Limites de fonctions

I Limite d'une fonction à l'infinie et Asymptote

Rappel: Intuitivement

- On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.
- On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

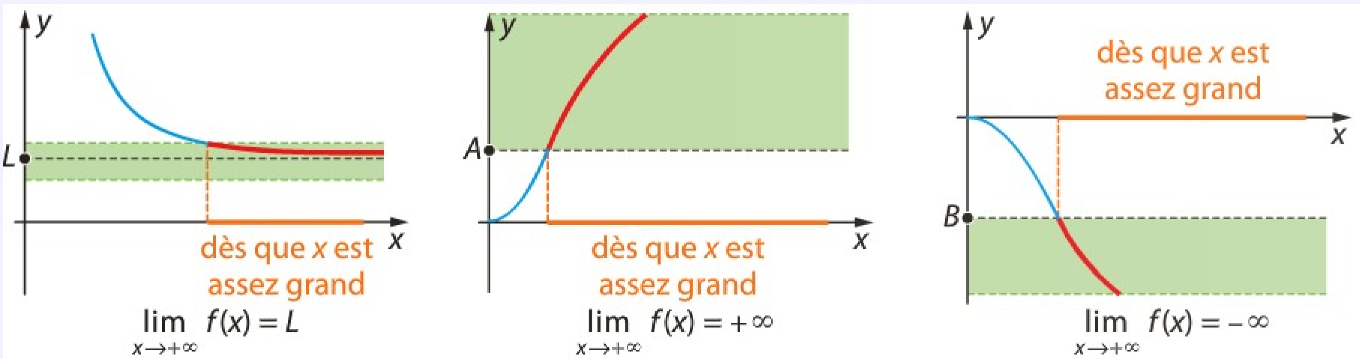
Définition: Limite en l'infini

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$ si tout intervalle $]\mathrm{A}\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ...$ si tout intervalle $]-\infty\ ;\ \mathrm{B}[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez grand

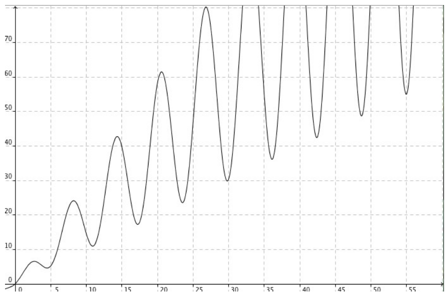
Remarque :

- Ces définitions sont analogues à celles données pour les limites de suites, « dès que x est assez grand » a remplacé « à partir d'un certain rang ».
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{L}$, on dit aussi que la limite de f est L lorsque x tend vers $+\infty$

Interprétation graphique

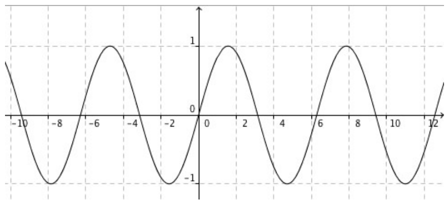


Remarque :



Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie.



C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

Limites des fonctions usuelles

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = ...$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = ...$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = ...$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = ...$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = ...$
-
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = ...$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = ...$

Définition: Asymptote horizontale

On dit que la droite d'équation $y = \mathrm{L}$ est une .... à la courbe en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathrm{L}$,

et elle est asymptote à la courbe en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \mathrm{L}$.

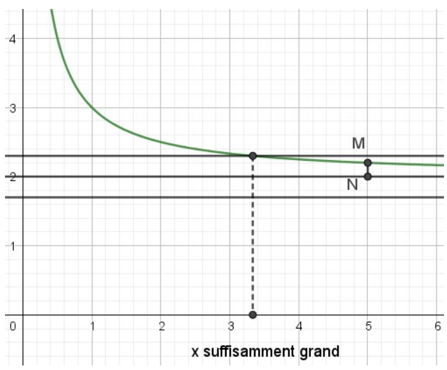
Exemple :

La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$

En effet, les valeurs de la fonction se rapprochent de 2 dès que x est assez grand.

La distance $\mathrm{MN} = \dfrac{1}{x}$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour tout intervalle contenant 2, toutes les valeurs de f appartiennent à cet intervalle dès que x est assez grand



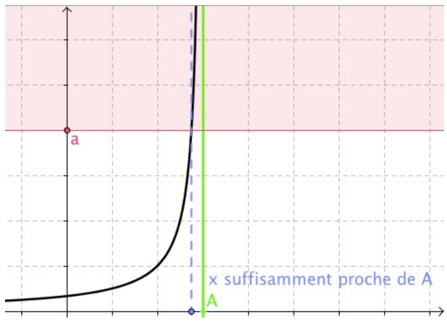
II Limite d'une fonction en un réel a

Rappel: Intuitivement

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de a.
Si on prend un réel A quelconque, l'intervalle $]\mathrm{A};+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de a.

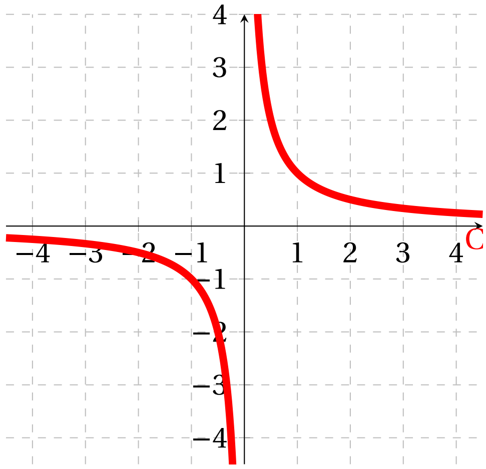


Définition: Limite en un réel a

Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{a\}$.

- Dire que f admet une limite à .... en a, signifie que lorsque x tend vers a par valeurs inférieures, f tend vers cette limite
  Notation : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a,\ x<a} f(x) = \mathrm{L}$ (L peut être aussi $\pm\infty$)
- Dire que f admet une limite à .... en a, signifie que lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, f tend vers cette limite
  Notation : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a,\ x>a} f(x) = \mathrm{L}$ (L peut être aussi $\pm\infty$)
- Dire que f admet une limite en a, lorsque les limites à gauche et à droite sont égales.

Exemple : Etudions la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro.



- Cas $x > 0$: Pour tout $\mathrm{M} > 0$, $\dfrac{1}{x} > \mathrm{M} \quad \Leftrightarrow \quad$ ....

  Ainsi pour tout nombre $\mathrm{M} > 0$, l'intervalle $]\mathrm{M}\ ;\ +\infty[$ contient tous les nombres $f(x)$ dès que $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{M}}\right[$.

  On note : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ ....

- Cas $x < 0$: Pour tout $\mathrm{M} < 0$, $\dfrac{1}{x} < \mathrm{M} \quad \Leftrightarrow \quad$ ....

  Ainsi pour tout nombre $\mathrm{M} < 0$, l'intervalle $]-\infty\ ;\ \mathrm{M}[$ contient tous les nombres $f(x)$ dès que $x \in \left]\dfrac{1}{\mathrm{M}}\ ;\ 0\right[$.

  On note : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ....

Attention : cette fonction .... de limite en zéro car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$....... $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Définition: Asymptote verticale

On dit que la droite d'équation $x = \mathrm{L}$ est une . . . .
à la courbe lorsque $\lim\limits_{x \to \mathrm{L}} f(x) = \ \pm\infty$

Exemple : Pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$; la droite $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

III Théorèmes généraux sur les limites

L et L′ sont des réels, α est un réel qui peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L′	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)+g(x)\right) =$						

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L′	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ $ou-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \left(f(x)\,g(x)\right) =$									F.I.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$							

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$					

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-5)(3+x^2)$

....

....

....

....

Remarque : Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty-\infty" , \quad "0\times\infty" , \quad "\frac{\infty}{\infty}" \quad et \quad "\frac{0}{0}"$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3\ x^3 + 2x^2 - 6x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{4x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 3}{2 - x}$

IV Fonctions composées

Définition: Définition d'une fonction composée

f est une fonction définie sur un intervalle J

et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$appartient à J.

La fonction composée g suivie de f est la fonction $h$définie sur I par $h(x) = f(g(x))$

$$\begin{array}{llllll} h: & \mathrm{I} & \rightarrow & \mathrm{J} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & g(x) & \rightarrow & f(g(x)) \end{array}$$

Remarque : On écrit $h = f \circ g$, on lit "f rond g".

Exemple : h est définie sur $]-\infty\ ;\ 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

....

....

....

....

....

....

....

Théorème: Théorème des limites d'une fonction composée

Soient a, b, c des réels ou $\pm\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v(u(x)) = c$

Exemple : h est définie sur $]-\infty\ ;\ 1]$ par $h(x) = \sqrt{1-x}$

....

....

....

....

....

....

....

V Théorèmes de comparaison

Théorème: Théorème "des gendarmes"

f, $g$et h sont trois fonctions définies sur $\mathrm{I} =]A\ ;\ +\infty[$ (ou $\mathrm{I} = \mathbb{R}$), l désigne un nombre réel.

Si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si g et h ont la même limite l en $+\infty$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$...........

Démonstration :

Par hypothèse, g et h ont la même limite l en l'infini.

Considérons un intervalle ouvert J contenant I,

- il contient tous les éléments $g(x)$ dès que $x > a$,
- il contient tous les éléments $h(x)$ dès que $x > b$.

Notons c le plus .... des deux nombres a et b.

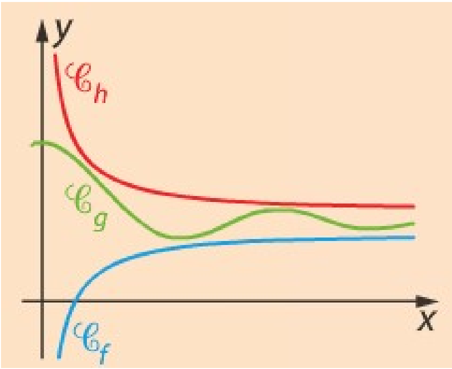
Alors J contient donc tous les éléments $g(x)$ et $h(x)$ dès que .....

Comme pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,

On en déduit que J contient tous les éléments $f(x)$ dès que $x > c$.

Ceci est vrai pour tout intervalle ouvert contenant l

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....



Théorème: Théorème de comparaison à l'infini

f et $g$sont deux fonctions définies sur $\mathrm{I} =]A\ ;\ +\infty[$ (ou I=$\mathbb{R}$)

Si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....

Si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....

Remarque : Ce théorème s'adapte aux comparaisons en $-\infty$

Démonstration :

Par hypothèse, tout intervalle de la forme $]M\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ dès que x est assez grand dans I.

Alors il contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ car $f(x) \geq g(x)$ ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemples :

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cos x}{x^2 + 1}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

VI Limites liées à la fonction exponentielle

Limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = ...$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = ...$

Démonstration :

- Soit $f(x) = e^x - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

  Alors $f'(x) = ...$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

  Comme $f'(0) = 0$

  et que la fonction $x \to e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

  alors sur $\mathbb{R}^-$ $e^x \leq 1$ $e^x - 1 \leq 0$ $f'(x) \leq 0$ alors f est ....

  sur $\mathbb{R}^+$ $e^x \geq 1$ $e^x - 1 \geq 0$ $f'(x) \geq 0$ alors f est ....

  De plus $f(0) = 1$, f admet ....

  Donc pour tout $x \in \mathrm{R}$, $f(x) \geq 1$, soit $f(x) > 0$ et donc e^x................

  D'après le théorème de comparaison, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$ ....

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = ...$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = ...$

Autres limites

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

- Soit f la fonction définie sur R^+ par $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$

  f est dérivable sur R^+ $f'(x) =$ ....

  f' est dérivable sur R^+ $f''(x) =$ ....

  On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x > 1$ donc $f''(x)$ .... d'où f' est croissante sur R^+

On dresse alors le tableau de variations :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de f''	
Variations de f'	
Signe de $f'(x)$	
Variation de f	

De plus, $f'(0) =$......... , donc $f'(x)$............ et f est ....

Or $f(0) =$ ...... donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq f(0) = 1$ ....

Donc $e^x - \dfrac{x^2}{2}$.......... soit e^x....$\dfrac{x^2}{2}$

et pour tout $x > 0$, ...

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} =$ .... ,

D'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} =$ ....

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} =$ .... donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} =$ .... soit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} =$ ....

- $xe^x =$ .... or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} =$ ....
  Alors $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (-\frac{-x}{e^{-x}}) =$ .... donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} xe^x =$ ....

- On pose $f(x) = e^x$ alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$ ....

VII Limites liées à la fonction logarithme népérien

Propriété 1: Limites aux bornes de la fonction $\ln$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstrations

1. Pour tout réel $A > 0$, on a $\ln x > A \iff x > \ldots\ldots\ldots\ldots$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $y = \dfrac{1}{x}$. Ainsi $x = \ldots\ldots\ldots$

   On a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim\limits_{y\to\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} -\ln y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} -\ln\frac{1}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   Or $\ln x = \ldots\ldots \ln\dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété: Croissances comparées

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln x = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$

Démonstration :

1. Pour tout $x > 0$, on pose $y = \ln x$. On dans ce cas $e^y = \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim\limits_{y\to\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \dfrac{e^y}{y} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Pour tout $n > 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\ln x}{x^n} = \dfrac{1}{x^{n-1}} \times \dfrac{\ln x}{x}$

   comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \ldots\ldots$ alors par produit de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = \ldots\ldots$

3. De la même façon, pour tout $x > 0$, on pose $y = \ln x$.

   On dans ce cas $e^y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\ldots\ldots\ldots} \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim\limits_{\ldots\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\ldots\ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

   ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \ldots\ldots$

4. Pour tout $n > 1$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n \ln x = x^{n-1} \times x\ln x$

   comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{n-1} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \ldots\ldots$ alors par produit de limites, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln x = \ldots\ldots$

Propriété: Limite et taux d'accroissement

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ...$$

Démonstration :

La fonction $\ln$ est dérivable en 1, donc par définition

$\ln'(1) = \lim_{h \to 0}$ ....

Comme d'autre part $\ln'(1) =$ ...., on a $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} =$ ......

Méthode : Souvent dans le cas d'une F.I. faisant intervenir la fonction $\ln$, on essaie de

- factoriser et faire apparaître des limites déjà connues ;
- procéder à un changement de variable.

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} (\ln x - 2x)$

   Pour tout réel $x > 0$, $\ln x - 2x =$ ....

   Or par propriété, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} =$ ......

   On a

   $\left.\begin{array}{l} \text{.....................................} \\ \text{.....................................} \end{array}\right\}$ ....

   Donc $\lim_{x \to +\infty} (\ln x - 2x) =$ ....

2. $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

   Pour tout réel $x > 0$, on pose $y =$ ....

   On a

   $\left.\begin{array}{l} \text{.....................................} \\ \text{.....................................} \end{array}\right\}$ ....

   Ainsi $\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$ ....

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- *Limite en* $+\infty$

  Pour tout $x > 0$, on a $\frac{x+2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

  $\left.\begin{array}{l} \text{.....................................} \\ \text{.....................................} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^2} = ...$

  On pose $y = \frac{x+2}{x^2}$

  $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to ....} \text{ ....} \\ \lim_{y \to ....} \text{ ....} \end{array}\right\} \Rightarrow$ ....

- *Limite en* 0

  On va utiliser un théorème de comparaison. En effet, pour tout $x > 0$, on a $\frac{x+2}{x^2} > \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

  Or $\ln$ est .... sur $]0;+\infty[$,

  donc $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$........$\ln\left(\frac{1}{x}\right) =$ ....

  Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln x =$ ....., alors $\lim_{x \to 0^+} -\ln x =$ .....

  donc par comparaison $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ ......