Exercice type avec une fonction auxillaire

Exercice :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = -\dfrac{x^4}{4} + x^3 - 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. (a) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;1]$.

   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^2.

   (d) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. Étudier les variations de f .

Correction :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = -\dfrac{x^4}{4} + x^3 - 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$.

1. **Étudier les variations de la fonction g .**

   On a $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynomiales.

   D'où $g'(x) = -3x^2 + 6x - 6$

   On étudie le signe de la dérivée

   Alors $\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = 36 - 72 = -36 < 0$

   Comme le discriminant est négatif et $a = -3 < 0$

   Alors $g'(x)$ est également négatif

   Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

2. (a) **Calculer $g(0)$ et $g(1)$.**

   $g(0) = -0^3 + 3 \times 0^2 - 6 \times 0 + 1 = 1$

   $g(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = -1 + 3 - 6 + 1 = -3$

   (b) **Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0;1]$.**

   Sur l'intervalle $[0;1]$ la fonction g est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[-3;1]$

   Comme $0 \in [-3;1]$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires

   On peut affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$.

(c) **Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^2.**

On trouve $g(0,10) \approx 0,011368$ et $g(0,19) \approx -0,038559$

Donc $0,18 < \alpha < 0,19$

(d) **Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.**

On sait que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et qu'elle s'annule en α

On en déduit donc le tableau de signe

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$-$	

3. Étudier les variations de f .

On a $f(x) = -\dfrac{x^4}{4} + x^3 - 3x^2 + x + 2$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynomiales.

D'où $f'(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1 = g(x)$

Alors $f(0,32) \approx f(0,33) \approx 2,04$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$	2.04	$\searrow$	