Continuité

Histoire des mathématiques

Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

I Continuité d'une fonction

Rappel : Limite d'une fonction en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I.

a est un nombre qui appartient à I ou qui est une borne de I.

Dire qu'une fonction a pour limite l lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises par tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proche de a.

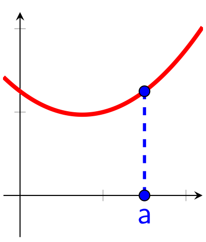
Remarque : cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ autour du nombre l.

Définition : Continuité en a

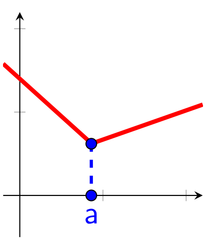
f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un nombre appartenant à I.

Dire que f est continue en a signifie que f a une limite finie en a et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

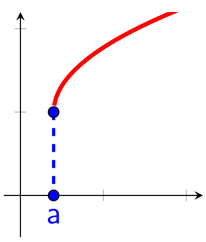
Exemples :



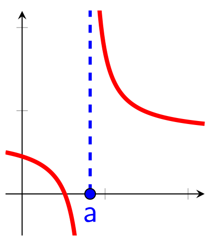
f est continue en a



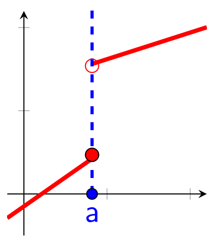
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Remarque : La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Continuité sur un intervalle

Dire qu'une fonction f est continue sur un intervalle I signifie que f est continue en tout point de I.

Fonctions usuelles

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, par exemple $x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$

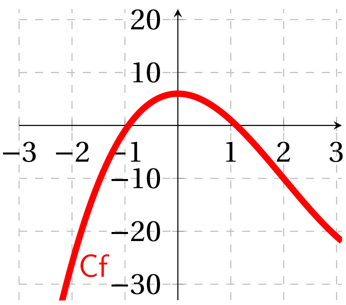
La fonction racine carrée est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction inverse est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Remarque : Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

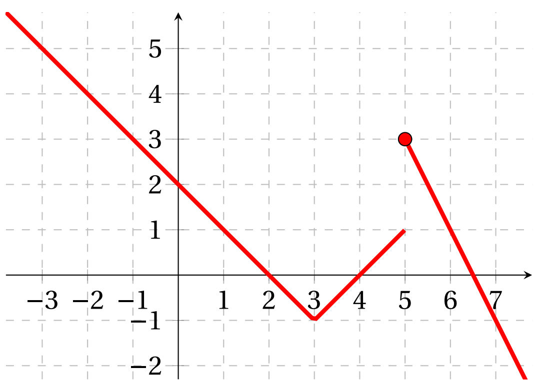
Exemple : la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

x	$-\infty$		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26



Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x < 3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \leq\ x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



Les fonctions $x \mapsto -x+2$; $x \mapsto x-2$; , et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

Etudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} (-x+2) = -1$
  Et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} (x-4) = -1$
  Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -1$
  Donc la fonction f est continue en 3.
- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} (x-4) = 1$
  Et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} (-2x+13) = 3$
  Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x<5}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 5\\ x>5}} f(x)$
  Donc la limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
  La fonction f n'est donc pas continue en 5.

Conclusion : la fonction f est continue sur $]-\infty;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

II Dérivabilité et continuité

Dans ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I, a est un réel appartenant à I.

Propriétés

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a
- Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I

Démonstration :

Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction φ, définie, pour tout h différent de zéro, avec $a+h$ dans I par $\varphi(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers zéro. Pour tout h non nul, $h\ \varphi(h)=f(a+h)-f(a)$ alors $f(a+h)=f(a)+h\varphi(h)$

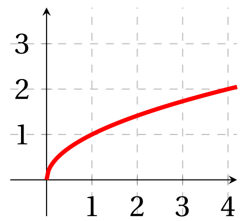
Comme $\lim\limits_{h\to 0}\ \varphi(h)=f'(a)$ alors $\lim\limits_{h\to 0}\ h\ \varphi(h)=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\ f(a+h)=f(a)$.

On peut en conclure que $\lim\limits_{x\to a}\ f(x)=f(a)$

Donc f est continue en a.

ATTENTION : la réciproque est fausse

Exemple : la fonction racine carrée est continue en zéro mais n'est pas dérivable en zéro

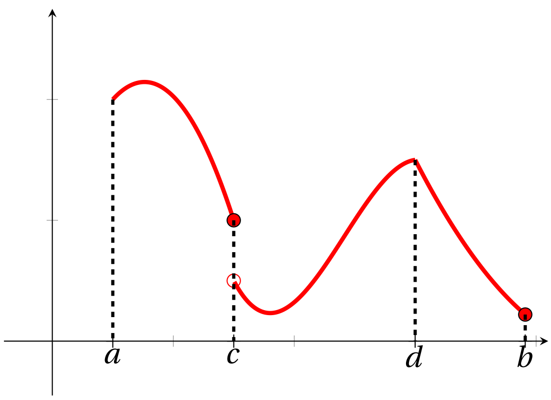


Aspect graphique

Graphiquement, la continuité d'une fonction f se traduit par le fait que la courbe représentative de f est d'un seul morceau.

La représentation graphique ci-contre permet de conjecturer que :

- f est continue sur $[a\ ;\ c]$et sur $]c\ ;\ b]$ mais n'est pas continue en c
- f est continue en d mais n'est pas dérivable en d
- la courbe admet deux demi-tangentes distinctes au point d.



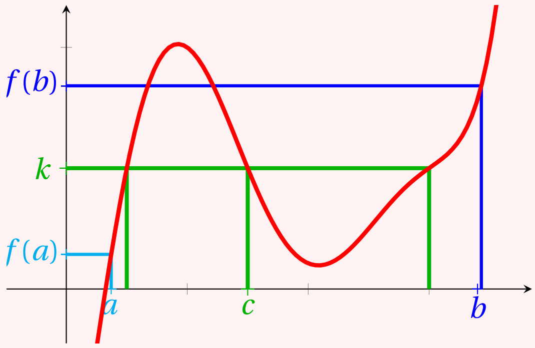
III Résolution d'équations - TVI

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$



Cas particulier

Si une fonction f est définie et continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Corollaire (admis)

Si une fonction f est définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$

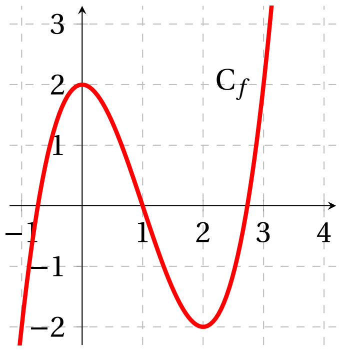
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique c dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ tel que $f(c) = k$

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$

Remarque : Ceci est un théorème d'existence, il ne donne pas la valeur numérique de la solution.

Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
2. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.



1) On sait que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Comme la fonction f est dérivable sur $[2;+\infty[$

Alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$

D'où sur $[2\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$

De plus $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$.

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \ = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 2 \ = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3}\right) \ = +\infty$.

La fonction f est définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et elle change de signe.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel c tel que $f(c) = 0$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2,73 < c < 2,74$

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

IV Application aux suites

Application de la continuité

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $\alpha \in \mathrm{I}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\alpha)$.

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$

Démonstration : elle est analogue à celle de la composée de deux fonctions continues

Exemple : Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2$ et (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$

Alors la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n+1} = 2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(2) = (2+1)^2 = 9$.

Théorème : Théorème du point fixe

Soit (u_n)une suite définie par u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) est convergente vers l et si f est continue en l

Alors la limite l de (u_n) est solution de l'équation : $f(x) = x$.

Exemple : Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

> On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout n, $0 \le u_n \le 2$
>
> La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ.
>
> La fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est définie et continue sur $]-2;\ +\infty[$.
>
> Comme la suite (u_n) est convergente vers ℓ,
>
> D'après le théorème du point fixe, ℓ verifie l'équation $l = \sqrt{2+l}$.
>
> En élevant au carré, on trouve : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ qui admet deux solutions -1 et 2.
>
> Comme la suite (u_n) est positive, elle converge donc vers 2.