Nom : .... Prénom : ....

Total	Ex 1	Ex2
/10	/5	/5

Exercice 1.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3-2x^2+4x-1$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{2}}{-8x^2+\frac{1}{2}x+7}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.

3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{-2}{x-5}$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x+4}{x+2}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.

<u>Correction :</u>

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3-2x^2+4x-1$

La limite en $-\infty$ d'une fonction polynomiale est la limite en $-\infty$ de son monôme de plus haut degré

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3-2x^2+4x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3-2x^2+4x-1 = -\infty}$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{2}}{-8x^2+\frac{1}{2}x+7}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.

La limite en $+\infty$ d'un quotient de fonctions polynomiales est la limite en $+\infty$ du quotient des monômes de plus haut degré

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{2}}{-8x^2+\frac{1}{2}x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{-8x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{-8} = -\dfrac{3}{8}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+\sqrt{2}}{-8x^2+\frac{1}{2}x+7} = -\dfrac{3}{8}}$

On en déduit que $\boxed{\text{la courbe de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation } y=-\dfrac{3}{8}}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{-2}{x-5}$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} x-5=0^+$ car $x>5 \iff x-5>0$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{1}{x-5} = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{-2}{x-5} = -\infty}$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x+4}{x+2}$ puis interpréter graphiquement le resultat de la limite.

On sait que

- $\lim\limits_{x \to (-2)^-} x+4 = 2$
- $\lim\limits_{x \to (-2)^-} x+2 = 0^-$ car $x < -2 \iff x+2 < 0$

Donc, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{x+4}{x+2} = -\infty}$

Alors $\boxed{\text{la courbe représentative de la fonction admet une asymptote verticale d'équation } x = -2}$.

Exercice 2. **6 points**

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 70$ sur l'intervalle $[-4; 10]$.

1. Justifier que les variations de f sont les suivantes :

x	-2		-1		4		10
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Compléter le tableau de variations de la question 1. (On fera les calculs à la calculatrice).

3. Justifier que $f(x) = 800$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[-2; 4]$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 800$ admet exactement une solution sur $[4; 10]$.

5. On notera α la solution de l'équation $f(x) = 800$. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

<u>**Correction :**</u>

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 70$ sur l'intervalle $[-4; 10]$.

1. Justifier que les variations de f

f est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $[-2; 10]$, et $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$

C'est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 100$. Les deux racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.

On a donc $f'(x) = 6(x+1)(x-4)$.

x	-2		-1		4		10
6		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = 6(x+1)(x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le signe de $f'(x)$ en fonction de x et les variations de f.

x	-2		-1		4		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	66	$\nearrow$	83	$\searrow$	-42	$\nearrow$	930

2. Compléter le tableau de variations de la question 1. (On fera les calculs à la calculatrice).

On a $f(-2) = 66$, $f(-1) = 83$, $f(4) = -42$ et $f(10) = 930$.

3. Justifier que $f(x) = 800$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[-2;4]$.

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in [-2;4]$, $f(x) \leq 83 < 800$.

Ainsi on en déduit que $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 800 \text{ n'a pas de solution sur } [-2;4].}$

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 800$ admet exactement une solution sur $[4;10]$.

On sait que

- f est une fonction **continue** sur $[4;10]$ car elle est polynomiale.
- f est **strictement décroissante** sur $[4;10]$ **à valeurs dans** $[-42;930]$.
- Comme $-42 < 800 < 930$

Donc d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**,

$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [4;10] \text{ tel que } f(\alpha) = 800.}$

5. On notera α la solution de l'équation $f(x) = 800$. Donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

D'après la calculatrice, on obtient successivement

- $f(9) = 583$ et $f(10) = 930$. Donc $\alpha \in]9;10[$.
- $f(9,6) \approx 780$ et $f(9,7) \approx 816$. Donc $\alpha \in]9,9;10[$.
- $f(9,65) \approx 798$ et $f(9,66) = 801$. Donc $\alpha \in]9,65;9,66[$.
- $f(9,656) \approx 799,9$ et $f(9,957) \approx 800,1$. .

Donc $\boxed{\alpha \in]9,656;9,657[}$

Exercice 3. **4 points**

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{1}{4} \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$.

2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{1}{4} \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\quad (\mathscr{P}_n) \;:\; 0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$

a. *Initialisation.* On a $u_0=1$ et $u_1=\dfrac{3}{4}=0,75$.

Donc $0\leq u_1\leq u_0\leq 1$ d'où $(\mathscr{P}_0)$ est vraie

b. *Hérédité.* Supposons que pour un certain $k\in\mathbb{N}$: $(\mathscr{P}_k) \;:\; 0\leq u_{k+1}\leq u_k\leq 1$

Ainsi, en ajoutant 1, on a $\quad 1\leq u_{k+1}+1\leq u_k+1\leq 2$

La fonction $x\mapsto x^2$ étant croissante sur $[0;+\infty[$,

on en déduit que $\quad 1\leq (u_{k+1}+1)^2\leq (u_k+1)^2\leq 4$

Comme on multiplie par $\dfrac{1}{4}>0$, on a $\quad \dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}(u_{k+1}+1)^2\leq\dfrac{1}{4}(u_k+1)^2\leq 1$

Donc, en retranchant $\dfrac{1}{4}$, on a $\quad \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}(u_{k+1}+1)^2-\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{1}{4}(u_k+1)^2-\dfrac{1}{4}\leq 1-\dfrac{1}{4}\leq 1$

On obtient finalement $(\mathscr{P}_{k+1}) \;:\; 0\leq u_{k+2}\leq u_{k+1}\leq 1$ d'où $(\mathscr{P}_{k+1})$ est vraie.

c. *Conclusion.* La propriété est vraie pour $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n

Donc $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}\text{, on a } 0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1}$

2. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

D'après la question 1, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0\leq u_{n+1}\leq u_n\leq 1$

On peut en déduire que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0

D'après le **théorème de convergence**, la suite (u_n) possède donc une limite ℓ.

Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)^2-\dfrac{1}{4}$ est continue car polynomiale (on a ici la forme canonique d'un polynome de degré 2).

D'après le **théorème du point fixe**, puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$, on en déduit que ℓ est solution de l'équation $g(x)=x$ et que par ailleurs $0\leq\ell\leq u_0$.

Résolvons cette équation :

$$g(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{4} = x \Longleftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = x \Longleftrightarrow \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$$

Cette équation a deux solutions : 0 et 2.

Comme $\ell \leq u_0 < 1$, on en déduit que $\ell = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.