. Justifier que les variations de $f$**

$f$ est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $[-10;3]$, et $f'(x)=6x^2+6x-36$

C'est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta=900$. Les deux racines sont $x_1=2$ et $x_2=-3$.

On a donc $f'(x)=6(x-2)(x+3)$.

| $x$ | $-10$ | | $-3$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $6$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |
| $f'(x)=6(x-2)(x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On en déduit le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$ et les variations de $f$.

| $x$ | $-10$ | | $-3$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $f$ | -1328 | ↗ | 93 | ↘ | -32 | ↗ | -15 |

**2. Compléter le tableau de variations de la question 1. (On fera les calculs à la calculatrice).**

$f(-10) = -1328$, $f(-3) = 93$, $f(2) = -32$ et $f(3) = -15$.

**3. Démontrer que l'équation $f(x) = -1000$ admet exactement une solution sur $[-10; -3]$.**

La fonction $f$ est **définie**, **continue** et **strictement croissante** sur $[-10; -3]$ à valeurs dans $[-1328; 93]$

Comme $-1000 \in [-1328; 93]$

Donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe un unique $\alpha \in ]-10; -3[$ tel que $f(\alpha) = -1000$.

**4. Justifier que $f(x) = -1000$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[-3; 3]$.**

D'après le tableau de variations, la fonction $f$ admet un minimum en $x = 2$ qui vaut $-32$

Alors pour tout $x \in [-3; 3]$, $f(x) \geq -32 > -1000$.

Ainsi on en déduit que l'équation $f(x) = -1000$ n'a pas de solution sur $[-3; 3]$.

**5. On note $\alpha$ la solution de l'équation $f(x) = -1000$. Donner un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.**

D'après la calculatrice, on obtient successivement

- $f(-10) = -1328$ et $f(-9) = -879$. Donc $\alpha \in ]-10; -9[$.
- $f(-9,3) \approx -1002$ et $f(-9,2) \approx -960$. Donc $\alpha \in ]-9,3; -9,2[$.
- $f(-9,3) \approx -1002$ et $f(-9,29) \approx = -998$. Donc $\alpha \in ]0; 1[$.
- $f(-9,295) \approx -1000,3$ et $f(-9,294) \approx -999,9$. .

Donc $\alpha \in ]9,295; 9,294[$

**Exercice 3.**

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

**1.** **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

**b.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

**c.** En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

**2.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

**a.** Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

**b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

**3.** Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x+y-2z+3=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x-2z+6=0$.

**a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x=2z$.

**b.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

**c.** Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t\\y&=&-4t-3,\quad t\in\mathbb{R}.\\z&=&t\end{array}\right.$

Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

**4.** Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

**<u>Correction :</u>**

Sujet tiré de Baccalauréat S - Antilles-Guyane - 16 juin 2017

**1.** **a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

il n'existe pas de réel $k$ non nul tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires ce qui entraîne que les points A, B et C ne sont pas alignés

**b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.**

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+0+4=4$

**c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.**

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4$

on a alors $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{4}{AB \times AC} = \dfrac{4}{\sqrt{20}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{40}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

on en déduit $\boxed{\widehat{BAC} \approx 51°}$

**2. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.**

**a. Démontrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).**

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 + 0 - 4 = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 1 - 1 = 0$

$\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC)

**b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).**

(ABC) : $2x - y - z + d = 0$ car $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à (ABC)

de plus A(-1 ; 2 ; 0) $\in$ (ABC), on en déduit $d = 4$

Finalement $\boxed{\text{une équation cartésienne du plan (ABC) est } 2x - y - z + 4 = 0}$

**3. Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.**

**a. Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.**

$\mathscr{P}_2$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\mathscr{P}_2 : x - 2z + d = 0$

or O $\in \mathscr{P}_2$, on en déduit que $d = 0$

Finalement on a bien $\boxed{\mathscr{P}_2 : x = 2z}$

**b. Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.**

$\mathscr{P}_1$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}_2$ est de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont évidemment pas colinéaires (il suffit de regarder l'ordonnée)

D'où les plans ne sont donc pas parallèles

Donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ sont nécessairement sécants}}$

**c. Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.**

**méthode 1** : $\mathscr{D}$ est de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ on en déduit que $\mathscr{D}$ est parallèle à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$

De plus M(0 ; -3 ; 0) appartient à $\mathscr{D}$,

On montre aisément que ce point appartient aux deux plans à la fois

Finalement la droite $\mathscr{D}$ est parallèle aux deux plans et passe par un point commun aux deux plans,

On en déduit que $\boxed{\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=\mathscr{D}}$

**méthode 2** : on cherche à résoudre le système $\begin{cases}3x+y-2z+3=0\\ x\qquad -2z\qquad =0\end{cases}$

$$\begin{cases}3x+y-2z+3=0\\ x\qquad -2z\qquad =0\end{cases}\iff\begin{cases}x=2z\\ y=-4z-3\end{cases}$$

en posant $z=t$ on obtient la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$

donc on a bien $\boxed{\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=\mathscr{D}}$

**4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.**

I$(x\ ;\ y\ ;\ z)\in\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un unique réel $t$ tel que $\begin{cases}x=2t\\ y=-4t-3\\ z=t\end{cases}$

I$(x\ ;\ y\ ;\ z)\in$ (ABC) si et seulement si $2x-y-z+4=0$

on cherche donc $t$ tel que $2(2t)-(-4t-3)-t+4=0\iff t=-1$

Donc $\boxed{\mathscr{D}\text{ coupe (ABC) en I}(-2\ ;\ 1\ ;\ -1)}$

**Exercice 4.**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

*Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées : A$(3~;~-1~;~4)$, B$(-1~;~2~;~-3)$, C$(4~;~-1~;~2)$.

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$.

La droite $\Delta$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 4-t\\ z &=& -8+2t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.

**Affirmation 1 :** Les droites $\Delta$ et (AC) sont orthogonales.

**Affirmation 2 :** Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

**Affirmation 3 :** Tous les points dont les coordonnées $(x~;~y~;~z)$ sont données par $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+s-2s'\\ y &=& 1-2s+s'\\ z &=& 1-4s+2s'\end{array}\right.$, $s\in\mathbb{R}, s'\in\mathbb{R}$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

**Affirmation 4 :** Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite $\Delta$.

**<u>Correction :</u>**

Sujet tiré de Baccalauréat S - Amérique du Sud - 24 novembre 2015

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées : A$(3~;~-1~;~4)$, B$(-1~;~2~;~-3)$, C$(4~;~-1~;~2)$.

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$.

La droite $\Delta$ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t\\ y &=& 4-t\\ z &=& -8+2t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$.

**Affirmation 1 :** Les droites $\Delta$ et (AC) sont orthogonales.

En détaillant son écriture paramétrique, on peut dire que la droite $\Delta$ a pour vecteur directeur $\vec{v}\,(4;-1;2)$.

La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AC}\,(1;0;-2)$.

$\vec{v}.\overrightarrow{AC}=4\times1+(-1)\times0+2\times(-2)=0$ donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ;

Alors on peut en déduire que les droites $\Delta$ et (AC) sont orthogonales.

$\boxed{\text{Affirmation 1 vraie}}$

**Affirmation 2 :** Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

- Les points A, B et C déterminent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.
  $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(-4;3;-7)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(1;0;-2)$.
  Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignes ; ils déterminent donc le plan (ABC).
- Le plan (ABC) a pour équation $2x+5y+z-5=0$ si les coordonnées des trois points A, B et C vérifient cette équation.
  - $2x_{\text{A}}+5y_{\text{A}}+z_{\text{A}}-5 = 2\times 3+5\times(-1)+4-5=0$
  - $2x_{\text{B}}+5y_{\text{B}}+z_{\text{B}}-5 = 2\times(-1)+5\times 2+(-3)-5=0$
  - $2x_{\text{C}}+5y_{\text{C}}+z_{\text{C}}-5 = 2\times 4+5\times(-1)+2-5=0$

Les coordonnées des trois points vérifient l'équation du plan donc ces points appartiennent au plan.
Le plan (ABC) a pour équation $2x+5y+z-5=0$.

$\boxed{\text{Affirmation 2 vraie}}$

**Affirmation 3 :** Tous les points dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = 1+s-2s' \\ y = 1-2s+s' \\ z = 1-4s+2s' \end{cases},\ s\in\mathbb{R},\ s'\in\mathbb{R}$$ appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Soient $s$ et $s'$ deux réels et M le point de coordonnées $(1+s-2s';1-2s+s';1-4s+2s')$.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $2x-3y+2z-7=0$.

$$\begin{aligned} 2x_{\text{M}}-3y_{\text{M}}+2z_{\text{M}}-7 &= 2(1+s-2s')-3(1-2s+s')+2(1-4s+2s')-7 \\ &= 2+2s-4s'-3+6s-3s'+2-8s+4s'-7=-6-3s' \end{aligned}$$

n'est pas égal à 0 pour tout $s'$.

$\boxed{\text{Affirmation 3 fausse}}$

**Affirmation 4 :** Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite $\Delta$.

Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite $\Delta$ si et seulement si la droite $\Delta$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
La droite $\Delta$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(4;-1;2)$.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2;-3;2)$.
La droite $\Delta$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{n} = 4\times 2+(-1)\times(-3)+2\times 2=15\neq 0$
Donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que la droite $\Delta$ n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$.

$\boxed{\text{Affirmation 4 fausse}}$

**Exercice 5.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{8} \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

**1.** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$.

**2.** En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**Correction :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{8} \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

**1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$.**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $(\mathscr{P}_n) \quad : \quad 0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$

**a.** *Initialisation.* On a $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_1=\dfrac{3}{8}=0{,}375$.

Donc $0\leq u_1\leq u_0\leq 1$ d'où $(\mathscr{P}_0)$ est vraie

**b.** *Hérédité.* Supposons que pour un certain $k\in\mathbb{N}$ : $(\mathscr{P}_k) \quad : \quad 0\leq u_{k+1}\leq u_k\leq 1$

Ainsi, en ajoutant $\dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{2}\leq u_{k+1}+\dfrac{1}{2}\leq u_k+\dfrac{1}{2}\leq 1+\dfrac{1}{2}$

La fonction $x\mapsto x^2$ étant croissante sur $[0;+\infty[$,

on en déduit que $\dfrac{1}{4}\leq\left(u_{k+1}+\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\left(u_k+\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{3}{2}$

Comme on multiplie par $\dfrac{1}{2}>0$, on a $\dfrac{1}{8}\leq\dfrac{1}{2}\left(u_{k+1}+\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{1}{2}\left(u_k+\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{3}{4}$

Donc, en retranchant $\dfrac{1}{8}$, on a $\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}\leq\dfrac{1}{2}\left(u_{k+1}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{8}\leq\dfrac{1}{2}\left(u_k+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{8}\leq\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{8}\leq 1$

On obtient finalement $(\mathscr{P}_{k+1}) \quad : \quad 0\leq u_{k+2}\leq u_{k+1}\leq 1$

**c.** *Conclusion.* La propriété est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$.

**2. En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.**

D'après la question 1, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$

On peut en déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée par 0

D'après le **théorème de convergence**, la suite $(u_n)$ possède donc une limite $\ell$.

Notons $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{8}$ est continue car polynomiale (on a ici la forme canonique d'un polynome de degré 2).

D'après le **théorème du point fixe**, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$, on en déduit que $\ell$ est solution de l'équation $g(x)=x$ et par ailleurs $0\leq\ell\leq u_0$.

Résolvons cette équation :

$$g(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} = x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x(x-1) = 0$$

Cette équation a deux solutions : $0$ et $1$.

Comme $\ell \leq u_0 < 1$, on en déduit que $\ell = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.