Continuité

Histoire des mathématiques

Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

I Continuité d'une fonction

Rappel : Rappel : limite d'une fonction en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre qui appartient à I ou qui est une borne de I.

Dire qu'une fonction f a pour limite l lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises par tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proche de a.

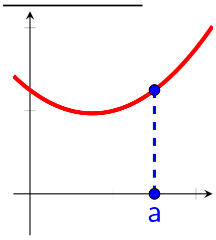
Remarque : cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ autour du nombre l.

Définition : Continuité en a

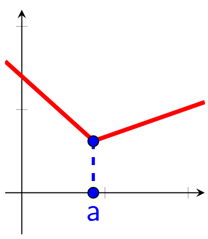
f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un nombre appartenant à I.

Dire que f est continue en a signifie que f a une limite finie en a et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

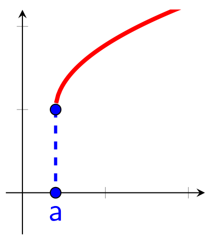
Exemples :



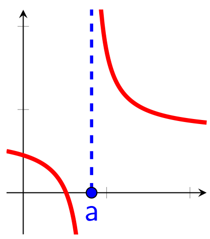
f .... continue en a



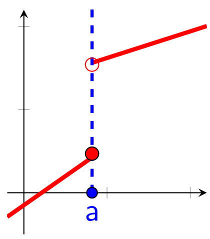
f .... continue en a



f .... continue en a



f .... continue en a



f .... continue en a

Remarque : La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Continuité sur un intervalle

Dire qu'une fonction f est continue sur un intervalle I signifie que f est continue en tout point de I.

Fonctions usuelles

La fonction valeur absolue est continue sur ...., $x \mapsto |x|$

Les fonctions polynômes sont continues sur ...., par exemple $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$

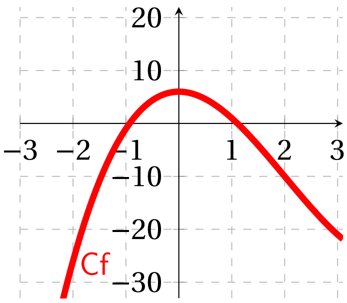
La fonction racine carrée est continue sur ...., $x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction inverse est continue sur .... et sur .... , $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Remarque : Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

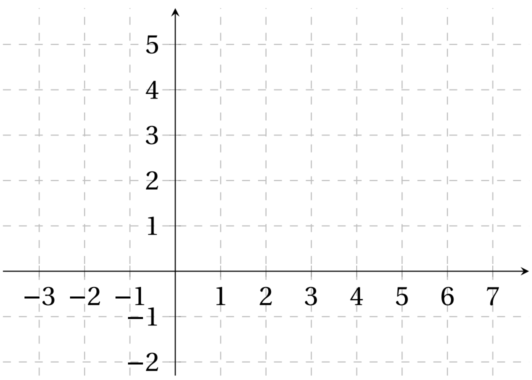
Exemple : la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

x	$-\infty$ 0 4
$f'(x)$	
Variation de f	



Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x < 3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



Les fonctions $x \mapsto -x+2$; $x \mapsto x-2$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) =$ ....

  Et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) =$ ....

  Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x)$...... $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = -1$

  Donc la fonction f ....

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) =$ ....

  Et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) =$ ....

  Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x)$...... $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x)$

  Donc la limite de f en 5 .... (on parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5)

  La fonction f ....

Conclusion : la fonction f est continue sur .... et sur ....

II Dérivabilité et continuité

Dans ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un réel appartenant à I.

Propriétés

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a
- Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I

Démonstration :

Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction φ, définie, pour tout h différent de zéro, avec $a+h$ dans I par $\varphi(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers zéro.

Pour tout h non nul, ... alors ....

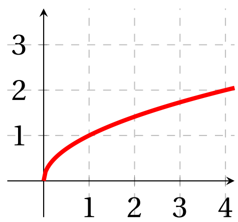
Comme .... alors .... donc ....

On peut en conclure que $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ ....

Donc ....

ATTENTION : la réciproque est fausse

Exemple : la fonction racine carrée est continue en zéro mais n'est pas dérivable en zéro

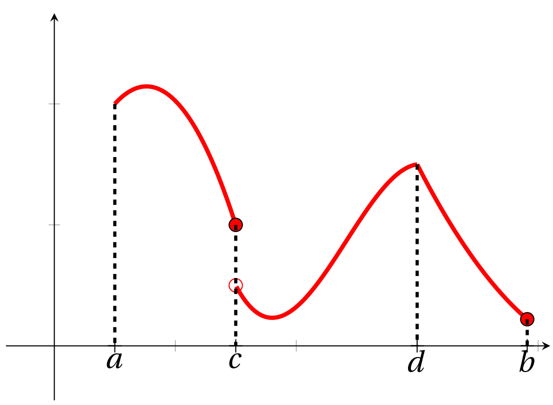


Aspect graphique

Graphiquement, la continuité d'une fonction f se traduit par le fait que la courbe représentative de f est d'un seul morceau.

La représentation graphique ci-contre permet de conjecturer que :

- f est continue sur $[a\,;\,c]$et sur $]c\,;\,b]$ mais n'est pas continue en c
- f est continue en d mais n'est pas dérivable en d
- la courbe admet deux demi-tangentes distinctes au point d.



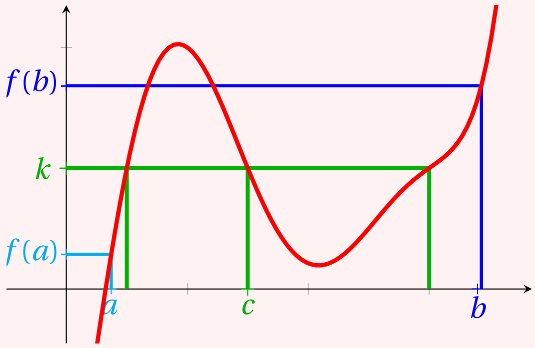
III Résolution d'équations - TVI

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ admet .... une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$



Cas particulier

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes ....

alors il existe .... un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Corollaire (admis)

Si une fonction f est définie, continue et .... sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un .... c dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet .... solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$

Remarque : Ceci est un théorème d'existence, il ne donne pas la valeur numérique de la solution.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
2. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un **encadrement par dichotomie**.

IV Application aux suites

Application de la continuité

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $\alpha \in \mathrm{I}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\alpha)$.

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$

Exemple d'application :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2$ et (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$

Alors la fonction f est ....

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) =$ ....

Théorème : Théorème du point fixe

Soit (u_n)une suite définie par u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) est convergente vers l et si f est continue en l

Alors la limite l de (u_n) est solution de l'équation : $f(x) = x$.

Exemple : Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 2$

La suite (u_n) est alors .... et .... par ..... , elle est donc convergente vers une limite ℓ.

La fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est définie et continue sur $]-2;\ +\infty[$.

Comme la suite (u_n) est convergente vers ℓ,

D'après le théorème du point fixe, ℓ verifie l'équation ....

En élevant au carré, on trouve : .... qui admet deux solutions .... et ....

Comme la suite (u_n) est .... , elle converge donc vers ....