CHAPITRE 2 Limites de fonctions

Manuel p. 48-79

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Les opérations sur les limites sont admises. L'utilisation de la composition des limites se fait en contexte.

Objectifs

- → Déterminer une limite en l'infini.
- → Déterminer une limite en un réel.
- → Conjecturer le présence d'asymptotes.
- → Déterminer une limite à l'aide des opérations sur les limites.
- → Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison.
- → Déterminer une limite en utilisant la composée de fonctions.
- → Lever une indétermination.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 49

1. Calculer des limites

a) 0 **b)** 0 **c)** $+\infty$ **d)** 0 **e)** $-\infty$ **f)** $-\infty$

2. Étudier les variations de fonctions

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = (x-1)(3x+9)$ donc le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

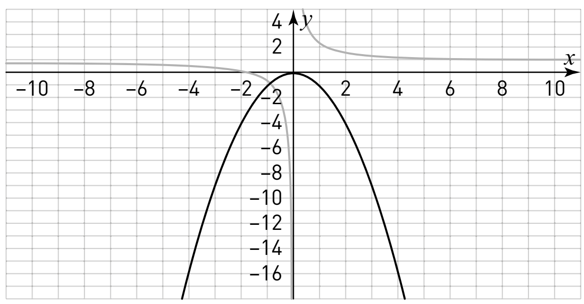
2. $g'(x) = \dfrac{5}{(4x-1)^2} > 0$ donc g est croissante sur

$\left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.

$h'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ donc le tableau est :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘		↗	

3.



3. Manipuler des expressions algébriques

1. a) $-6x^3 + 5x^2 - 2$ **b)** $e^{5x} + e^{x+2} + e^{-x}$

c) $e^{4x} + 2e^{2x}\sqrt{2x-1} + 2x - 1$

2. a) $2x(4x^2 + 3x - 6)$ **b)** $e^2x(e^4x - 4e^{2x} + e^{7x})$

c) $(e^x - 7x)(e^x + 7x)$

3. a) $\dfrac{(2-x)(\sqrt{x}+4)}{x-16}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}{2x-2}$

4. Encadrer des fonctions

1. $f(x) - (2x+1) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ donc la courbe est en-dessous de la droite sur $[1\,;3]$ et au dessus partout ailleurs.

2. a) x est positif et il n'y a que des additions de nombres positifs.

b) $2x < 3x$ et $3 < 4$ donc par somme d'inégalités : $2x + 3 < 3x + 4$.

3. a) $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1$ **b)** $-x \leqslant f(x) \leqslant x$

c) $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2+1}$

Activités p. 50-51

1 Découvrir la notion d'asymptotes et de limites de fonctions

- **Durée estimée :** 35 min
- **Objectif :** Découvrir les notions de limite et d'asymptote.

A. Observations graphiques

1. Tracés sur GeoGebra.

2. a) À leurs extrémités, les courbes sont proches de l'axe des abscisses.

b) Pour la courbe de h, on ne peut pas affirmer la même chose.

3.Les asymptotes sont : $y = 0$ et $x = 0$.

B. Observations numériques

1. a) b) c) Tableau de valeurs

2. Une limite finie pour f et g qui vaut 0 et une limite infinie pour h qui vaut $+\infty$.

2 Découvrir la notion de limite en un point

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de limite en une valeur finie.

1. Non elles ne sont pas définies en 0.

2. 3. a) b) GeoGebra

c) Pour f les images se rapprochent de moins l'infini et pour g elles se rapprochent de 15.

4. a) GeoGebra

b) Pour f les images se rapprochent de plus l'infini et pour g elles se rapprochent de 15.

3 Effectuer des opérations sur les limites

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir les difficultés dans les opérations portant sur les limites, manupilant les notions d'infini.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} h(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0} k(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

2. a) $\lim\limits_{x\to0} f(x) + h(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) + k(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) + h(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) + k(x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to0} f(x) + g(x) = +\infty$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + h(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + h(x) = +\infty$ **h)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + g(x) = 0$

3. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times h(x) = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \times k(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to0} g(x) \times k(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times k(x) = 1$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) \times h(x) = -\infty$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \times h(x) = 1$

g) $\lim\limits_{x\to0} f(x) \times h(x) = +\infty$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \times k(x) = +\infty$

4 Déterminer des limites de fonctions rationnelles

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier les limites de fractions rationnelles.

1. Le calcul de la limite conduit vers infini sur infini pour le quotient et au numérateur aussi : infini moins infini.

2. $f(x) = \dfrac{x^3\left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)}{\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right) = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right) = 1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit et quotient,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5 Encadrer et comparer des fonctions

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser les comparaisons de fonctions pour trouver des limites.

A. Utilisation des outils acquis et des observations graphiques

1. Non, on ne peut pas les déterminer à partir d'opérations sur le slimites, à cause du sinus.

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

B. Démonstration algébrique

1. a) $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ d'où $x \leqslant f(x) \leqslant x + 20$.

b) De même $-1 \leqslant \sin(10x) \leqslant 1$ d'où $-\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

2. a) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

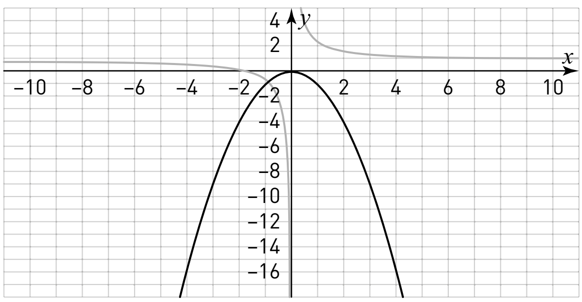
b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

À vous de jouer p. 53-61

1. 1.



2. a) À partir de 4 et avant −4.

b) À partir de 3 et avant −3.

3. On conjecture :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1 = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2.1. 2. a) À partir de 7 et avant −1.

b) À partir de 0,5.

3. On conjecture :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2 = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

3. $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-1} g(x) = +\infty$.

4. On conjecture $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\frac{1}{2}} g(x) = \pm\infty$.

5. On conjecture une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

6. On conjecture une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

7. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$ **f)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

8. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **f)** $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

9. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) / g(x) = 0$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) / g(x) = \pm\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) \times g(x) = -\infty$ **d)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

10. 1. a) $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. a) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

3. a) $\lim_{x\to1^+} h(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x\to1^-} h(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to-1^+} h(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x\to-1^-} h(x) = -\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ **f)** $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

4. a) $\lim_{x\to2^+} k(x) = -\infty$ **b)** $\lim_{x\to2^-} k(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} k(x) = 0$ **d)** $\lim_{x\to-\infty} k(x) = 0$

11. a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$

b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x - 2$ et $g(x) = x - 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g(x) = -\frac{1}{x^4}$

12. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

13. a) $f(x) \leqslant 1-\sqrt{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) $\dfrac{3}{2e^x} \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

d) $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+3}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

14. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 1$

15. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ **b)** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

16. a) $f(x) = 2x^5\left(1+\dfrac{1}{2x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{2}{3}$

c) $f(x) = -3x^2\left(1-\dfrac{5}{3x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

17. a) $f(x) = -x^5\left(-\dfrac{1}{x}+1-\dfrac{1}{x^6}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f(x) = \dfrac{-3x^2\left(-\dfrac{1}{3x^2}+1\right)}{-4x^3\left(-\dfrac{1}{4x^2}+1\right)} = \dfrac{3\left(-\dfrac{1}{3x^2}+1\right)}{4x\left(-\dfrac{1}{4x^2}+1\right)}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = -3x^3\left(1-\dfrac{1}{3x^2}+\dfrac{1}{3x^3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-x\left(-\dfrac{2}{x}+1\right)} = \dfrac{x\left(1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\left(-\dfrac{2}{x}+1\right)}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

18. 1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x+1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+1 = -\infty$ indéterminée.

3. $f(x) = 3x^2\left(1-\dfrac{2}{3x}+\dfrac{1}{3x^2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

19. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ indéterminée.

2. $f(x) = \dfrac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

20. a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-6}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{-x-x^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{-3-x}+\sqrt{4-x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

21. a) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{3-x}+\sqrt{10-x}}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+6}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{x-7-x^2}{\sqrt{x-4}+\sqrt{3+x^2}}$

$$= \frac{-x^2\left(-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{\frac{3}{x^2}+1}\right)} = \frac{-x\left(-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}+1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{\frac{3}{x^2}+1}}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) = \dfrac{-x-x^2}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x^2}}$

$$= \frac{-x^2\left(\frac{1}{x}+1\right)}{-x\left(\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}\right)} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sqrt{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}}$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

22. 1. Infini moins infini.

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

23. 1. Les trois !

2. $f(x) = \dfrac{x-x^2-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-x\left(-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$g(x) = \dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{5+x}} = \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x}}}$

$h(x) = \dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{-2+x}} = \dfrac{x\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

Exercices apprendre à démontrer p. 62

Pour s'entraîner

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ donc par définition d'une limite infinie à l'infini on a : pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x < m$ alors $f(x) > A$.

Or $g(x) \geqslant f(x)$ donc par conséquent pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x < m$ alors $g(x) > A$ ce qui signifie que : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

Exercices calculs et automatismes p. 63

24. Lecture graphique

1. b) **2.** d)

25. Opérations sur les limites

1. c) et d) **2.** a), b) et c)

26. Limites diverses

1. Faux

2. Vrai

3. Faux

4. Vrai

27. Formes indéterminées

a) et d)

28. Inégalités

1. c) **2.** b) **3.** a) et d)

29. Encadrement

1. a) **2.** d) **3.** b)

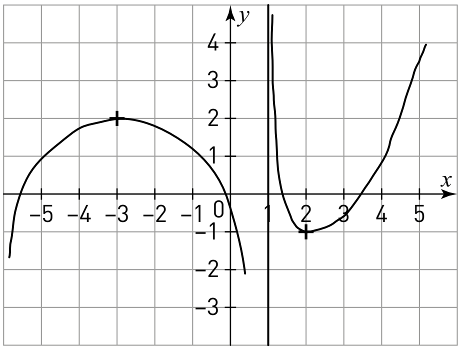
30. Comparaison

1. d) **2.** d) **3.** c)

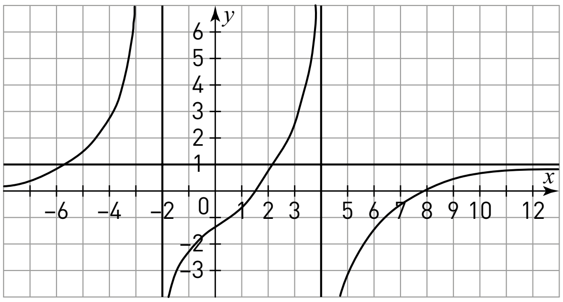
Exercices d'application p. 64-66

Courbe représentative

31. On trace à la main en plaçant les extremums et l'asymptote verticale.



32. On trace à la main en plaçant les asymptotes verticales et horizontales.



Limites à l'infini

33. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

34. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

35. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Limite en une valeur réelle

36. $\lim_{x\to-2} f(x) = +\infty$

37. Non.

38. a) $\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$

c) $\lim_{x\to3^-} f(x) = \frac{e^3}{3}$ **d)** $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$

Déterminer des asymptotes

39. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble avoir une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

La courbe $\mathscr{C}_g$ semble ne pas avoir d'asymptote.

La courbe $\mathscr{C}_h$ semble avoir une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

La courbe $\mathscr{C}_k$ semble ne pas avoir d'asymptote.

40. a) $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

41. Deux asymptotes verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$ et deux asymptotes horizontales d'équations $y = -2$ et $y = 1$.

Opérations sur les limites

42. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

43. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **d)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

44. 1. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

d) $\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} k(x) = 0$.

2. Pas d'asymptotes pour f et g. Pour h une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une verticale d'équation $x = 1$. Pour k une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une verticale d'équation $x = 0$.

Opérations sur les limites en une valeur

45. a) $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{1}{4}$

c) $\lim_{x\to2} f(x) = 8e^2$ **d)** $\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$

46. a) $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x\to2^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to2^+} g(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -0^+} k(x) = +\infty$

Comparaison de fonctions

47. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c) Impossible. **d)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

48. 1. a) $f(x) \geqslant 2x - 1$

b) $g(x) \geqslant x - 1$

2. Donc leur limite est $+\infty$.

49. 1. a) $f(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$

b) $g(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$

2. Donc leur limite est $+\infty$.

3. $f(x) \leqslant \dfrac{2}{x}$ et $g(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc leur limite est $-\infty$.

50. 1. a) $-\dfrac{1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$

b) $1 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x+1}{x}$

c) $-\dfrac{2}{x^2} \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{2}{x^2}$

2. On en déduit que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 0$.

Croissances comparées

51. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Composition de limites

52. 1. a) $u(x) = 2x^2 + 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

b) $u(x) = -2x - 1$ et $v(x) = e^x$.

c) $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \cos(x)$.

d) $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

53. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} k(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} k(x) = +\infty$.

54. a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = e^{-1} + 2$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = 0$

55. 1. a) $f(x) = e^{-3x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4 + x^2}}$

2. $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n = 0$ dans les deux cas.

56. a) $\lim\limits_{n\to +\infty} u_n = 0$ **b)** $\lim\limits_{n\to +\infty} v_n = 0$

c) $\lim\limits_{n\to +\infty} w_n = 0$ **d)** $\lim\limits_{n\to +\infty} t_n = 1$

Formes indéterminées

57. 1. Forme « 0/0 ».

2. $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(1-x)^2} = \dfrac{x-2}{x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

58. 1. C'est de la forme « 0/0 ».

2. $-3x^2 + 5x + 2 = (x-2)(-3x-1)$ et alors $f(x) = -3x - 1$ pour tout x différent de 2.

3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -7 = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

59. 1. C'est de la forme « 0/0 ».

2. $-x^2 - x + 6 = (x+3)(-x+2)$ et $f(x) = \dfrac{-x+2}{x+3}$.

3. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = +\infty$.

60. 1. En $-\infty$ aucune des fonctions n'a une limite indéterminée.

2. En $+\infty$ elles sont toutes indéterminées.

3. $f(x) = -x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$, $g(x) = x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$

et $h(x) = -4x^4 \ -\frac{1}{2x^3} + 1 - \frac{1}{4x^4}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

61. 1. En $-\infty$ elles sont toutes indéterminées.

2. En $+\infty$ elles sont toutes indéterminées.

3. $f(x) = \dfrac{1 - \frac{4}{x}}{x\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$, $g(x) = \dfrac{x\left(1 + \frac{5}{x^2}\right)}{\frac{3}{x} - 1}$

et $h(x) = \dfrac{-\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)}{\frac{3}{x^2} + 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1 = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

62. 1. De la forme $\infty - \infty$.

2. $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-4}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercices d'entraînement p. 67-69

Utiliser la définition de limite

63. 1. On conjecture $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour $A = 2\,003$ alors pour $x < -2\,000$

on a $f(x) > 2\,003$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Et pour $A = -1\,997$alors pour $x > 2\,000$

on a $f(x) < -1\,997$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

64. a) Pour $A = 2\,003$ alors pour $x > 1\,000$

on a $f(x) > 2\,003$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour $]0{,}99\ ;\ 1{,}01[$ alors pour $x > 100$

on a $0{,}99 < f(x) < 1{,}01$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

c) Pour $A = 1001$ alors pour $x < -100$ on a $f(x) > 1001$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

d) Pour $]-2{,}01\ ;\ -1{,}99[$ alors pour $x < -100$ on a $-2{,}01 < f(x) < -1{,}99$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

65. Pour $A = 100$ alors pour $x < -100$ on a $f(x) > 100$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Et pour $A = -100$ alors pour $x > 100$ on a $f(x) > 100$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

66. Pas limite en $+\infty$ car trop d'oscillations et en $-\infty$ la limite semble être 0.

Donc une asymptote d'équation $y = 0$.

67. 1. On conjecture $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

2. Pour $A = 50$ alors pour $0{,}49 < x < 0{,}5$ alors $f(x) > 50$ et donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Pour $A = 50$ alors pour $0{,}5 < x < 0{,}51$ alors $f(x) < -50$ et donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

68. a) Pour $A = -100$ alors pour $0{,}99 < x < 1$ alors $f(x) < -100$ et donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

b) Pour $]0\ ;\ 0{,}01[$ alors pour $0 < x < 0{,}0001$ on a $0 < f(x) < 0{,}01$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

c) Pour $A = 10\,000$ alors pour $-2{,}01 < x < -2$ alors $f(x) > 10\,000$ et donc $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$

d) Pour $A = -10\,000$ alors pour $1 < x < 1{,}01$ alors $f(x) < -10\,000$ et donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

Opérations sur les limites

69. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc une asymptote d'équation $y = -1$.

c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

d) $\lim_{x\to-\infty} k(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$ donc une asymptote d'équation $y = 0$.

70. 1. $f(-x) = e^{-x} + e^{x} = f(x)$

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

71. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ donc une asymptote d'équation $y = 0$.

d) $\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

72. a) $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\frac{1}{3} = \lim_{x\to1^+} f(x)$

b) $\lim_{x\to0^-} g(x) = -1 = \lim_{x\to0^+} g(x)$

c) $\lim_{x\to-2^-} h(x) = 12 = \lim_{x\to-2^+} h(x)$

d) $\lim_{x\to-1^-} k(x) = -\frac{1}{2} = \lim_{x\to-1^+} k(x)$

73. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ et on en déduit une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

74. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

75. $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

76. a) $\lim_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$ donc une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

b) $\lim_{x\to4^-} g(x) = -\frac{e^4}{4} = \lim_{x\to4^+} g(x)$

c) $\lim_{x\to1^-} h(x) = +\infty = \lim_{x\to1^+} h(x)$ donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

d) $\lim_{x\to1^-} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^+} k(x) = +\infty$ donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

77. $f(0)$ n'existe pas donc la courbe 2 est celle représentant la fonction f.

Formes indéterminées

78. 1. a) $x^4\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)$

b) $-5x^4\left(1-\frac{3}{5x}+\frac{1}{5x^3}\right)$

c) $e^{2x}(1 - e^{-x})$

d) $e^{4x}(1+e^{-2x+1} - e^{-3x} - 3e^{-4x})$

2. $\lim_{x\to-\infty} a(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a(x) = +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} b(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} b(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} c(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} c(x) = +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} d(x) = -3$ et $\lim_{x\to+\infty} d(x) = +\infty$.

79. 1. a) $\dfrac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{2}{x}}$

b) $\dfrac{x\left(1-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x}-3}$

c) $\dfrac{x\left(\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^2}+1\right)}{\frac{3}{x^2}-1+\frac{4}{x}}$

d) $\dfrac{1-e^{-2x}+e^{-3x}}{e^{x}(e^{-3x}-2)}$

2. $\lim_{x\to-\infty} a(x) = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x\to+\infty} a(x) = \frac{2}{3}$.

$\lim_{x\to-\infty} b(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} b(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} c(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} c(x) = -\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} d(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$.

80. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ non indéterminée

et $f(x) = x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$ donne $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

b) Indéterminée dans les deux cas

et $g(x) = x^4\left(1 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}\right)$ donne $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$

et $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

c) Indéterminée dans les deux cas

et $h(x) = \dfrac{2x\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right)}{-\left(-\frac{1}{x} + 1\right)}$ donne $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = -\infty$

et $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

d) $\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty$ non indéterminée

et $k(x) = \dfrac{1 + e^{-x} - e^{-2x}}{e^{-x} - 3}$ donne $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = -\frac{1}{3}$.

81. 1. a) $\dfrac{(x-1)^2}{x-1} = x - 1$

b) $\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-4)} = \dfrac{x-1}{2x-4}$

2. $\lim_{x\to1^-} a(x) = 0$ et $\lim_{x\to1^+} a(x) = 0$

$\lim_{x\to1^-} b(x) = 0$ et $\lim_{x\to1^+} b(x) = 0$

82. a) $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

b) $g(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x-2}{x-1}$ donne

$\lim_{x\to2^-} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to2^+} g(x) = 0$.

c) $h(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x+3} = x - 1$ donne

$\lim_{x\to-3^-} h(x) = -4$ et $\lim_{x\to-3^+} h(x) = -4$.

d) $k(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$ donne

$\lim_{x\to1^-} k(x) = 2$ et $\lim_{x\to1^+} k(x) = 2$.

83. L'ensemble de définition est : $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

À l'infini c'est indéterminé et $f(x) = \dfrac{x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{2}{x} - 1}$,

ce qui donne $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

84. L'ensemble de définition est : $]0\,;+\infty[$.

À l'infini c'est indéterminé et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ce qui donne $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. D'autre part : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

85. 1. L'ensemble de définition est :
$]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

2. À l'infini c'est indéterminé et $f(x) = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$ ce qui donne $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ et d'autre part : $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

3. On peut donc dire que f présente une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

86. 1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - 5}{x\left(1 - \frac{16}{x^2}\right)}$ donne $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

3. La fenêtre est surement entre les valeurs interdites –4 et 4.

87. 1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

2. $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ donne $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

88. a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ donne $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}} - x = x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}} - 1\right)$ donne

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.

89. Courbe 1 pour f,
courbe 2 pour k,
courbe 3 pour g et
courbe 4 pour h.

Comparaison

90. a) $f(x) \geqslant x - 1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) \geqslant (x-1)^2$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

c) $f(x) \leqslant \dfrac{x^3}{x-1}$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) \leqslant \dfrac{x^3+2}{(x-1)^2}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

91. 1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Par encadrement $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

92. 1. $x + \dfrac{1}{2} - 1 \leqslant E\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \leqslant x + \dfrac{1}{2}$

D'où $1 - \dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2x}$.

2. Par encadrement $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.

Croissances comparées

93. Courbe a) pour k, courbe b) pour f, courbe c) pour g et courbe d) pour h.

94. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et

$g(x) = e^x\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$ et

donne $h(x) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{x}{e^x} + e^{-2x}\right)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$

et $k(x) = e^x\left(\dfrac{x^4}{e^x} - 2x + \dfrac{e^2}{e^x}\right)$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$.

95. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^2 + 3x - 6 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

$3x^2 + 3x - 6 = 3x^2\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

donne $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + 3x - 6 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{X} = +\infty$

donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} -\dfrac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^X = +\infty$

donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} -\dfrac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$

donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 0$.

c) $\dfrac{3\pi x - 2\pi + 1}{1 - 6x} = \dfrac{3\pi\left(1 - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3\pi x}\right)}{\dfrac{1}{x} - 6}$

donne $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\pi x - 2\pi + 1}{1 - 6x} = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{X\to-\frac{\pi}{2}} \sin(X) = -1$

donc par composition de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$.
Idem en $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc par composition et somme de limites $\lim\limits_{x\to0^-} k(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$ donc par composition et somme de limites : $\lim\limits_{x\to0^+}k(x)=+\infty$.

96. Oui on le vérifie bien.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$ donc par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\mathrm{e}^{1-x}=0$ et par ailleurs $\frac{\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$

donne $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1-x}=0$ donc par somme de limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Études de fonctions

97. 1. $\left]-\infty ; -\frac{7}{3}\right[\cup \left]-\frac{7}{3};+\infty\right[$

2. $f'(x)=\frac{1}{(-3x-7)^2}>0$ donc f est toujours croissante.

3. $f(x)=\frac{-4-\frac{9}{x}}{-3-\frac{7}{x}}$ donne que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{4}{3}$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{4}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\frac{7}{3}} -4x-9=\frac{1}{3}$ et donc $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{3}^-} f(x)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\frac{7}{3}^+}f(x)=-\infty$.

4.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

98. $f'(x)=1\mathrm{e}^{-x}+(x+1)(-\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de $-x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

C'est indéterminé en $+\infty$, alors on écrit :

$f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{-x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$

donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

99. 1. $f(x)=\frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{8}{x}}$ donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$.

Et $\lim\limits_{x\to-4} x-2=-6$ donne $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-4^+}f(x)=-\infty$ et donc la courbe possède deux asymptotes d'équations $y=\frac{1}{2}$ et $x=-4$.

2. $f(x)-\frac{1}{2} = -\frac{12}{2(2x+8)}$ donc la courbe est au-dessus de son asymptote
sur $]-\infty ; -4[$ et en dessous sur $]-4 ; +\infty[$.

100 1. $f(x)=\frac{2}{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}$ donne $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x}{x+2}=1$ donc $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

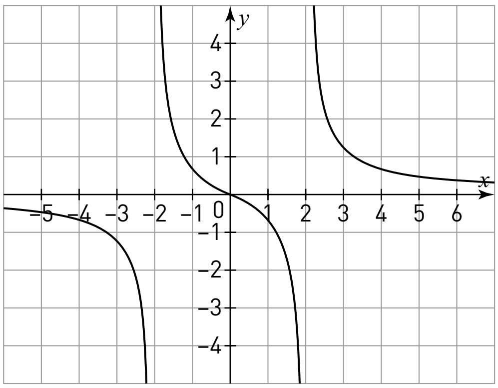
donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x}{x-2}=1$ donc $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$

donc une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

4. $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0$ donc toujours décroissante.

5.



101. On vérifiera que les règles de la démonstration sont observées.

102. On peut voir l'exercice 133.

Exercices bilan p. 70

103. Calcul de limite

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}$ donne par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

104. Suite de fonctions

1. On a $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$ indépendant de n donc $A\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

2. a) $f_0'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$ donc strictement croissante.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$ donc deux asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

c)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		+	
$f_0(x)$	0	↗	1

3. a) $f_1(-x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x)$

b) Par composition on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f_0'(x) = -f_1'(x)$ donc f_1 est décroissante.

c) Les courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

4. a) $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

c) $f_n'(x) = -\dfrac{ne^{nx}+(n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx}+e^{(n-1)x})^2} < 0$ donc les fonctions f_n sont décroissantes.

105. Évolution d'une proportion

1. $p(10) \approx 0{,}88$

2. a) $p'(x) = \dfrac{0{,}2e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2} > 0$ donc p est croissante.

b) Par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = 1$.

c) Plus les années s'écoulent, plus la proportion de personnes équipées augmentera jusqu'à ce que toutes les personnes soient équipées.

106. Taux d'alcoolémie

1. $f'(t) = 2e^{-t} + 2t(-e^{-t}) = 2(1-t)e^{-t}$ donc croissante sur [0 ; 1] et décroissante sur [1 ; +∞[.

2. Elle est maximale pour $t = 1$ et vaut $f(1) = 2e^{-1} \approx 0{,}74$.

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc la concentration d'alcool disparaît.

4. a) Car la limite est nulle donc la concentration sera inférieure à 5×10^{-3}.

b)

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Préparer le BAC Je me teste p. 72

107. D **108. D**

109. B **110. A** et **D**

111. D **112. C**

113. B **114. B**

115. C

Préparer le BAC Je révise p. 73

116. Observations graphiques

1. c)
2. b)
3. b)

117. Courbe représentative

1. b)
2. d)

118. Opérations sur les limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

119. Comparaison de fonctions

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

120. Limites et croissances comparées

1. b)
2. c)
3. c)

121. Composition de limites

1. b)
2. b)
3. c)

Exercices vers le supérieur p. 74

122. Calcul de limites

a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $f(x) = \dfrac{2x^{n-1}}{\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^n}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

d) $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

123. Contres-exemples

1. $f(x) = x^3 - 3x^2$

2. $f(x) = -\dfrac{1}{x^3}$

3. $f(x) = x^2 - 4$

124. Utiliser les définitions

A. Préliminaires

1. $\Delta = (3-M)^2 - 4(1-2M) = M^2 + 2M + 5$
$= (M+1)^2 + 4 > 0$

2. a) Car si $x > 0$ alors $-\dfrac{1}{x+2} < 0$.

b) L'inéquation donne $x > 2 - \dfrac{1}{\varepsilon}$ et ε étant petit alors x est grand.

B. Démonstrations

1. $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)-1}{x+2} = x + 1 - \dfrac{1}{x+2}$ et donc,

d'après la partie A, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

2. a) $f(x) > M \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3x+1}{x+2} > M$

$\Leftrightarrow x^2 + (3-M)x + 1 - 2M < 0$

car $x + 2 < 0$.

Donc x est entre les racines du trinôme comme -2 car $(-2)^2 + (3 - M)(-2) + 1 - 2M = -1$.

b) Donc $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$.

3. a) $f(x) < m \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} < m$

$\Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x + 1 - 2m < 0$
car $x + 2 > 0$.

Donc x est entre les racines du trinôme comme -2 car $(-2)^2 + (3 - M)(-2) + 1 - 2M = -1$.

b) Donc $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$.

125. Asymptotes paramétrées

1. Pour a négatif.

2. Pour toutes les valeurs réelles.

3. Pour toutes les valeurs sauf $\dfrac{1}{2}$.

126. Asymptote oblique (1)

$$\frac{(ax + b)(2x - 2) + c}{2x - 2} = \frac{2ax^2 + (2b - 2a)x + (c - 2b)}{2x - 2}$$

d'où le système : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = 1 \\ c - 2b = -6 \end{cases}$

qui donne $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -4$.

On en déduit que l'asymptote oblique a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

127. Asymptote oblique (2)

1. a) $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{4x^2}$ qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$f(x) = \dfrac{x\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{2}$ qui donne $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-1+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

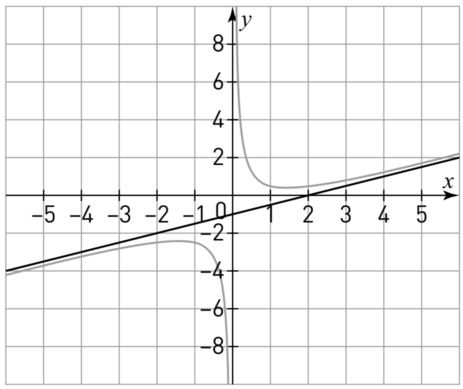
c) Une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2. a) $f(x) - \left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = 0$.

b) Pour les réels négatifs, la courbe est en dessous de l'asymptote et pour les réels positifs elle est au-dessus.

3.



128. Asymptote oblique (3)

1. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

2. $f(x) - \left(-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{2x + 2}$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}\right) = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}\right) = 0$.

3. Le point $(-1\ ;\ 2)$ est centre de symétrie quand $\dfrac{f(-1 - h) + f(-1 + h)}{2} = 2$.

129. Branches infinies (1)

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} g(x)$

2. a) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{g(x)}{x} = x$

3. a) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

et branche parabolique d'axe (Oy).

b) $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{4}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

et branche parabolique d'axe (Ox).

c) $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{e^x(1+e^{-x})}{x^3}$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = +\infty$ et branche parabolique d'axe (Oy).

d) $\dfrac{k(x)}{x} = \dfrac{1+\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{k(x)}{x} = 0$ et branche parabolique d'axe (Ox).

130. Branches infinies (2)

1. a) $f(x) = \dfrac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$ et $g(x) = \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$ donne bien les limites infinies.

b) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ et $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}$

donnent $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$.

c) Ni l'un ni l'autre.

2. a) Pour f on a $a = 2$ et pour g, $a = 1$.

b) $f(x) - (2x+b) = \dfrac{-(1+b)x - b}{x+1}$

c) Ce qui s'écrit aussi $\dfrac{-(1+b)-\dfrac{b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ et donc

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \ -(2x+b) = -(1+b)$

pour que la droite d'équation $y = 2x + b$ soit asymptote oblique, il faut que cette limite soit nulle donc que $b = -1$.

3. $g(x) - (x+b) = \dfrac{x\sqrt{x} - (1+b)x - b}{x+1}$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1+b}{\sqrt{x}}-\dfrac{b}{x\sqrt{x}}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}$$

et $\lim_{x\to+\infty} g(x) - (x+b) = +\infty$ donc pas d'asymptote oblique.

4. $f(x) - 2x = -\dfrac{x}{1+x} = -\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = -1$

on retrouve b.

131. Fonction paire

Comme $f(-x) = f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ alors $-x$ tend vers $+\infty$.

132. Utilisation de la dérivée

1. a) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x}$

b) $= \dfrac{-x}{x\left(\sqrt{9-x}+3\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{9-x}+3}$

et donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x}-3}{x} = -\dfrac{1}{6}$.

c) Cela rappelle $f'(0)$ et si on calcule $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{9-x}}$

qui donne $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ et $f'(0) = 1$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = -1$.

b) $f'(x) = e^{x-1}$ et $f'(1) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-e}{x-1} = 1$.

133. Règle de l'Hôpital

1. a) $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = e^x$ donc la limite vaut $\dfrac{2\times 0}{e^0} = 0$.

b) $f'(x) = 1 \times e^{x^2-1} + x \times 2xe^{x^2-1}$ et $g'(x) = e^x$ donc la limite vaut $\dfrac{e^{-1}+0}{e^0} = e^{-1}$.

2. a) $\dfrac{3x+1}{x^2-1} = \dfrac{3x+1}{(x+1)(x-1)}$ donne $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x+1}{x^2-1} = +\infty$.

b) Avec la règle on obtient $\dfrac{3}{2\times 1} = \dfrac{3}{2}$ différent car $\lim\limits_{x\to 1} 3x+1 \neq 0$.

3. a) $h(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin(X)}{X}$ qui par encadrement et comme X tend vers $+\infty$ donne comme limite 0.

b) $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

et $g'(x) = 1$.

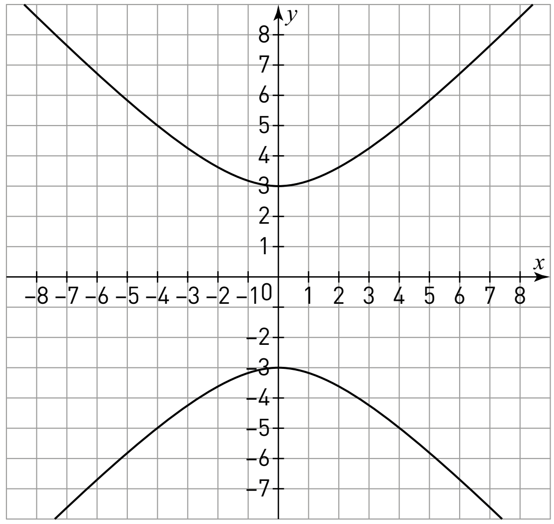
c) $\dfrac{f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)} = \dfrac{1}{n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$

si on pose $v_n = \dfrac{1}{n\pi}$ le résultat précédent devient ± 1 donc pas limite.

d) La condition $g(a) \neq 0$ n'est pas réalisée.

134. Coniques

1.



Deux limites ?

2. $y^2 = x^2 + 9$ d'où $y = \pm\sqrt{x^2+9}$.

3. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

et le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(x) - x = \sqrt{x^2+9} - x = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+9}+x}$

donne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$ et

$-f(x) - x = -\sqrt{x^2+9} - x = \dfrac{-9}{\sqrt{x^2+9}-x}$

donne $\lim\limits_{x\to-\infty} -f(x) - x = 0$, on en déduit que la droite est asymptote aux deux courbes.

5. De même $y = -x$ est asymptote.

135. Calculs de limites (1)

a) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+1}$

donne comme limite $\dfrac{1}{2}$.

b) Avec la règle de l'Hôpital la limite est

$\dfrac{(n+1)a^n}{na^{n-1}}=\dfrac{(n+1)a}{n}$.

c) Par comparaison la limite est infinie.

d)

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}=\dfrac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}$

et la limite donne $-\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$ qui tend vers 1.

136. Calculs de limites (2)

1. $\sqrt{x+n}-\sqrt{x}=\dfrac{n}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x}}$ qui tend vers 0.

2. On associe une $\sqrt{x}$ à chaque terme et du coup chaque différence ayant pour limite 0 d'après 1, la somme aussi.

137. Partie entière

1. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{2}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2}{x}E(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x}E(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{a}E\left(\dfrac{b}{x}\right)=\dfrac{b}{a}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{b}{x}E\left(\dfrac{x}{a}\right)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b}{x}E\left(\dfrac{x}{a}\right)=0$.

138. Fonction périodique

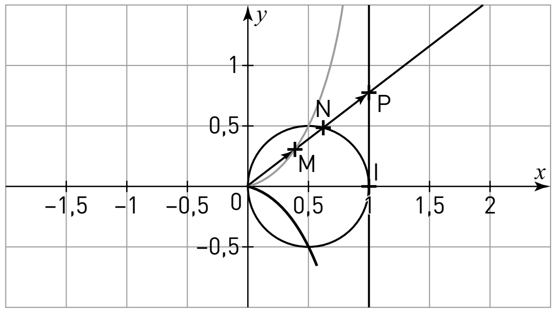
1. La suite tend vers l'infini.

2. $f(x+nT)=f(x)$

139. Cissoïde de Dioclès

A. Construction de la cissoïde

1.



2. C'est pareil et l'autre partie est la fonction $-f(x)$.

B. Équation de la cissoïde

1. a) (OP) $y=tx$

b) Équation du cercle : $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

c) On remplace, ce qui donne $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+t^2x^2=\dfrac{1}{4}$

d'où $x=\dfrac{1}{t^2+1}$ et $N\left(\dfrac{1}{t^2+1};\dfrac{t}{t^2+1}\right)$.

2. De plus $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{t^2+1}\\[2mm]\dfrac{t^3}{t^2+1}\end{pmatrix}$ qui sont aussi les coordonnées de M.

3. On vérifie.

4. L'équation en y^2 a donc deux solutions symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

5. a) $g'(t)=-\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ d'où le tableau :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	1	↘	0

b) donc dans $[0\,;\,1]$.

c) OK.

C. Détermination de $\sqrt[3]{2}$

1. La droite (IM) a pour équation $y = -t^3\, x + t^3$ donc R(0 ; t^3).

2. Pour $t = \sqrt[3]{2}$ alors R(0 ; 2) donc il suffit de faire varier P pour que R corresponde à ce point et l'ordonnée de P donne la réponse.

140. Fonction équivalentes

1. a) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e^{\frac{1}{x^2}}$ et par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{4 + \dfrac{1}{x}}}{2}$ et par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2. a) $g(x) = 2$

b) $g(x) = x$

c) $g(x) = x$

d) $g(x) = (a + 1)x$

141. Fonctions asymptotiques

a) $f(x) - g(x) = e^{-x}$ et par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$.

b) $f(x) - g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x^4 + \cos(x)} + x^2}$ et par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$.

142. Calcul de limites (3)

a) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\dfrac{1}{x}}$ et par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - e^{-\frac{1}{x(x+1)}}\right)$ et par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ et par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

143. Étude qualitative

1. Car $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1+x^2} > x$.

2. $f'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2} + x}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}\,\sqrt{1+x^2}} > 0$

donc la fonction est croissante.

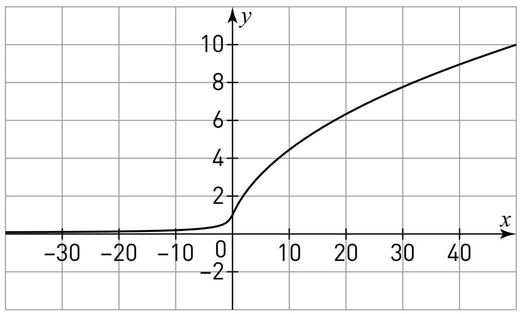
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4. a) $x + \sqrt{1+x^2} = \dfrac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}}$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \sqrt{1+x^2} = 0$.

b) Par composée $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

5.



144. Triangle rectangle

a) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ donc $\dfrac{h(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + 1}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

b) $x(h(x) - x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} + 1}$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(h(x) - x) = \dfrac{1}{2}$.

145. Fonction homographique

On a : $-1 = -\dfrac{d}{c}$, $2 = \dfrac{1}{c}$ et $1 = \dfrac{b}{d}$.

Donc $b = d = c = \dfrac{1}{2}$.

146. Fonction exponentielle (1)

1. Tous les réels sauf 0.

2. a) $f'(x) = \dfrac{x^{n-1}e^x(x-n)}{x^{2n}}$ et $n-1$ est impair

donc x^{n-1} change de signe donc :

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

3. $n-1$ est pair. La dérivée est du signe de $x-n$.

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

147. Fonction exponentielle (2)

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. Oui.

4. La dérivée est du signe de $x+1$ donc :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

148. Vitesse d'un véhicule

1. $[0\,;+\infty[$

2. a) $t_a = \dfrac{d}{80}$

b) $t_r = \dfrac{d}{x}$

c) $t = t_a + t_r = \dfrac{d}{80} + \dfrac{d}{x}$

3. $v(x) = \dfrac{2d}{t} \Leftrightarrow \dfrac{2}{v(x)} = \dfrac{t}{d} = \dfrac{1}{80} + \dfrac{1}{x}$ donc $v(x) = \dfrac{2}{\dfrac{1}{80} + \dfrac{1}{x}}$.

4. $v'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{x^2}}{\left(\dfrac{1}{80} + \dfrac{1}{x}\right)^2} > 0$ donc croissante.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 160$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} v(x) = 0$.

Travaux pratiques p. 78

TP 1. Datation au carbone 14

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Découvrir la datation au carbone 14.

A. Étude de la fonction *C*

1. Pour étudier les variations d'une fonction dérivable, on détermine sa fonction dérivée afin d'obtenir son signe.

La fonction C est dérivable comme composée d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On obtient alors : $C'(t) = -\lambda C_0 e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Les constantes λ et C_0 sont strictement positives ainsi la dérivée est strictement négatives sur $\mathbb{R}_+$. C est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a d'une part $\lim\limits_{t\to+\infty} -\lambda t = -\infty$ car $\lambda > 0$ et d'autre part $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{-X} = 0$. Ainsi par limite d'une composée de fonctions continues, on obtient : $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 0$.

On en déduit le tableau de variations complet de la fonction sur $\mathbb{R}_+$.

t	0		$+\infty$
$C'(t)$		$-$	
$C(t)$	C_0	$\searrow$	0

B. Recherche de seuil

1.

0	1E-12
1 000	8,86034E-13
2 000	7,85056E-13

3 000	6,95586E-13
4 000	6,16313E-13
5 000	5,46074E-13
6 000	4,8384E-13
7 000	4,28699E-13
8 000	3,79842E-13
9 000	3,36553E-13
10 000	2,98197E-13
11 000	2,64213E-13
12 000	2,34102E-13
13 000	2,07422E-13
14 000	1,83783E-13
15 000	1,62838E-13
16 000	1,4428E-13
17 000	1,27837E-13
18 000	1,13268E-13
19 000	1,00359E-13
20 000	8,89216E-14
21 000	7,87876E-14
22 000	6,98085E-14
23 000	6,18527E-14
24 000	5,48036E-14
25 000	4,85578E-14
26 000	4,30239E-14
27 000	3,81206E-14
28 000	3,37762E-14
29 000	2,99268E-14
30 000	2,65162E-14

2. t_0 = 29 000 au millier d'années près.

3. Sur le même principe qu'un affinage à la calculatrice, on complète le fichier pour obtenir le seuil t_0 = 28 980 à l'année près.

28 972	3,00284E-14
28 973	3,00248E-14
28 974	3,00211E-14
28 975	3,00175E-14
28 976	3,00139E-14
28 977	3,00102E-14
28 978	3,00066E-14
28 979	3,0003E-14
28 980	2,99993E-14
28 981	2,99957E-14
28 982	2,99921E-14
28 983	2,99884E-14
28 984	2,99848E-14
28 985	2,99812E-14
28 986	2,99776E-14
28 987	2,99739E-14
28 988	2,99703E-14
28 989	2,99667E-14
28 990	2,99631E-14

C. Programme de recherche de seuil

1.

```
import math
def datation(C):
    l = 1.21*10**(-4)
    C0 = 10**(-12)
    t = 0
    while C0*math.exp(-l*t) > C :
        t = t + 1000
return t
```

2.

```
import math
def datation(C):
    l = 1.21*10**(-4)
    C0 = 10**(-12)
    t = 0
    while C0*math.exp(-l*t) > C :
        t = t + 1000
    t = t - 1000
    while C0*math.exp(-l*t) > C :
        t = t + 100
    t = t - 100
    while C0*math.exp(-l*t) > C :
        t = t + 10
    t = t - 10
    while C0*math.exp(-l*t) > C :
        t = t + 1
    return t
```

3.

```
import math
def seuil(Y,p) :
    l = 1.21*10**(-4)
    C0 = 10**(-12)
    x = 0
    if p >= 3 :n = p
    else:n = 3
    while n >= p :
        while C0*math.exp(-l*x) > Y :
            x = x + 10**n
        x = x - 10**n
        n = n - 1
    x = x + 10**p
    return x
```

TP 2. Critère de Cauchy

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Découvrir le critère de Cauchy.

1. Les limites sont nulles.

2.

y/x	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0	–0,01	–0,02	–0,03	–0,04	–0,05
0,05	0	–0,0009	–0,0016	–0,0021	–0,0024	–0,0025	–0,0024	–0,0021	–0,0016	–0,0009	0
0,04	0,0009	0	–0,0007	–0,0012	–0,0015	–0,0016	–0,0015	–0,0012	–0,0007	0	0,0009
0,03	0,0016	0,0007	0	–0,0005	–0,0008	–0,0009	–0,0008	–0,0005	0	0,0007	0,0016
0,02	0,0021	0,0012	0,0005	0	–0,0003	–0,0004	–0,0003	0	0,0005	0,0012	0,0021
0,01	0,0024	0,0015	0,0008	0,0003	0	–0,0001	0	0,0003	0,0008	0,0015	0,0024
0	0,0025	0,0016	0,0009	0,0004	0,0001	0	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025
–0,01	0,0024	0,0015	0,0008	0,0003	0	–0,0001	0	0,0003	0,0008	0,0015	0,0024
–0,02	0,0021	0,0012	0,0005	0	–0,0003	–0,0004	–0,0003	0	0,0005	0,0012	0,0021
–0,03	0,0016	0,0007	0	–0,0005	–0,0008	–0,0009	–0,0008	–0,0005	0	0,0007	0,0016
–0,04	0,0009	0	–0,0007	–0,0012	–0,0015	–0,0016	–0,0015	–0,0012	–0,0007	0	0,0009
–0,05	0	–0,0009	–0,0016	–0,0021	–0,0024	–0,0025	–0,0024	–0,0021	–0,0016	–0,0009	0

3. a) $f(0{,}04) - f(0{,}05)$

b) Oui car $x = y$.

c) Au bord de la diagonale.

d) Que la limite est nulle, ce qui est cohérent.

4. On obtient dans ce cas :

y/x	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0	–0,01	–0,02	–0,03	–0,04	–0,05
0,05	0	5	13,3333	30	80	#DIV/0!	–120	–70	–53,333	–45	–40
0,04	–5	0	8,33333	25	75	#DIV/0!	–125	–75	–58,333	–50	–45
0,03	–13,333	–8,3333	0	16,6667	66,6667	#DIV/0!	–133,33	–83,333	–66,667	–58,333	–53,333
0,02	–30	–25	–16,667	0	50	#DIV/0!	–150	–100	–83,333	–75	–70
0,01	–80	–75	–66,667	–50	0	#DIV/0!	–200	–150	–133,33	–125	–120
0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
–0,01	120	125	133,333	150	200	#DIV/0!	0	50	66,6667	75	80
–0,02	70	75	83,3333	100	150	#DIV/0!	–50	0	16,6667	25	30
–0,03	53,3333	58,3333	66,6667	83,3333	133,333	#DIV/0!	–66,667	–16,667	0	8,33333	13,3333
–0,04	45	50	58,3333	75	125	#DIV/0!	–75	–25	–8,3333	0	5
–0,05	40	45	53,3333	70	120	#DIV/0!	–80	–30	–13,333	–5	0

Et on obtient bien d'un coté de la diagonale $+\infty$ et de l'autre $-\infty$.